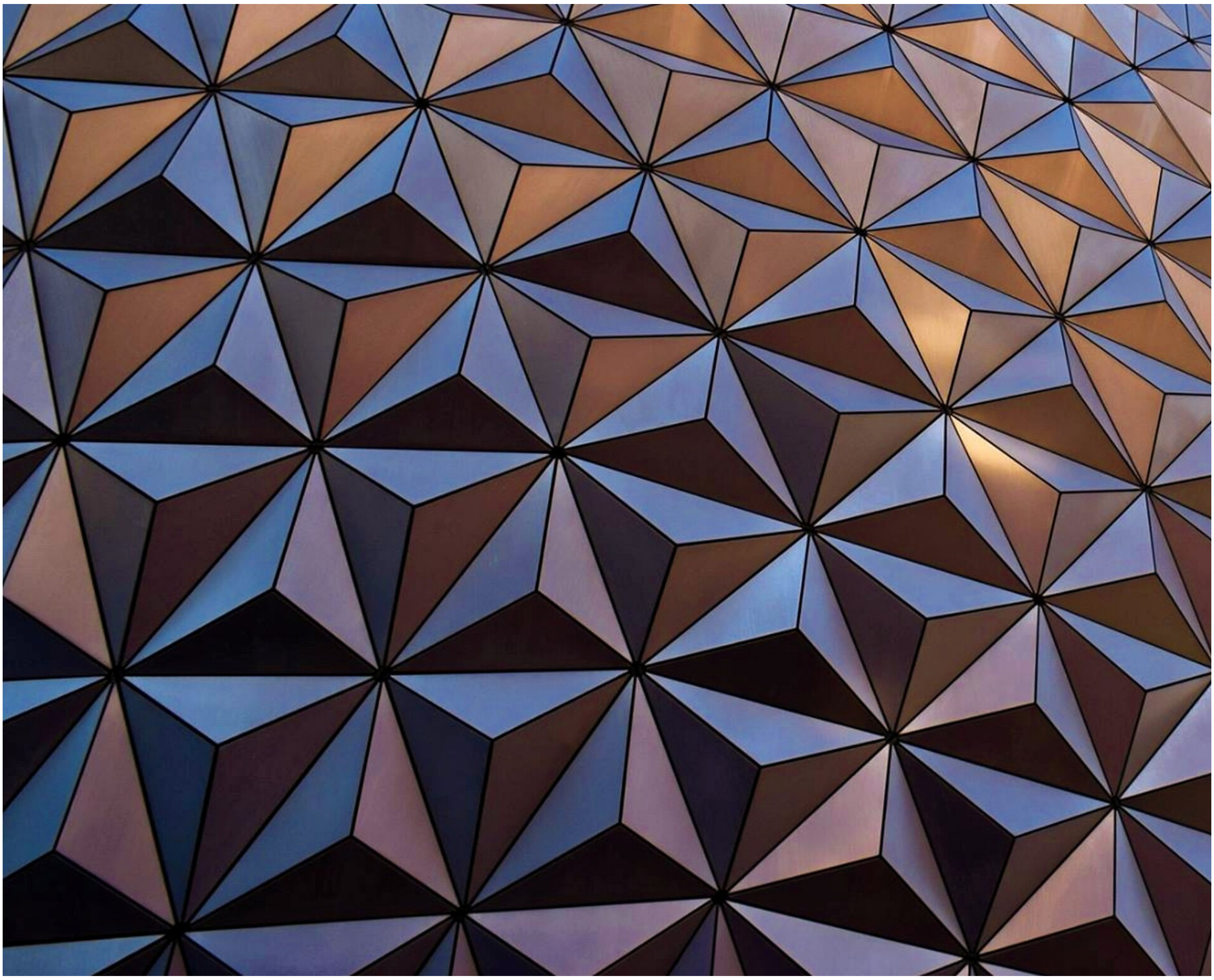
