



Kąt jako miara obrotu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Kąt jako miara obrotu

Źródło: [arifarca](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Używane obecnie jednostki czasu (godzina równa 60 minut i minuta równa 60 sekund) oraz miara kąta (stopień dzieli się na 60 minut a minuta na 60 sekund) pochodzą z sześćdziesiątkowego zapisu liczb stworzonego ponad 4 tysiące lat temu przez Babilończyków.



Zegar

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale określimy kąt jako miarę obrotu. Wprowadzimy również pojęcie kąta skierowanego i jego miary głównej.

Twoje cele

- Poznasz pojęcie kąta skierowanego.
- Wyznaczysz miarę główną kąta skierowanego.
- Posłużysz się kątem jako miarą obrotu przy rozwiązywaniu zadań.

Przeczytaj

Aby określić miarę kąta, należy zdefiniować kąt jednostkowy, a następnie stwierdzić, ile razy kąt jednostkowy mieści się w danym kącie. Przypomnijmy podstawowe informacje dotyczące miary stopniowej kąta.

Miara stopniowa

Kąt pełny ma 360 równych części zwanych stopniami; 1 stopień to $\frac{1}{360}$ część kąta pełnego. Stopnie dzielimy na minuty ($1^\circ = 60'$) minuty na sekundy ($1' = 60''$).

W mierze stopniowej:

- kąt zerowy ma miarę $\alpha = 0^\circ$;
- kąt ostry ma miarę $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$;
- kąt prosty ma miarę $\alpha = 90^\circ$;
- kąt rozwarty ma miarę $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$;
- kąt półpełny ma miarę $\alpha = 180^\circ$;
- kąt wklęsły ma miarę $\alpha \in (180^\circ; 360^\circ)$;
- kąt pełny ma miarę $\alpha = 360^\circ$.

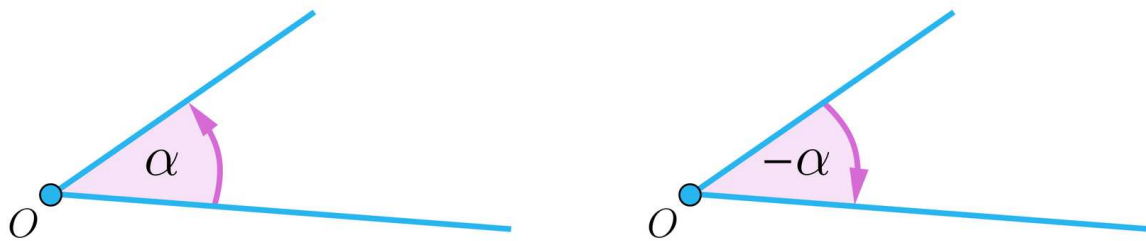
Kąty, o których wspominaliśmy wyżej, mają miary z przedziału $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$.

Liczby, np. 2330° , (-6320°) , 1260° nie były miarami żadnych kątów.

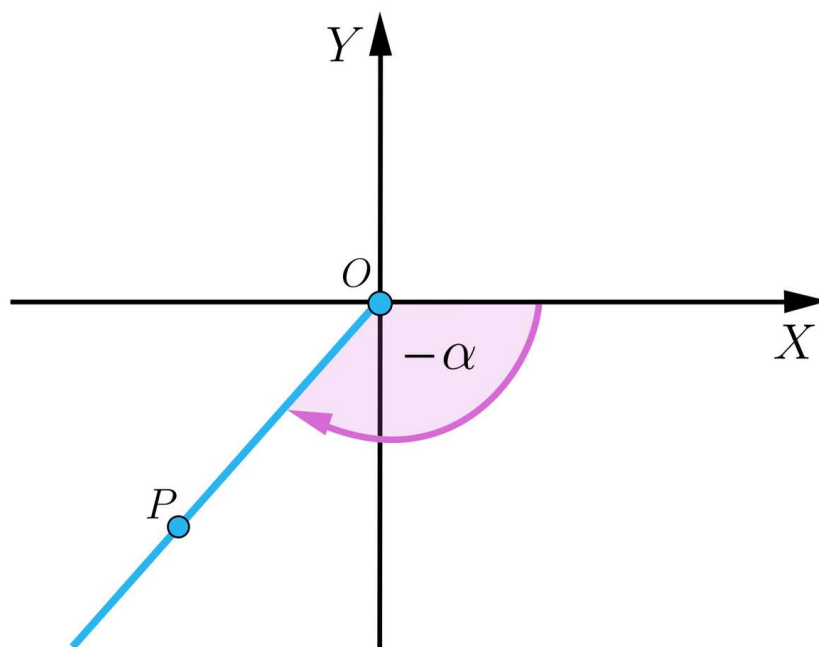
Rozszerzamy więc pojęcie kąta, wprowadzając kąt jako miarę obrotu.

