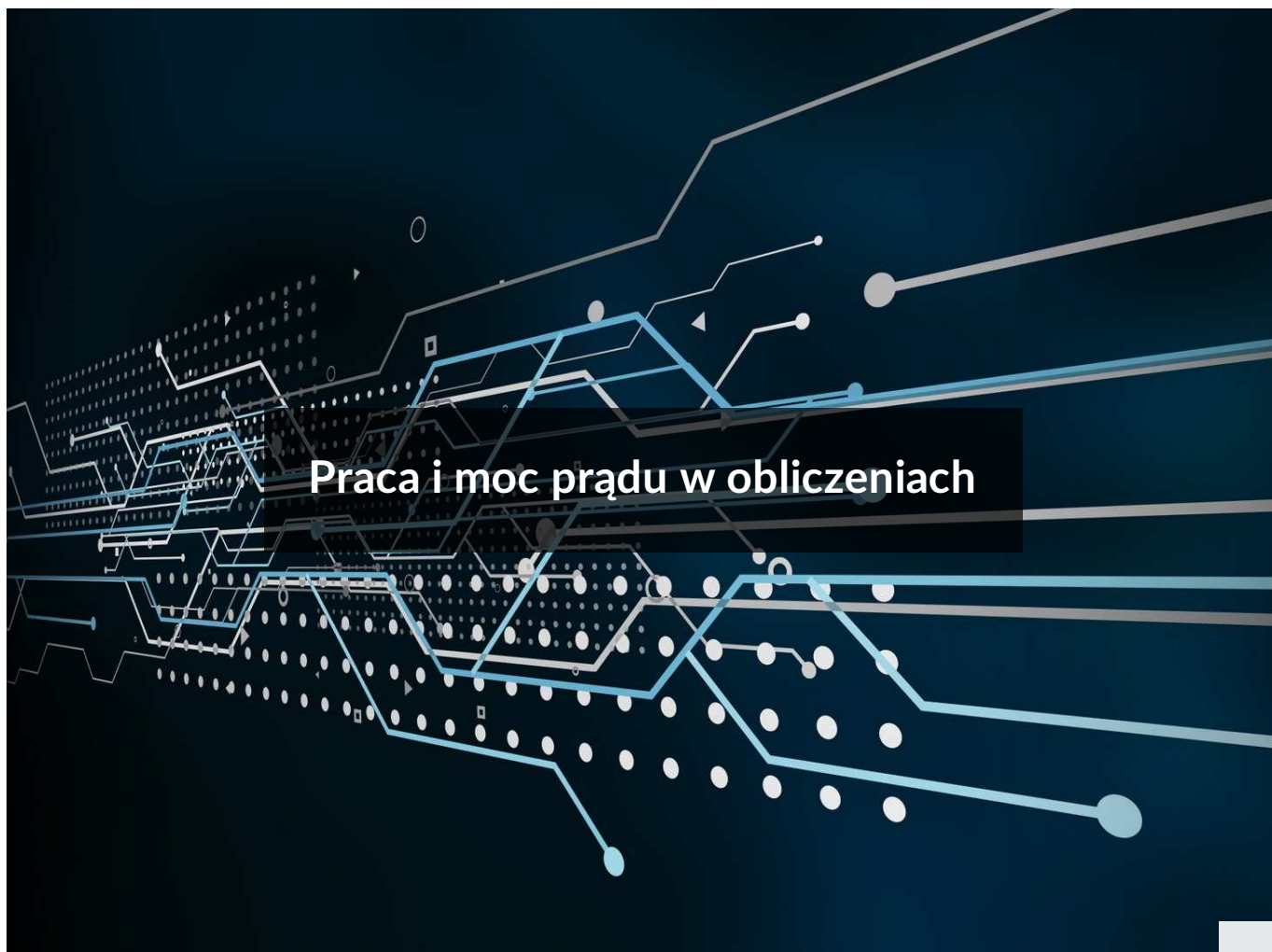




Praca i moc prądu w obliczeniach

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Praca i moc prądu w obliczeniach

Czy to nie ciekawe?

Tak naprawdę, z pracą i mocą prądu elektrycznego mamy do czynienia na co dzień, tylko nie zawsze zdajemy sobie z tego sprawę. E-materiał, który masz przed sobą, służy zgłębieniu tych zagadnień. I to w ciekawy sposób, między innymi z pomocą gry edukacyjnej. Zapraszamy!