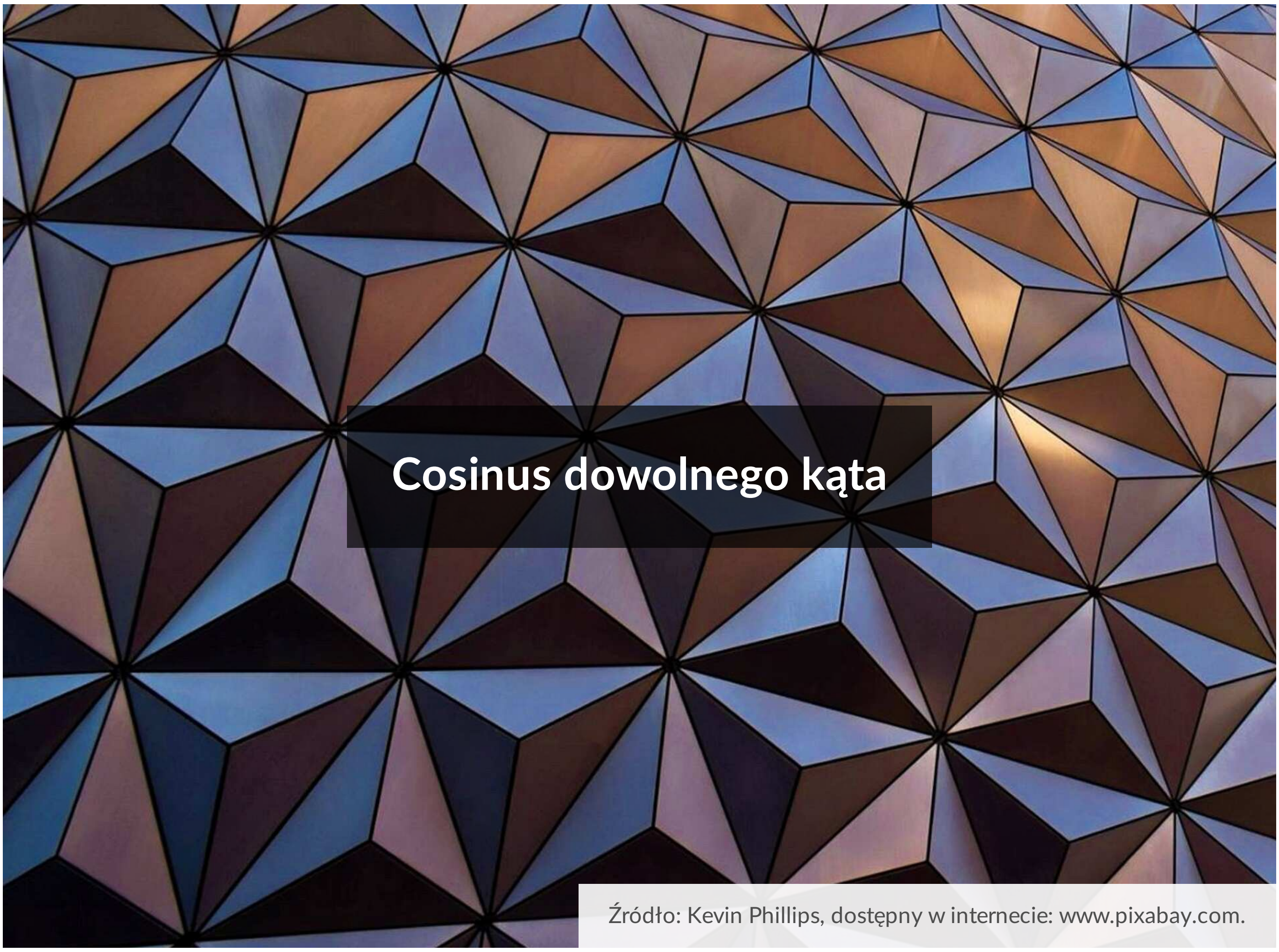