Kąt jako miara obrotu

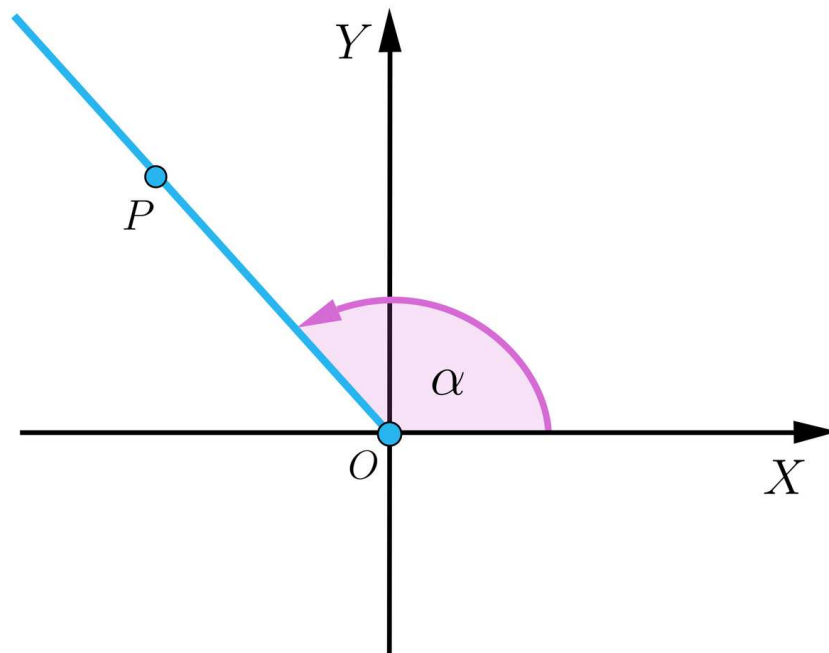
Kąt płaski, którego jedno ramię wyróżniamy jako początkowe, a drugie jako końcowe, nazywamy kątem skierowanym. **Kąt skierowany** otrzymujemy przez obrót na płaszczyźnie półprostej o początku w punkcie O . Obrót dookoła punktu O może odbywać się w dwóch kierunkach. Kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara przyjmujemy za dodatni, kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara przyjmujemy za ujemny.



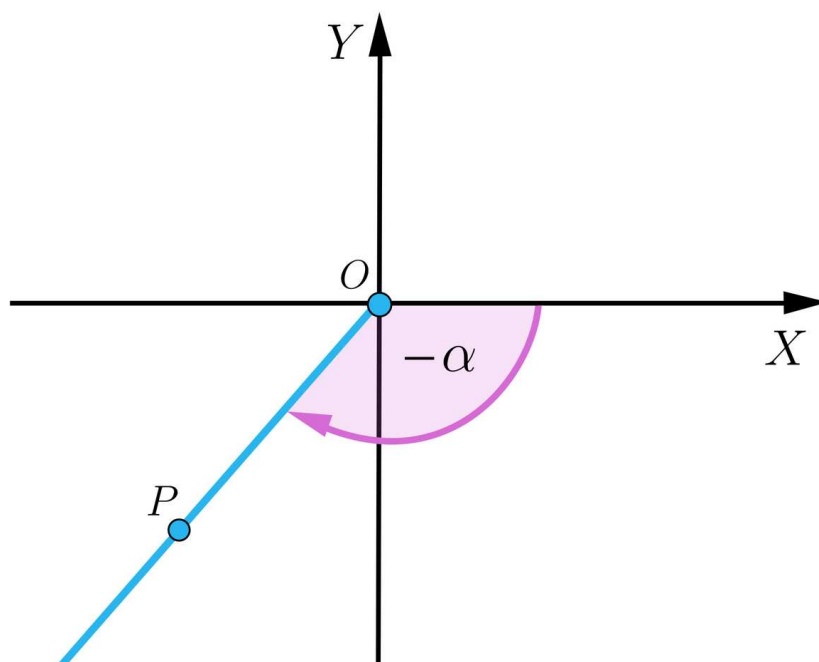
Niech α będzie kątem skierowanym. Wybierzmy układ współrzędnych XOY tak, aby wierzchołek kąta α był początkiem tego układu a dodatnia półoś X początkowym ramieniem kąta skierowanego. Półprosta OP jest ramieniem końcowym kąta skierowanego.