Rys. a. Hulajnogi elektryczne różnią się mocą i pracą, jaką mogą wykonać. Warto zawczasu znać ich parametry, by uniknąć przykrych niespodzianek.

Twoje cele

- przypomnisz sobie wiedzę dotyczącą wszystkich najważniejszych zjawisk zachodzących w związku z przepływem prądu w obwodzie elektrycznym (prawa Ohma, praw Kirchhoffa, łączenia równoległego i szeregowego odbiorników);
- nauczysz się rozwiązywać zadania dotyczące pracy i mocy prądu elektrycznego,
- dowiesz się, jak obliczyć sprawność urządzenia elektrycznego.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Naszym zadaniem w tym materiale jest przedstawienie sposobów rozwiązywania zadań dotyczących pracy i mocy prądu elektrycznego. Przypomnijmy więc sobie te dwa pojęcia.

W materiale „Jak definiujemy moc wydzieloną na oporniku?” wyprowadzono wzór wyrażający moc prądu elektrycznego, wychodząc od mikroskopowego modelu przepływu prądu oraz posługując się wiadomościami z elektrostatyki, dotyczącymi pracy wykonanej przez ładunki, znajdujące się w polu elektrycznym wytworzonym przez źródło wewnątrz przewodnika. Wzór ten ma postać:

$$P = U \cdot I \quad (1)$$

gdzie P oznacza moc wydzieloną na elemencie obwodu, U – napięcie panujące na jego końcach, a I – natężenie przepływającego przez niego prądu elektrycznego.

Moc w fizyce, w odniesieniu do wszystkich jej działów, zdefiniowana jest jako szybkość wykonywania pracy przez układ. Mówiąc inaczej, moc P , to ilość pracy W wykonanej w jednostce czasu t :

$$P = \frac{W}{t} \quad (2)$$

Do obliczeń będzie nam potrzebne także [prawo Ohma](#), o którym piszemy w materiale „Jaką zależność opisuje prawo Ohma?”. Ma ono postać:

$$I = \frac{U}{R} \quad (3)$$

R oznacza w tym wzorze opór elektryczny przewodnika lub układu przewodników.

Rozwiązując zadania, będziemy także korzystali z reguł szeregowego i równoległego łączenia odbiorników oraz z [praw Kirchhoffa](#).

Oto kilka typowych przykładów zadań dotyczących pracy i mocy prądu elektrycznego. Jeśli je poznasz i zrozumiesz, nie będziesz mieć problemów podczas egzaminów i prac klasowych dotyczących tego tematu.

Podstawowe parametry urządzeń elektrycznych

Najczęściej podawanym parametrem urządzenia elektrycznego jest jego moc P . Jeśli jest ono przeznaczone do użytku w domu lub w biurze, trzeba pamiętać, że napięcie U sieci elektrycznej wynosi 230 V. Dysponując tymi danymi można obliczyć:

- natężenie płynącego przez urządzenie prądu elektrycznego (co wynika ze wzoru (1)):

