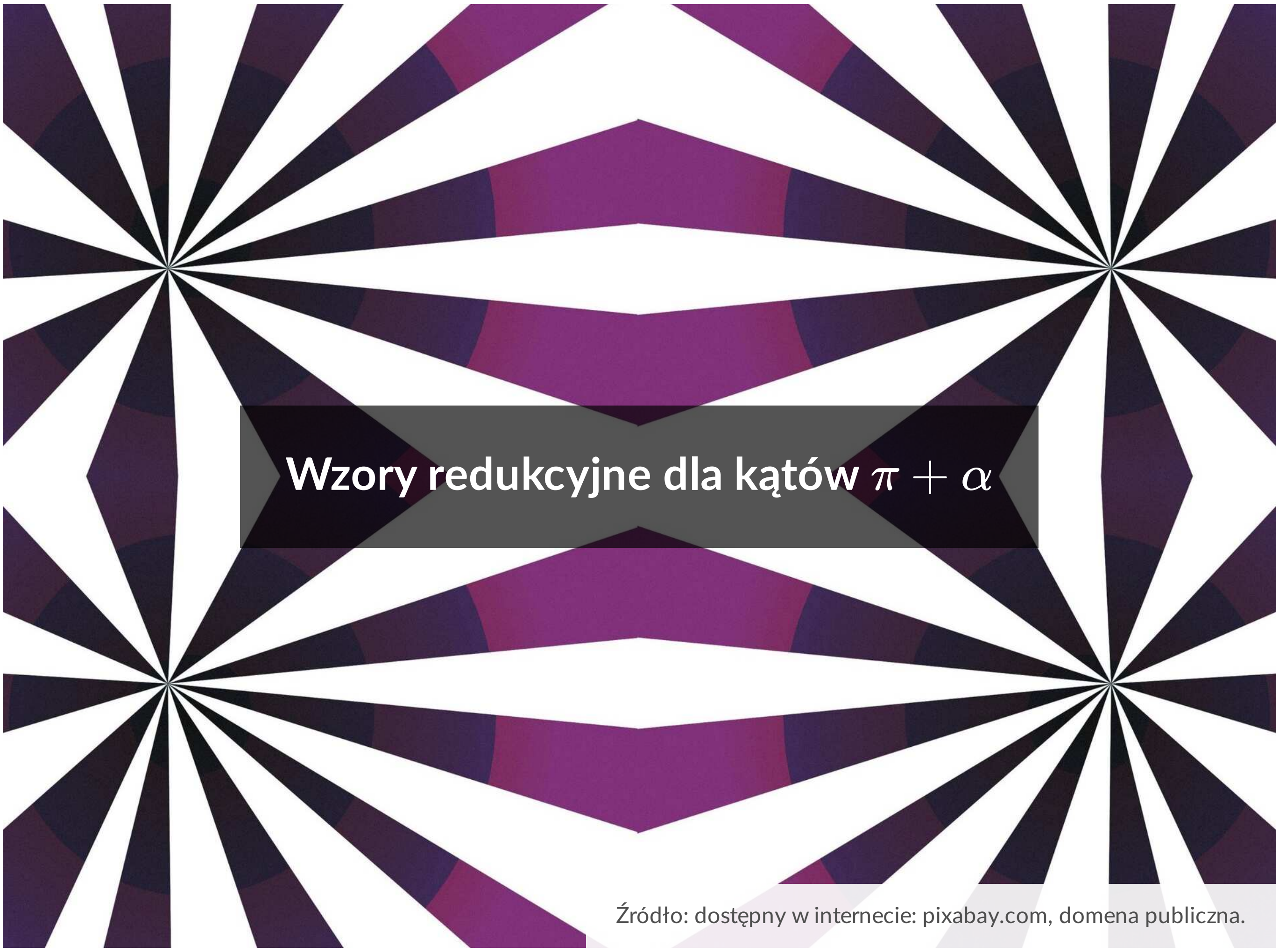
Wzory redukcyjne dla kątów $\pi + \alpha$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tej lekcji kontynuujemy wyprowadzenie wzorów redukcyjnych. Naszym głównym celem jest nabycie umiejętności obliczania wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego argumentu rzeczywistego (kąta o dowolnej mierze).