Cosinus dowolnego kąta



Cosinus dowolnego kąta

Źródło: Kevin Phillips, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

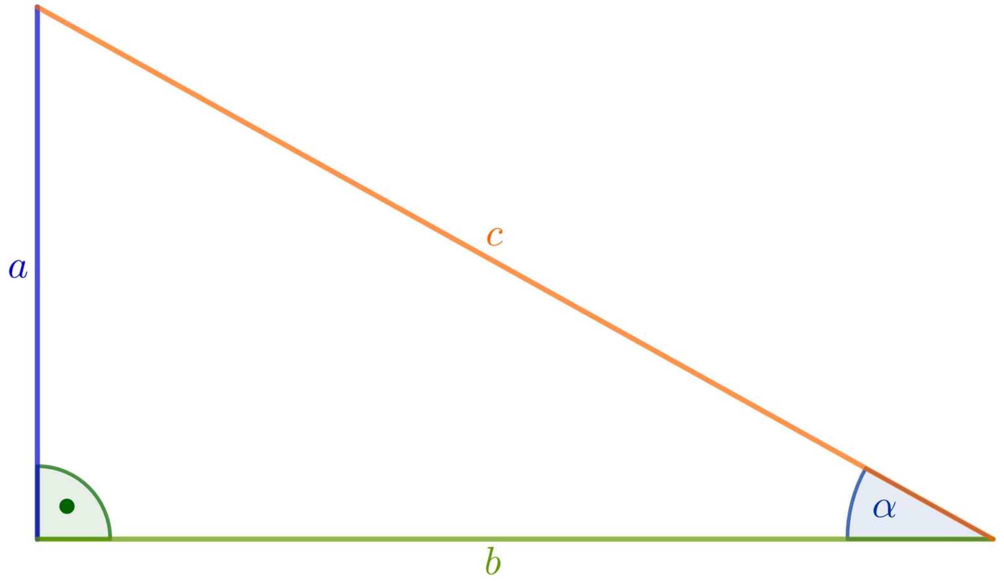
Znasz już definicje związków trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym oraz definicję funkcji sinus dla kąta skierowanego umieszczonego w układzie współrzędnych. W praktyce oznacza to, że potrafisz obliczyć sinus, cosinus, tangens i cotangens kąta o mierze od 0 do 90 stopni oraz sinus kąta o dowolnej mierze. W tym rozdziale zajmiemy się kolejną z funkcji trygonometrycznych. Poznasz definicję funkcji cosinus dla kąta skierowanego umieszczonego w układzie współrzędnych.

Twoje cele

- Obliczysz cosinus wielokrotności kąta prostego.
- Obliczysz cosinus dowolnego kąta.
- Wyznaczysz miarę kąta znając wartość jego cosinusa.

Przeczytaj

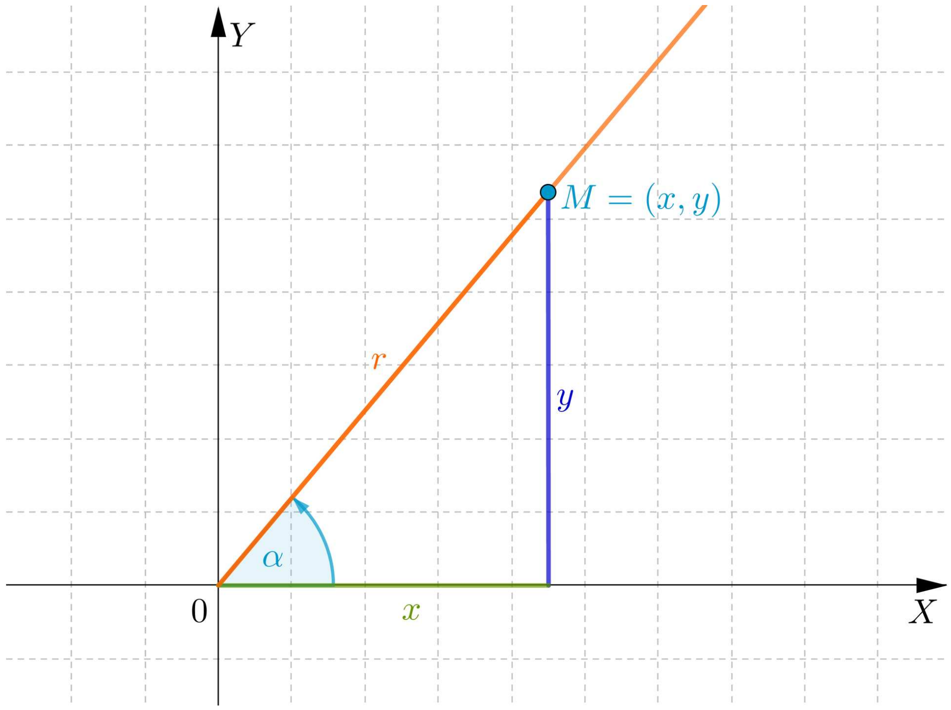
Przypomnijmy najpierw, że cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym to stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej, czyli przy oznaczeniach jak na rysunku $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.