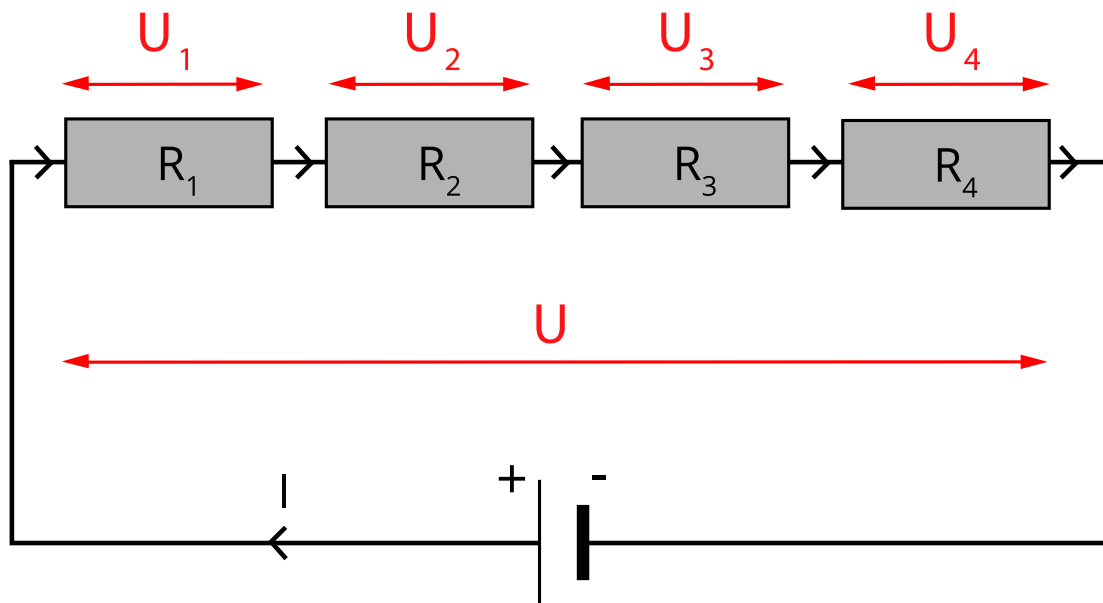
$$I = \frac{P}{U} \quad (4)$$

- opór elektryczny tego urządzenia (po skorzystaniu z prawa Ohma (3)):

$$R = \frac{U^2}{P} \quad (5)$$

Moc urządzeń połączonych szeregowo lub równolegle

Rozważmy układ kilku odbiorników połączonych szeregowo tak, jak na Rys. 1.



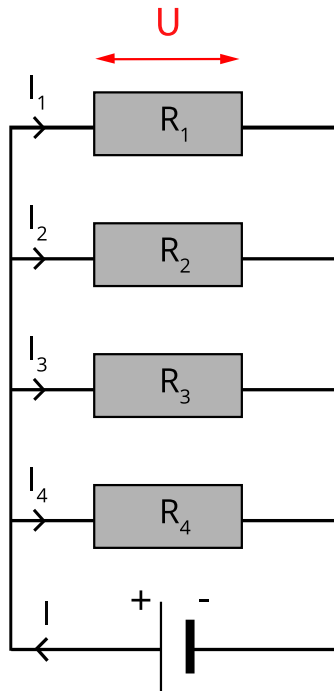
Rys. 1. Odbiorniki połączone szeregowo.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Przez każdy z nich przepływa prąd o takim samym natężeniu, a napięcie na końcach całego układu jest sumą napięć na każdym z nich. Możemy więc napisać:

$$P_{całk} = U \cdot I = (U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \cdot I = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad (6)$$

Sprawdźmy, jaka będzie moc całkowita układu odbiorników połączonych równolegle (Rys. 2.).



Rys. 2. Odbiorniki połączone równolegle.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

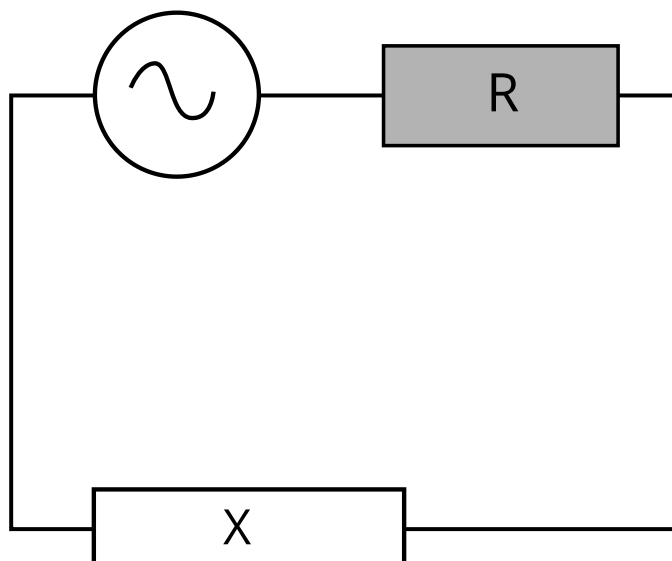
Na wszystkich panuje to samo napięcie, a prądy przepływające przez każdy z nich sumują się. Wobec tego:

$$P_{całk} = U \cdot I = U \cdot (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad (7)$$

Wyciągamy z tego wniosek, że moc wydzielona układzie odbiorników jest równa sumie mocy wydzielonej na każdym z nich, bez względu na sposób ich połączenia.