Tym razem zajmiemy się wzorami dla kątów o mierze z przedziału $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Wzory wyprowadzimy na dwa sposoby. Pierwszy będzie korzystał bezpośrednio z definicji, drugi – ze znanych własności funkcji trygonometrycznych. W ramach ćwiczeń udowodnisz też kilka tożsamości trygonometrycznych, korzystając przy tym z poznanych wcześniej zależności i własności.

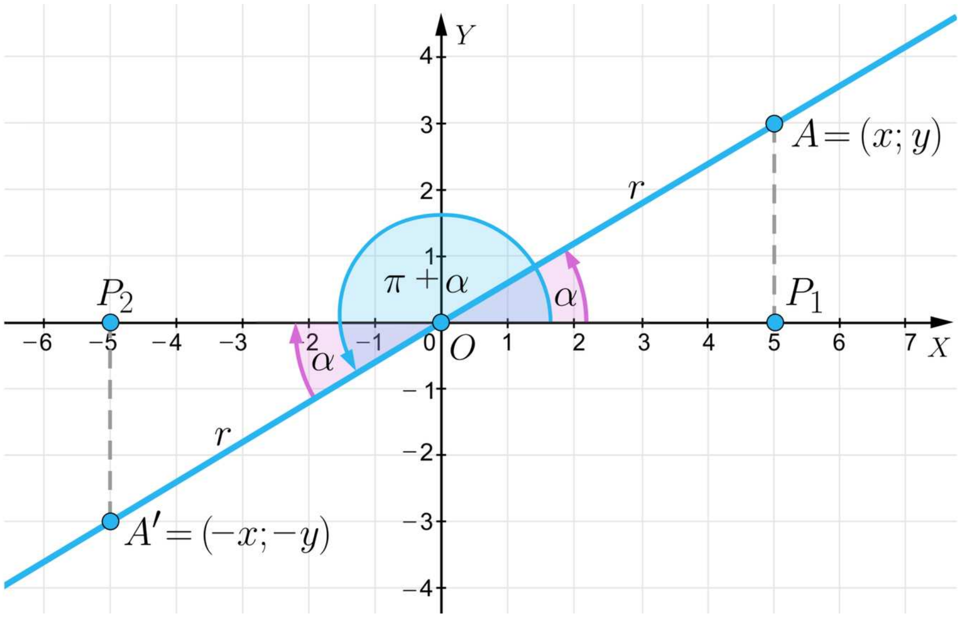
Twoje cele

- Zastosujesz wybrane wzory redukcyjne do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach z przedziału $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
- Zastosujesz wybrane wzory redukcyjne do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych.
- Zastosujesz wybrane wzory redukcyjne do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych.

Przeczytaj

W prostokątnym układzie współrzędnych umieścimy w położeniu standardowym kąty o miarach α oraz $\pi + \alpha$, gdzie $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Zauważmy, że ponieważ kąt o mierze α jest ostry (drugie ramię leży w I ćwiartce układu), kąt o mierze $\pi + \alpha$ jest wklęsły (drugie ramię leży w III ćwiartce układu).



Na drugim ramieniu kąta wybieramy punkt A o współrzędnych $(x; y)$ i promieniu wodzącym r. Na drugim ramieniu kąta o mierze $\pi + \alpha$ wybieramy taki punkt A', którego promień wodzący jest również równy r. Wówczas, przy oznaczeniach jak na rysunku powyżej, kąt A'OP_2 ma miarę α, zaś trójkąty prostokątne AOP_1 oraz A'OP_2 są przystające na mocy cechy kąt-bok-kąt. Wynika stąd, że współrzędne punktu A' są równe $(-x; -y)$.

Zauważmy teraz, że wprost z definicji funkcji trygonometrycznych zachodzą następujące równości:

$\sin \alpha = \frac{y}{r}$	$\sin(\pi + \alpha) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}$
$\cos \alpha = \frac{x}{r}$	$\cos(\pi + \alpha) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$	$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$

Otrzymujemy zatem następujące równości:

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$,

$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$ dla $x\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Chociaż powyższy dowód został przeprowadzony dla kąta ostrego α, to **wzory redukcyjne pozostają prawdziwe dla kąta o dowolnej mierze**, dla której określona jest funkcja tangens.

Powyższe tożsamości można uzyskać, stosując wzory redukcyjne dla kątów $\pi-\alpha$. Zauważmy, że $\alpha=-(-\alpha)$. Wówczas $\sin(\pi+\alpha)=\sin(\pi-(-\alpha))$.