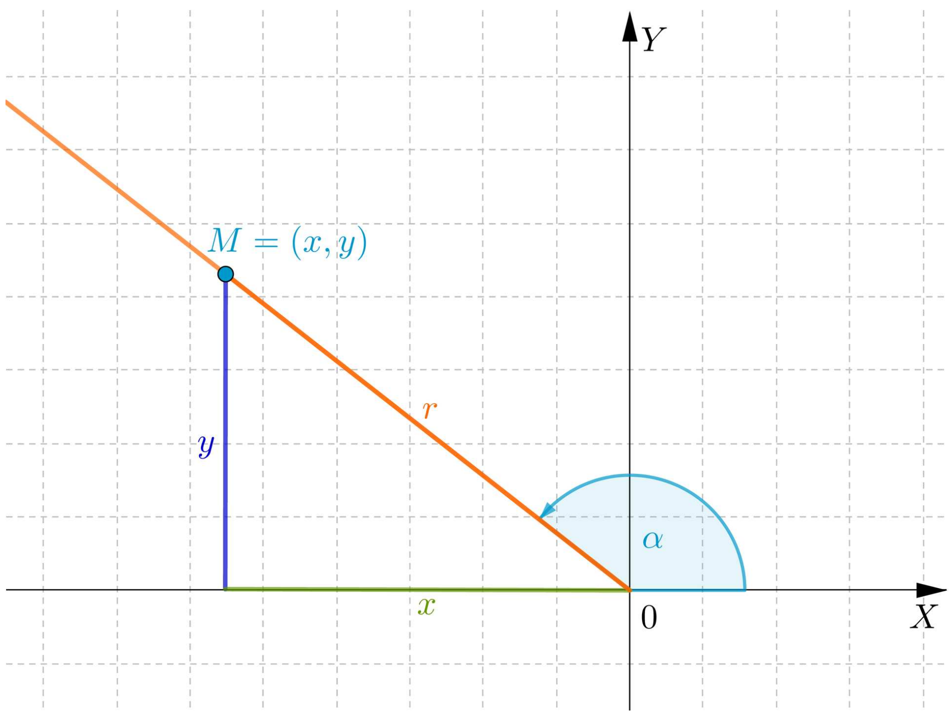
Jeżeli umieścimy dowolny kąt skierowany w prostokątnym układzie współrzędnych w położeniu standardowym (czyli wierzchołkiem w punkcie $(0, 0)$ tak, aby jedno ramię pokrywało się z osią X) i wybierzemy na drugim ramieniu tego kąta punkt M o współrzędnych(x, y), to otrzymamy trójkąt prostokątny.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że taka definicja ma sens wówczas, gdy α jest kątem zarówno ostrym, jak i rozwartym (a nawet wklęsłym). Nie istnieje trójkąt prostokątny, którego jednym z kątów jest α.

Zauważmy, że jeśli kąt jest ostry, to długości przyprostokątnych są równe współrzędnym punktu M. Wówczas $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i r jest promieniem wodzącym punktu M.



Na przykład jeśli α jest kątem rozwartym – jak na rysunku obok, to nadal $\cos\alpha$ możemy obliczyć jako iloraz pierwszej współrzędnej punktu M przez promień wodzący tego punktu. Zatem $\cos\alpha = \frac{x}{r}$.



Przykład 1

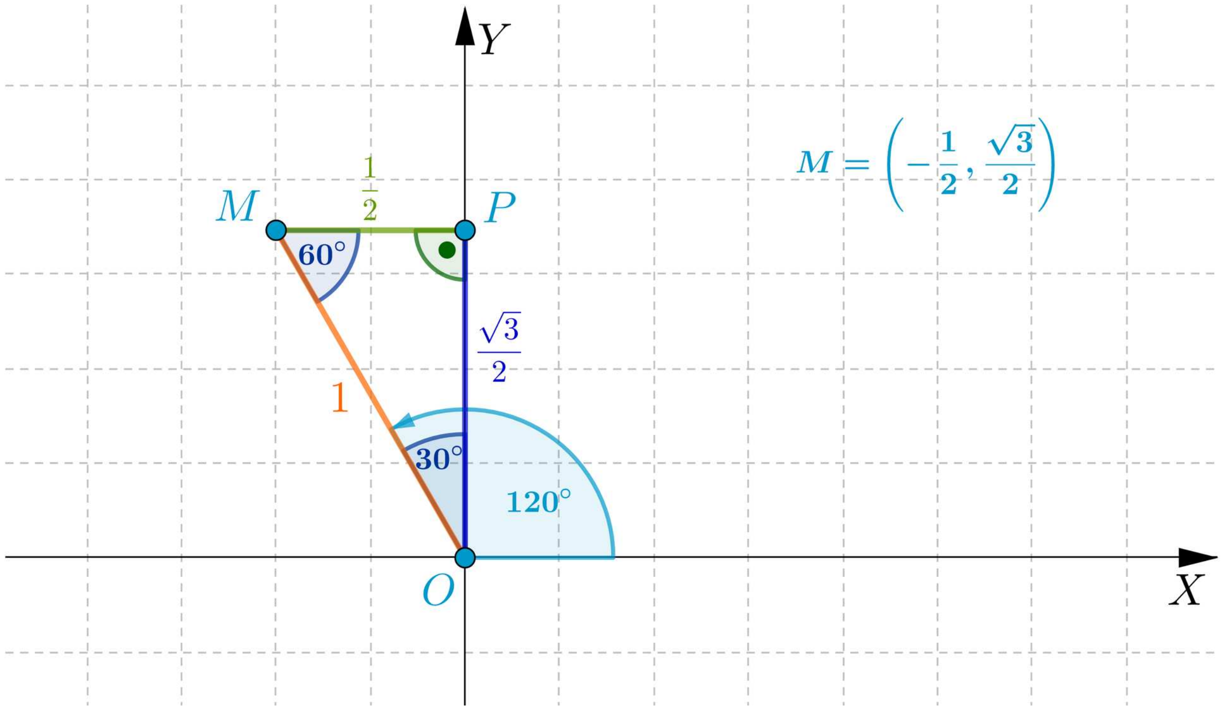
Oblicz:

a) $\cos 120^\circ$
b) $\cos 225^\circ$

c) $\cos 330^\circ$

Ad. a)

W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczamy kąt o mierze 120° w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu wybieramy punkt M. Promień wodzący punktu M jest równy 1 (mógłby to być dowolny inny punkt). Wówczas trójkąt MOP jest połową trójkąta równobocznego, a zatem $|MP| = \frac{1}{2}$, $|OP| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wobec tego współrzędne punktu M to $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Zatem $\cos 120^\circ = \left(\frac{-\frac{1}{2}}{1}\right) = -\frac{1}{2}$.



Ad. b)

Ad. c)

W następnym przykładzie rozważymy cosinusy kątów skierowanych ujemnie.

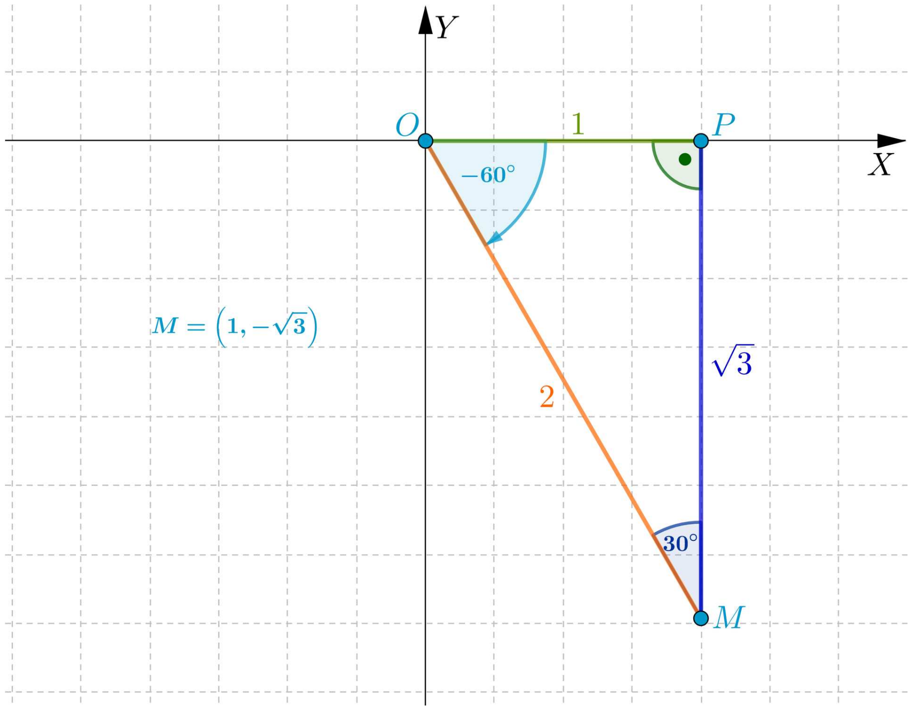
Przykład 2

Oblicz:

a) $\cos(-60^\circ)$
b) $\cos(-150^\circ)$
c) $\cos(-210^\circ)$

Ad. a)

W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczamy kąt o mierze -60° w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu wybieramy punkt M. Niech będzie to punkt, którego promień wodzący jest równy 2. Wówczas trójkąt MOP jest połową trójkąta równobocznego, a zatem $|MP| = \sqrt{3}$, $|OP| = 1$. Wobec tego współrzędne punktu M to $\left(1, -\sqrt{3}\right)$. Zatem $\cos(-60^{\circ}) = \frac{1}{2}$.