Maksymalna moc wydzielana na odbiorniku prądu

Rozważmy obwód taki, jak na Rys. 3.



Rys. 3. Odbiornik o oporze X z opornikiem zabezpieczającym o wartości R .

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Założmy, że opór wewnętrzny źródła jest pomijalnie mały, a wartość oporu zabezpieczającego R wynosi $10\ \Omega$. Dla jakiej wartości oporu odbiornika X moc wydzielona na nim będzie największa?

Moc tę obliczymy przekształcając równanie (5):

$$P = I^2 X \quad (8)$$

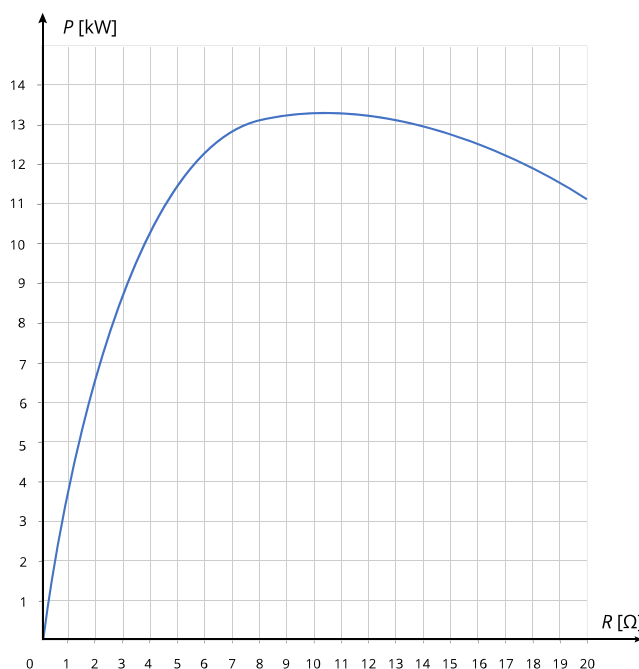
Natężenie prądu I można wyznaczyć zapisując bilans napięć w obwodzie (II prawo Kirchhoffa):

$$U = IR + IX \quad (9)$$

Po wyznaczeniu I i wstawieniu do (8) otrzymujemy wzór na moc odbiornika, zależną od jego oporu X :

$$P(X) = \frac{U^2 X}{(R + X)^2} \quad (10)$$

Zbadanie przebiegu zmienności tej funkcji w celu znalezienia maksimum nie jest łatwe, a możliwość jego wykonania zależy od tego, jakie tematy zostały już przerobione przez Ciebie na lekcjach matematyki. Jeżeli potrafisz policzyć pochodną – zrób to. Jeśli nie, wykreśl jej wykres za pomocą dowolnej służącej do tego strony internetowej lub programu komputerowego. Rezultat widzisz na Rys. 4.



Rys. 4. Wykres zależności mocy wydzielanej na odbiorniku od jego oporu, wyrażonej równaniem (10).

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Maksimum mocy P przypada dla oporu X równego $10\ \Omega$, czyli takiego, jak opór pozostałej części obwodu. Odpowiedzią na nasze pytanie jest więc:

$$X_{P_{\max}} = R \quad (11)$$

Praca mechaniczna wykonywana przez urządzenia elektryczne oraz ich sprawność

Urządzenia elektryczne konstruuje się zazwyczaj po to, by wykonywały jakąś pracę. Wartość pracy, jaką wykonuje prąd elektryczny, możemy obliczyć wykorzystując wzory (1) i (2):

$$W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t \quad (12)$$

Musimy jednak pamiętać, że nie jest możliwe, by całą tę pracę, bez żadnych strat, zamienić na inny rodzaj energii. Każde urządzenie charakteryzuje się sprawnością η , którą określamy wzorem:

$$\eta = \frac{W_{\text{wyjściowa}}}{W_{\text{wejściowa}}} 100\% = \frac{W_{\text{użyteczna}}}{W_{\text{pobrana}}} 100\% = \frac{P_{\text{użyteczna}}}{P_{\text{pobierana}}} 100\% \quad (13)$$

Aby ułatwić zrozumienie tego pojęcia, zapisaliśmy wzór używając różnych nazw oraz różnych wielkości fizycznych: pracy i mocy.