Przypomnijmy, że dla dowolnego kąta x prawdą jest, że $\sin(\pi-x)=\sin x$. Jeśli podstawimy $-\alpha=x$, to otrzymamy $\sin(-\alpha)$, co z nieparzystości funkcji sinus daje $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

Powyższe rozumowanie możemy zapisać w postaci ciągu równości:

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin(\pi-(-\alpha))=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Analogicznie możemy postąpić z funkcją cosinus (pamiętając, że cosinus jest funkcją parzystą oraz $\cos(\pi-x)=-\cos x$):

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos(\pi-(-\alpha))=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$$

oraz z funkcją tangens (pamiętając, że tangens jest funkcją nieparzystą oraz $\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg}x$):

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}(\pi-(-\alpha))=-\operatorname{tg}(-\alpha)=-(-\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Przykład 1

Obliczymy wartości podanych wyrażeń trygonometrycznych.

a) $\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$

Przykład 2

Korzystając z tablic trygonometrycznych, obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta o mierze $\frac{6\pi}{5}$.

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[^\circ]$
0	$\mathbf{0,0000}$	$\mathbf{0,0000}$	**90**
1	$0,0175$	$0,0175$	89
2	$0,0349$	$0,0349$	88
...			

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta[^\circ]$
7	$0,1219$	$0,1228$	83
8	$0,1392$	$0,1405$	82
9	$0,1564$	$0,1584$	81
...			
35	$0,5736$	$0,7002$	55
36	$0,5878$	$0,7265$	54
37	$0,6018$	$0,7536$	53
...			
46	$0,7193$	$1,0355$	44
47	$0,7314$	$1,0724$	43
48	$0,7431$	$1,1106$	42
...			
53	$0,7986$	$1,3270$	37
54	$0,8090$	$1,3764$	36
55	$0,8192$	$1,4281$	35
...			
81	$0,9877$	$6,3138$	9
82	$0,9903$	$7,1154$	8
83	$0,9925$	$8,1443$	7

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$. Zatem przydadzą się nam wartości funkcji trygonometrycznych kąta o mierze $\frac{\pi}{5}$, które odczytujemy z tablic trygonometrycznych. Kąt o mierze łukowej równej $\frac{\pi}{5}$ ma miarę stopniową równą 36°. Stąd mamy:

$\sin\frac{\pi}{5} \approx 0,5878$,

$\cos\frac{\pi}{5} \approx 0,8090$,

$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5} \approx 0,7265$.

Zatem:

$\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5} \approx -0,5878,$

$\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5} \approx -0,8090,$

$\operatorname{tg} \frac{6\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \approx 0,7265.$

Przykład 3

Wiadomo, że $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ oraz $\frac{3\sin(\pi+x)}{-\cos(\pi-x)} + \frac{\cos(\pi+x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \operatorname{tg}(\pi + x) = 2$.
Obliczymy wartość wyrażenia $\sin x + \cos x$.

Rozwiązanie

Przekształcimy równość daną w założeniu, korzystając z następujących tożsamości:

$\cos(\pi - x) = -\cos x,$

$\sin(\pi + x) = -\sin x,$

$\cos(\pi + x) = -\cos x,$

$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x,$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$

Mamy więc:

$\frac{3\sin(\pi+x)}{-\cos(\pi-x)} + \frac{\cos(\pi+x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \operatorname{tg}(\pi + x) = 2$

$\frac{-3\sin x}{\cos x} + \frac{-\cos x}{\cos x} + \operatorname{tg} x = 2$

$-3\operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg} x = 2$

$-2\operatorname{tg} x = 3$

$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$

$\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{2}$

$\sin x = -\frac{3}{2}\cos x.$

Skorzystamy z tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$\left(-\frac{3}{2}\cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\frac{9}{4}\cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$\frac{13}{4}\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{4}{13}$

Ponieważ $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, więc $\cos x > 0$. Stąd $\cos x = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Możemy teraz wyznaczyć $\sin x$:

$\sin x = -\frac{3}{2}\cos x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Zatem $\sin x + \cos x = -\frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{2\sqrt{13}}{13} = -\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Przykład 4

Porównamy liczby $\sin\frac{\pi}{13}$ i $-\sin\frac{13\pi}{12}$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że