Ad. b)

Ad. c)

Ciekawostka

Podobnie jak dla funkcji sinus, tak dla funkcji cosinus istnieją inne definicje niż poznane dotąd. Jedna z nich wykorzystuje nieskończoną sumę zwaną szeregiem **Taylora**. Według tej definicji:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$$

Inna definicja funkcji cosinus wykorzystuje iloczyny nieskończone:

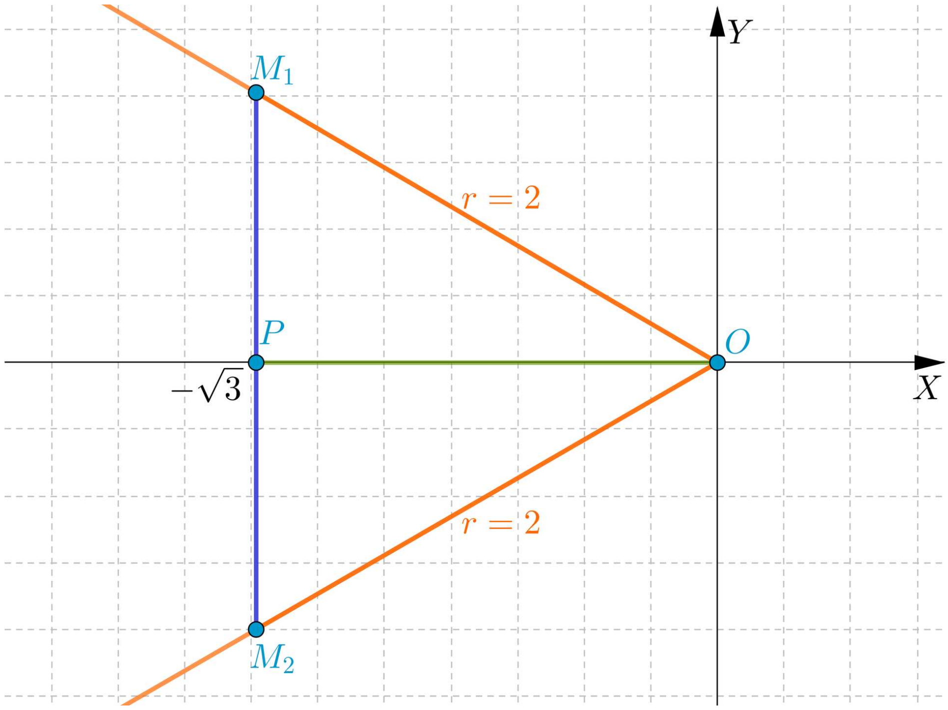
$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2\cdot 1^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2\cdot 3^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2\cdot 5^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2\cdot 7^2}\right)\cdot\ldots$$

Niektóre definicje wykorzystują tzw. **ułamki łańcuchowe** lub **równania różniczkowe**.

Przykład 3

Wyznaczymy miary wszystkich kątów α, dla których $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Z definicji funkcji cosinus mamy $\cos\alpha = \frac{x}{r}$.
W tym przypadku $\frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Ponieważ $r > 0$, to $x = -\sqrt{3}k$ i $r = 2k$ dla pewnej liczby $k > 0$.
Ponieważ możemy wybrać dowolny punkt na drugim ramieniu kąta, więc niech $k = 1$.
Wówczas punkt M ma pierwszą współrzędną równą $-\sqrt{3}$ i jego promień wodzący jest równy 2.