Ostatecznie otrzymujemy: urządzenie elektryczne wykonuje pracę mechaniczną o wartości:

$$W_{\text{mech}} = \eta \cdot U \cdot I \cdot t \quad (14)$$

Bilans cieplny przy ogrzewaniu urządzeniami elektrycznymi

Jedną z form energii, na którą można przeznaczyć energię elektryczną jest **przekazywanie ciepła**. Ucząc się termodynamiki dowiedzieliśmy się, że jeżeli ciało o masie m i cieple właściwym C_w zmieni swoją temperaturę o ΔT to znaczy, że przekazano mu ciepło Q o wartości:

$$Q = mC_w\Delta T \quad (15)$$

Otrzymujemy więc pożyteczny wzór do wykorzystania w zadaniach, dotyczących ogrzewania ciał za pomocą urządzeń elektrycznych:

$$mC_w\Delta T = \eta \cdot U \cdot I \cdot t \quad (16)$$

Gdy ciało przechodzi przemianę fazową (np. woda zamienia się w lód lub odwrotnie, woda paruje lub odwrotnie), odbywa się to w stałej temperaturze, dopóki przemiana nie zakończy się. Ciepło potrzebne do dokonania takiej przemiany lub wydzielone podczas jej trwania wynosi:

$$Q = mL \quad (17)$$

gdzie m to masa substancji a L – ciepło przemiany (topnienia, krzepnięcia, skraplania lub parowania), charakterystyczne dla substancji w określonych warunkach. Wzór ten przydaje się także, do wyliczeń analogicznych, jak we wzorze (16).

Słowniczek

przekazywanie ciepła

(ang.: *heat transfer*) – proces przekazywania energii wewnętrznej między ciałami, polegający na zderzeniach chaotycznie poruszających się atomów lub cząsteczek tych ciał.

prawo Ohma

(ang. (*Ohm's law*)) – podstawowe prawo obwodów elektrycznych głoszące, że natężenie prądu I płynącego przez przewodnik jest proporcjonalne do napięcia U przyłożonego do jego końców. Współczynnikiem proporcjonalności jest $\frac{1}{R}$, gdzie R jest tzw. oporem elektrycznym. Zależność tę zapisujemy jako: $I = \frac{U}{R}$.

prawa Kirchhoffa

(ang. *Kirchhoff's circuit laws*) – umożliwiają określenie wartości i kierunków prądów w obwodach elektrycznych. I prawo mówi, że suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła. II prawo mówi, że w zamkniętym obwodzie suma spadków napięć na oporach równa jest sumie sił elektromotorycznych występujących w tym obwodzie.

Film samouczek

Jak wyznaczamy moc maksymalną w obwodzie?

Filmik prezentuje analizę prostego obwodu elektrycznego pod kątem wydzielanej mocy na oporniku zewnętrznym. Masz okazję zobaczyć, jak matematyczne umiejętności pozwolą nam wyznaczyć moc maksymalną.

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2} \Rightarrow$$
$$(r+R)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{P} \Rightarrow R^2 + 2rR + r^2 - \frac{\mathcal{E}^2 R}{P} = 0 \Rightarrow R^2 + \left(2r - \frac{\mathcal{E}^2}{P}\right)R + r^2 = 0$$
$$\Delta = \frac{\mathcal{E}^4}{P^2} - \frac{4r\mathcal{E}^2}{P}$$

R istnieje, o ile $\Delta \geq 0$, czyli jeśli $P \leq \frac{\mathcal{E}^2}{4r} \Rightarrow P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1bXbdZ46bYCX>

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

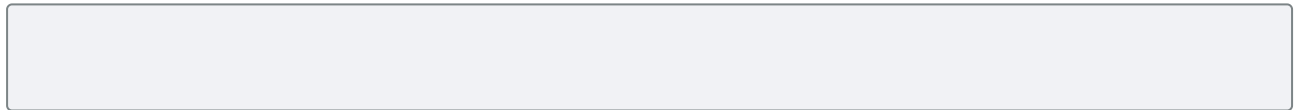
Zapoznaj się z treścią samouczka.

Polecenie 1

Czy moc wydzielaną na oporniku zewnętrznym można maksymalizować względem oporu wewnętrznego źródła?