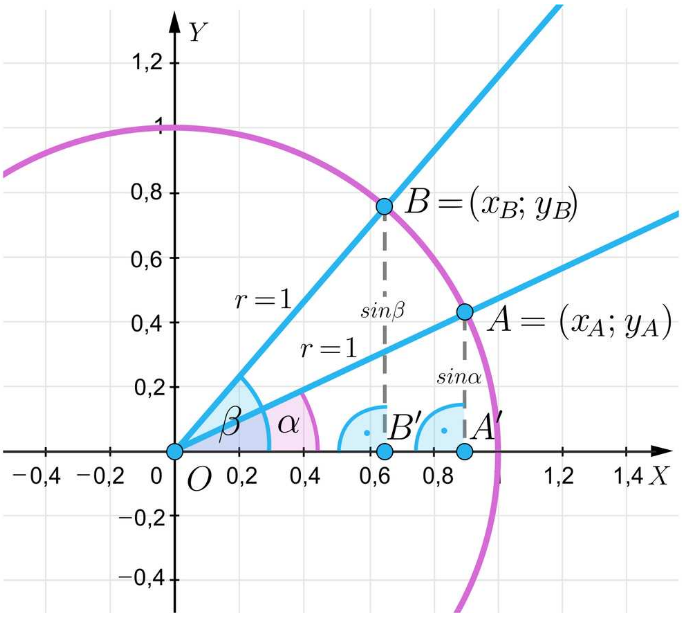
$\sin\frac{13\pi}{12} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}$, zatem

$-\sin\frac{13\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}$.

Zatem mamy do porównania liczby $\sin\frac{\pi}{13}$ oraz $\sin\frac{\pi}{12}$.

Możemy je porównać, korzystając z definicji funkcji sinus dowolnego kąta. Umieśćmy dwa kąty o miarach α i β takie, że $\alpha < \beta$.

Na drugich ramionach tych kątów wybierzmy odpowiednio punkty A i B, których promienie wodzące są równe 1.



Zauważmy, że

$\sin\alpha = \frac{y_A}{r} = \frac{y_A}{1} = y_A$

oraz

$\sin\beta = \frac{y_B}{r} = \frac{y_B}{1} = y_B.$

Zatem jeśli promienie wodzące punktów A i B są równe 1, to drugie współrzędne tych punktów są równe sinusom odpowiednich kątów. Możemy zaobserwować, że w przypadku kątów ostrych α i β zachodzi

$\alpha < \beta \Rightarrow y_A < y_B \Rightarrow \sin\alpha < \sin\beta.$

W naszym przypadku ponieważ $\frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{12}$, więc mamy, że

$\sin\frac{\pi}{13} < \sin\frac{\pi}{12} = -\sin\frac{13\pi}{12}.$

Słownik

wzory redukcyjne

zestaw wzorów pozwalających redukować argumenty funkcji trygonometrycznych do miar z przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ w celu wyliczenia wartości tych funkcji

jedynka trygonometryczna

tożsamość trygonometryczna, która orzeka, że suma kwadratów sinusa i cosinusa dowolnego argumentu jest równa 1; wzór ten nazywamy też trygonometryczną wersją twierdzenia Pitagorasa

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj wyprowadzenie wzorów redukcyjnych dla kątów $\pi + \alpha$.

Polecenie 2

Połącz w pary wyrażenia o równych wartościach.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Wykaż, że jeśli tylko $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$, to wyrażenie

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi+x)} \cdot \frac{-3\sin(\pi+x)+2\sin(2\pi+x)+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{3\cos(-x)+2\cos(\pi+x)}$$

przyjmuje stałą wartość niezależnie od wartości x.

Ćwiczenie 7

Aby przekształcić wyrażenie $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$, możemy postąpić następująco:
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$.

Na mocy wzoru redukcyjnego $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, przyjmując, że $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$, prawdą jest, że $\sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Na mocy wzoru redukcyjnego mamy, że $-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$.

Zatem $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$.

Na podstawie powyższego rozumowania rozwiąż test umieszczony poniżej. Wskaż poprawne odpowiedzi.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory redukcyjne dla kątów $\pi + \alpha$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto

4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wybrane wzory redukcyjne do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach z przedziału $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.
- stosuje wybrane wzory redukcyjne do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych.
- stosuje wybrane wzory redukcyjne do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Wzory redukcyjne dla kątów $\pi + \alpha$" i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych". Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Wzory redukcyjne dla kątów $\pi + \alpha$”.