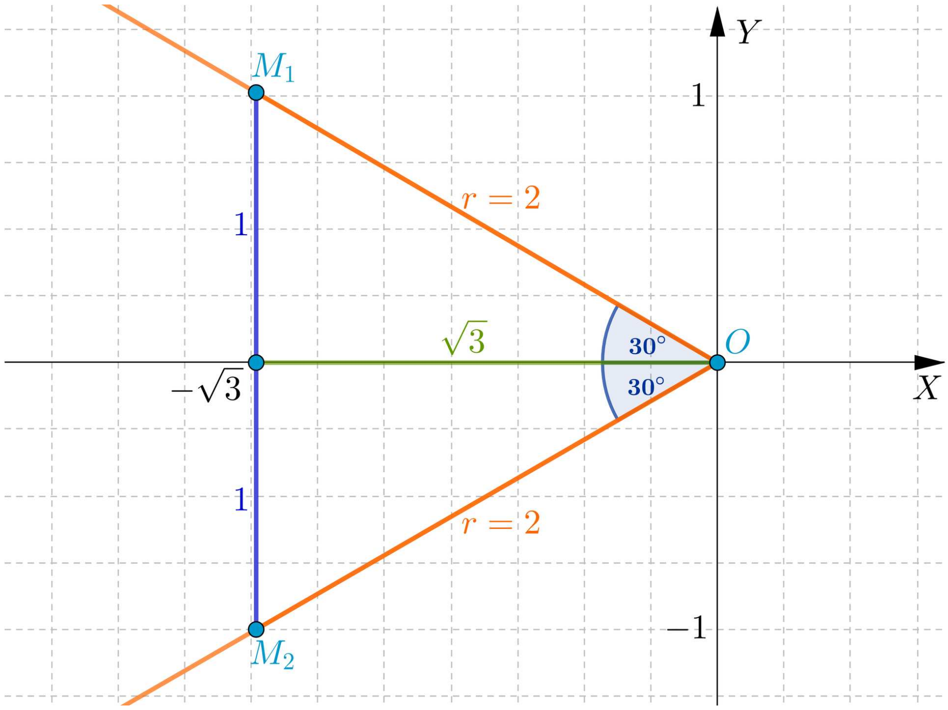
Zauważmy, że są dwa takie punkty: jeden leży w drugiej, a drugi – w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych. Z twierdzenia Pitagorasa możemy wyznaczyć ich odległości od osi X:

$$|MP|^2 + |PO|^2 = |OM|^2$$

$$|MP|^2 + 3 = 4$$

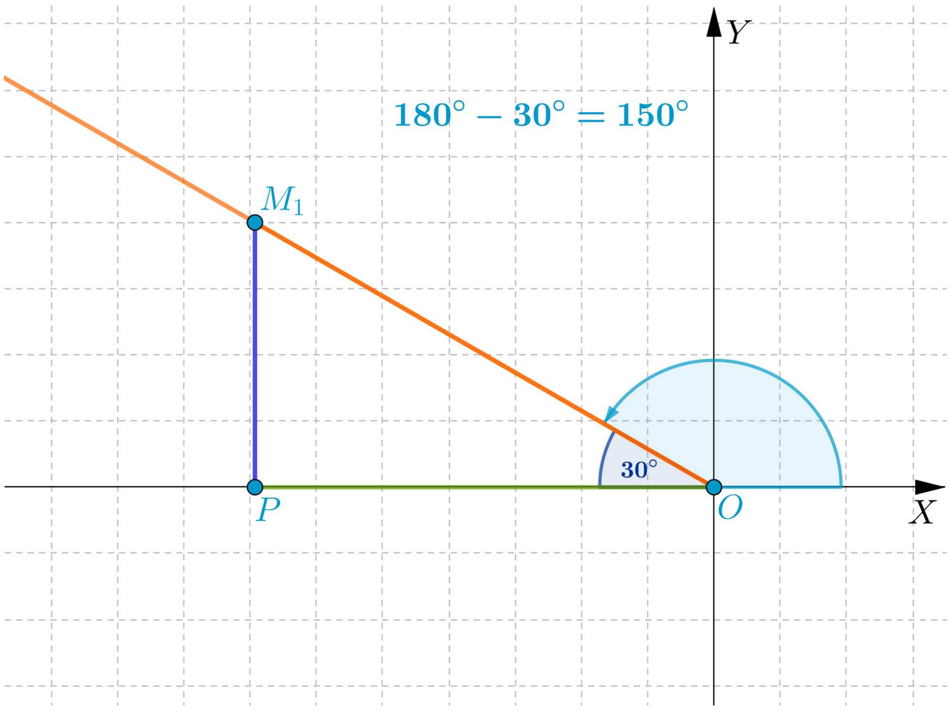
$$|MP|^2 = 1$$

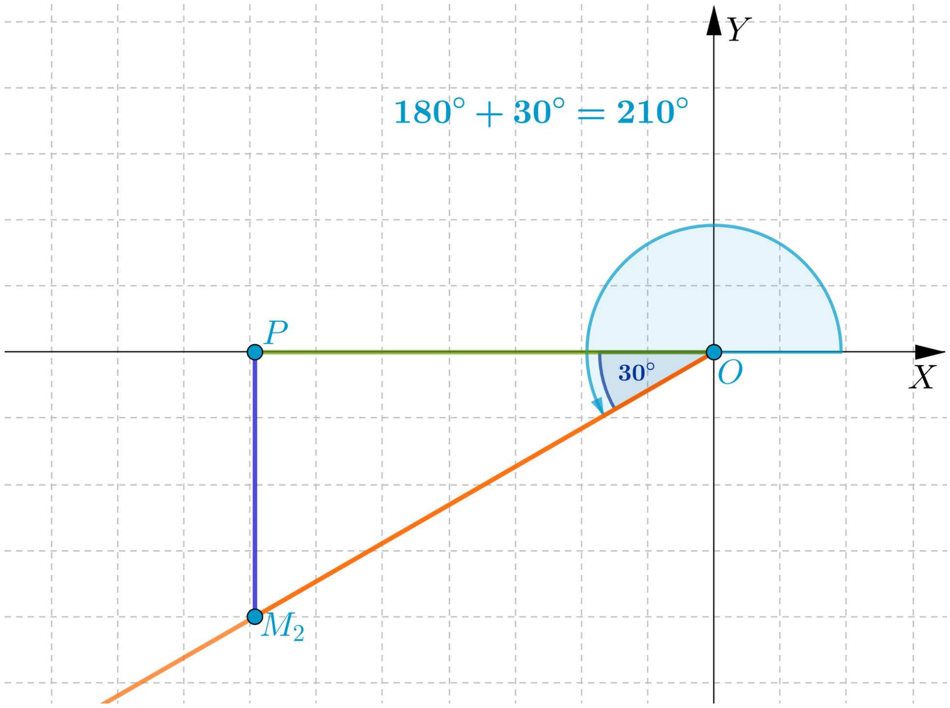
Zatem druga współrzędna punktu M to 1 lub -1. $M_1 = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$ i $M_2 = \left(-\sqrt{3}, -1\right)$.



Wynika stąd, że każdy z trójkątów M_1PO i M_2PO jest połową trójkąta równobocznego. Jednocześnie trójkąt M_1M_2O jest równoboczny.

Zatem szukane kąty mają miary $180^{\circ} - 30^{\circ} = 150^{\circ}$ i $180^{\circ} + 30^{\circ} = 210^{\circ}$.





Zwróćmy jeszcze uwagę, że po obrocie drugiego ramienia kąta o 360° w jedną lub w drugą stronę, ramię znajdzie się w dokładnie tym samym położeniu. Zatem

$$\cos 210^\circ = \cos(210^\circ + 360^\circ) = \cos(210^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos(210^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \ldots$$

i

$$\cos 210^\circ = \cos(210^\circ - 360^\circ) = \cos(210^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \cos(210^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \ldots$$

Stąd wszystkie kąty tej postaci możemy zapisać jako $210^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie k należy do zbioru liczb całkowitych. Ponadto

$$\cos 150^\circ = \cos(150^\circ + 360^\circ) = \cos(150^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos(150^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \ldots$$

i

$$\cos 150^\circ = \cos(150^\circ - 360^\circ) = \cos(150^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \cos(150^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \ldots$$

Stąd wszystkie kąty tej postaci możemy zapisać jako $150^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie k należy do zbioru liczb całkowitych.

Słownik

promień wodzący punktu

odległość punktu od początku układu współrzędnych.

cosinus kąta skierowanego

stosunek odciętej dowolnie wybranego punktu M należącego do drugiego ramienia tego kąta do promienia wodzącego punktu M; definicja wymaga, aby kąt był umieszczony w położeniu standardowym

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Przeanalizuj, jak zmienia się wartość funkcji cosinus dla ustalonego kąta α przy zmianie promienia r wodzącego punktu M na drugim ramieniu kąta. Pamiętaj, że wyliczona w ten sposób wartość funkcji cosinus jest przybliżona.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DztPIp4S6

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

W każdym pytaniu wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi (może ich być więcej niż jedna).

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Cosinus dowolnego kąta

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Obliczysz cosinus wielokrotności kąta prostego.
- Obliczysz cosinus dowolnego kąta.
- Wyznaczysz miarę kąta znając wartość jego cosinusa.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Symulacja interaktywna” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Cosinus dowolnego kąta" oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Symulacja interaktywna". Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się". Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Własności funkcji cosinus

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Symulacja interaktywna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Cosinus dowolnego kąta”.