Polecenie 2

Korzystając z dostępnego oprogramowania graficznego (arkusza kalkulacyjnego, gnuplota, serwisów online do rysowania wykresów) narysuj wykres funkcji dwóch zmiennych $P(r, R)$ dla konkretnej wartości $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, najlepiej w wersji umożliwiającej poruszanie układem współrzędnych za pomocą wskaźnika (np. touchpada/myszy). Obejrzyj kształt linii ustalonego r i zmiennego R oraz linii ustalonego R i zmiennego r .



Dla zainteresowanych

Prostsza i chyba bardziej przejrzystą metodą znalezienia maksymalnej mocy jest przepisanie zależności $P(R)$ z pomocą zmiennych bezwymiarowych, a następnie badanie pewnej funkcji liniowej i kwadratowej - wyłącznie graficzne. Zauważmy, że

$$P(R) = \frac{\mathcal{E}^2}{r} \frac{x}{(1+x)^2},$$

gdzie przez x oznaczyliśmy R/r . Zajmijmy się na razie tylko częścią zawierającą x . Widać, że dla dowolnego dodatniego x na pewno nie przewyższa ona 1, a dla bardzo dużych x dąży do zera. Pierwsze z oszacowań można poprawić. Jeśli chcemy znaleźć liczbę s taką, że

$$\forall x \geq 0 : \frac{x}{(1+x)^2} \leq s,$$

to jest to równoważne znalezieniu takiego s , że

$$\forall x \geq 0 : (1+x)^2 \geq \frac{1}{s} x.$$

Wykonaj rysunek z wykresem lewej strony nierówności. Jest to parabola o wierzchołku w punkcie $(-1; 0)$ i przechodząca przez punkt $(0; 1)$ (ale i tak ograniczamy się do nieujemnych x). Po prawej stronie nierówności mamy funkcję liniową o wyrazie wolnym równym zero i współczynniku kierunkowym równym $1/s$. Nasza nierówność będzie optymalna, gdy linia prosta będąca wykresem

prawej strony nierówności będzie dokładnie w jednym punkcie styczna do wykresu lewej strony. Sprawdź (przyprowadzając do zera wyróżnik odpowiedniego równania kwadratowego, że ma to miejsce dla $s = 1/4$ i dla $x = 1$, jeśli pominąć nieciekawą przykłąd funkcji stałej równej zero (co odpowiada nieskończonemu s). Stąd

$$P(R) \leq \frac{\mathcal{E}^2}{4r},$$

co zgadza się z wynikiem otrzymanym w filmiku metodą bezpośrednią. Możemy więc zapisać badaną zależność w taki sposób

$$P(x) = 4P_{\max} \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ile wynosi moc użyteczna ładowarki do telefonu, której wyjściowe natężenie prądu wynosi 2A. Napięcie w standardzie USB, używanym w ładowarkach, wynosi 5 V.

☐ 10 kW

☐ 2,5 Ω

☐ 10 W

☐ 2,5 W

Ćwiczenie 2



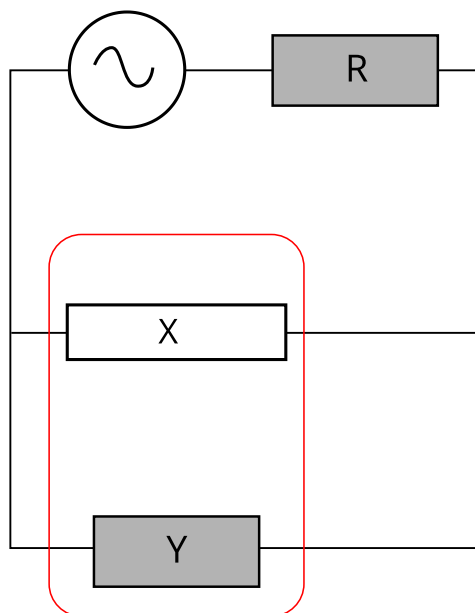
Moc znamionowa grzałki wynosi 1 kW. Przewody domowej instalacji elektrycznej, które do niej prowadzą mają opór równy 1 Ω . Jaka moc faktycznie wydziela się na tej grzałce? Odpowiedź podaj z dokładnością do 3 cyfr znaczących.

$P_r =$ W.

Ćwiczenie 3



Wskaż wszystkie prawidłowe stwierdzenia dotyczące obwodu przedstawionego poniżej. Załóż, że opór wewnętrzny źródła ma pomijalnie małą wartość.

☐

Jeżeli $X = R$, to dołączenie oporu Y spowoduje zwiększenie mocy wydzielanej na układzie oporników X i Y .

☐

Jeżeli $Y = \infty$, to moc wydzielana na oporze X jest największa, gdy $X = R$.

☐

Jeżeli $X = R$, to dołączenie oporu Y spowoduje zmniejszenie mocy wydzielanej na układzie oporników X i Y .

☐

Jeżeli $X = R$, to dołączenie oporu Y nie spowoduje zmiany mocy wydzielanej na układzie oporników X i Y .

Ćwiczenie 4



Klasa energetyczna lodówek EEI wprowadzona dyrektywą Unii Europejskiej, to stosunek rocznego (czyli przez 365 dni) zużycia energii przez tę lodówkę do standardowego, określonego w przepisach, rocznego zużycia energii przez urządzenie chłodnicze (SAE_C) pomnożony przez 100. Najmniejsza wartość EEI dla klasy A++ wynosi 22. Ułóż wzór na średnie natężenie prądu płynącego przez lodówkę o takiej wartości EEI, jeżeli (SAE_C) dla tej klasy urządzeń wynosi 500 kWh/rok, a lodówka pracuje w Polsce. Oblicz to natężenie z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

	kWh/rok ·	
$I =$		· 1000 = mA
	· dni · h · V	

- 55
- 365
- 100
- 24
- 230
- EEI
- SAE_C

Ćwiczenie 5



Pokazana na zdjęciu dźwignica podnosi ładunki za pomocą bloku ruchomego, którego łańcuch nawijany jest na bęben o promieniu $r = 25 \text{ cm}$, poruszany przez silnik o sprawności $\eta = 90\%$, zasilany z sieci o napięciu $U = 230 \text{ V}$. Oblicz natężenie prądu przepływającego przez silnik, jeśli masa m podnoszonego ładunku wynosi jedną tonę, a bęben obraca się z częstotliwością $f = 0,5 \text{ Hz}$. Obliczenia wykonaj przy założeniu braku siły tarcia łańcucha, bębna i bloka, z dokładnością do 2 cyfr znaczących. Załóż $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/photos/crane-cargo-industry-dock-harbour-2654996/> [dostęp 12.07.2022].

$I =$ A.

Ćwiczenie 6



Uczniowie chcą wyznaczyć wartość ciepła właściwego wody za pomocą zwykłego czajnika o mocy 1250 W, podgrzewając w nim litr wody od temperatury 30 °C do 40 °C i szacując straty ciepła na 20%. Czas podgrzewania wynosił 42 s. Jaką wartość ciepła właściwego wody otrzymali uczniowie?

$$C_w = \boxed{} \frac{J}{kg \cdot K}$$

Ćwiczenie 7



W celu wyznaczenia oporu skomplikowanego układu elektrycznego, podłączono do niego szeregowo opornik o wartości $R = 100 \, \Omega$ i wyznaczono, że moc wydzielana na tym oporniku wynosi P . Następnie opornik zamieniono na taki, którego opór jest dwa razy większy i stwierdzono, że wydzielana na nim moc jest $n = \frac{9}{8}$ razy większa, niż poprzednio. Oblicz opór układu elektrycznego.

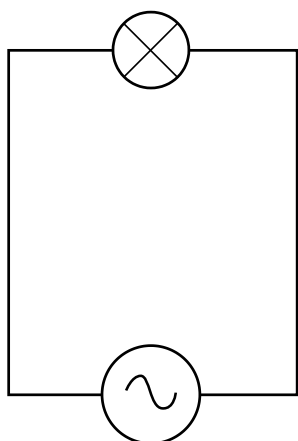
$$R_X = \boxed{} \, \Omega.$$

Ćwiczenie 8

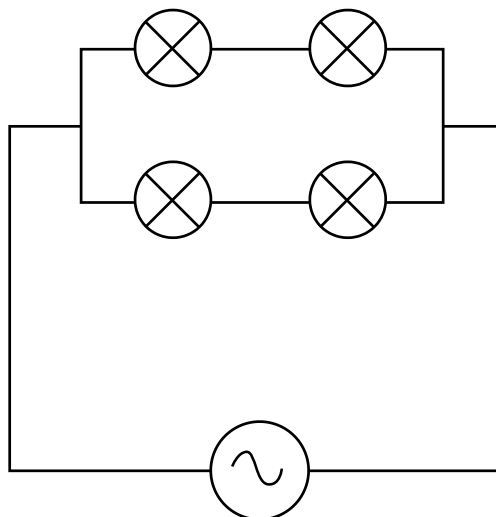


Na rysunku poniżej przedstawiono dwa obwody, podłączone do takich samych źródeł o napięciu 230 V. W obu obwodach zastosowano identyczne żarówki. Czy moc wydzielona w obu obwodach będzie jednakowa? Uzasadnij odpowiedź i porównaj z naszym rozwiązaniem.

1)



2)



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Tomasz Sobiepan
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Praca i moc prądu w obliczeniach
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem. VIII. Prąd elektryczny. Uczeń: 8) stosuje do obliczeń związek mocy wydzielonej na oporniku (ciepła Joule’a-Lenza) z natężeniem prądu i oporem oraz napięciem i oporem.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. podaje wzory na pracę i moc prądu elektrycznego, 2. oblicza sprawność urządzeń elektrycznych, 3. rozwiązuje zadania z zakresu pracy i mocy prądu elektrycznego.
Strategie nauczania:	gamifikacja
Metody nauczania:	metoda decyzyjna

Formy zajęć:	praca w grupach
Środki dydaktyczne:	gra edukacyjna, zestaw zadań
Materiały pomocnicze:	e-materiał: „Praca i moc prądu w obliczeniach”
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Uzgodnienie z uczniami celów do osiągnięcia na lekcji. Przed lekcją, w ramach powtórzenia wiadomości, uczniowie powinni zapoznać się z częścią „Warto przeczytać”. Na lekcji nauczyciel podczas dyskusji sprawdza stopień zrozumienia tekstu przez uczniów. Nauczyciel dzieli klasę na 3-osobowe grupy i wyjaśnia reguły gry.	
Faza realizacyjna:	
Gra polega na zgromadzeniu jak największej liczby punktów przez grupę. Pierwszym etapem jest przejście przez każdego ucznia gry edukacyjnej na czas. Nauczyciel zapisuje wyniki w kolejności malejącej, dzieli uczniów na 4 równe grupy pod względem liczby wyników (wyznacza kwartyle) i przydziela każdemu z nich 1, 2, 3 lub 4 punkty, które wchodzi jako kapitał początkowy do jego grupy. Następnie zespoły przystępują do rozwiązywania zadań w określonym czasie. Za każde prawidłowe rozwiązanie grupa otrzymuje 5 punktów. Za błędne rozwiązanie grupa traci 3 pkt. Za jednorazowe skorzystanie z tekstu „Warto przeczytać” trzeba „zapłacić” 1 pkt. Grupy mogą też podpowiadać sobie nawzajem ustalając swoje własne ceny transakcji wyrażone w przekazywanych sobie punktach. Jeżeli grupa skorzysta z zamieszczonego rozwiązania, otrzymuje 1 pkt. za to zadanie. Wygrywa ta grupa, która zgromadzi najwięcej punktów. Nauczyciel pełni rolę arbitra podczas gry.	
Faza podsumowująca:	
Nauczyciel podsumowuje wyniki gry na lekcji i zapowiada pracę domową. Ostateczne rozstrzygnięcie zapadnie na następnej lekcji. Uczniowie odnoszą się do postawionych sobie celów lekcji, ustalają, które osiągnęli, a które wymagają jeszcze pracy, jakiej i kiedy. W razie potrzeby nauczyciel dostarcza im informację zwrotną kształtującą.	
Praca domowa:	
Uczniowie mogą zdobywać dodatkowe punkty wykonując pracę w domu. Prawidłowe rozwiązanie przez każdego ucznia zadania, którego grupa nie zdążyła rozwiązać na lekcji i przysyłanie rozwiązania (nie samego wyniku) nauczycielowi mailem w ciągu dwóch dni jest nagradzane dopisaniem 2 pkt dla grupy.	

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium	Gra edukacyjna może być wykorzystana jako podsumowanie wiadomości na koniec działu „Prąd elektryczny” lub jako wprowadzenie do omówienia sposobów rozwiązywania zadań.
---	--