Przyjmujemy, że miara kąta skierowanego jest liczbą **dodatnią**, gdy półprosta OP zakreśliła kąt w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara:



Przyjmujemy, że miara kąta skierowanego jest liczbą **ujemną**, gdy półprosta OP zakreśliła kąt w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara:



Półprostą OP możemy obrócić całkowitą ilość razy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i dodatkowo jeszcze o kąt ostry α .

Każdy całkowity obrót to obrót o 360° . Jeżeli wykonano k obrotów, to półprosta zakreśliła kąt: $k \cdot 360^\circ + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Gdy półprostą OP obrócimy całkowitą ilość razy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i dodatkowo jeszcze o kąt ostry α , to przy k pełnych obrotach półprosta

zakreśli kąt: $-k \cdot 360^\circ - \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

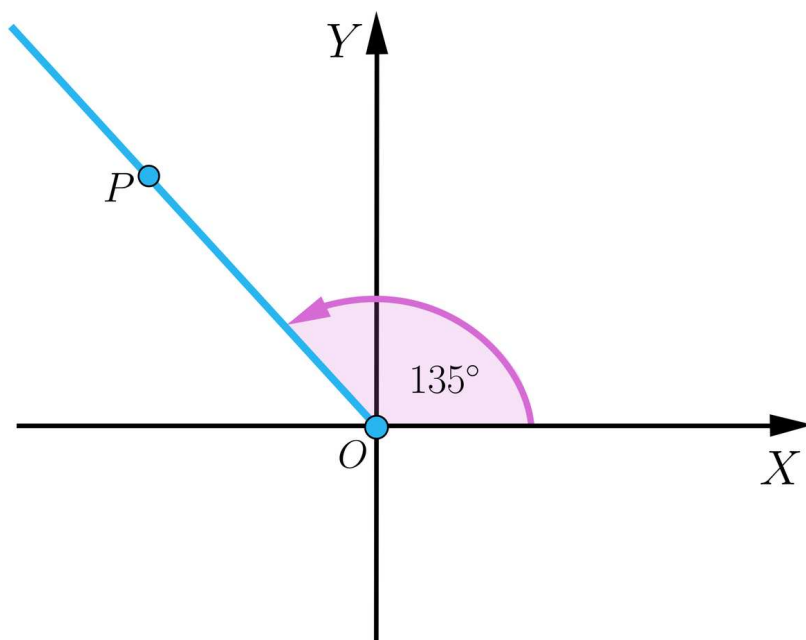
Każdy kąt o mierze stopniowej można przedstawić w postaci: $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ i $k \in \mathbb{Z}$.

Kąt $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ i $k \in \mathbb{Z}$, jest miarą pełnych obrotów półprostej OP wokół punktu O i obrotu o kąt α (w kierunku: zgodnym z ruchem wskazówek zegara, gdy $k < 0$, a w przeciwnym, gdy $k > 0$). Ramiona kąta $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, pokrywają się z ramionami kąta α , więc kąty te możemy ze sobą utożsamiać.

Przykład 1

Narysujemy kąt o mierze 135°

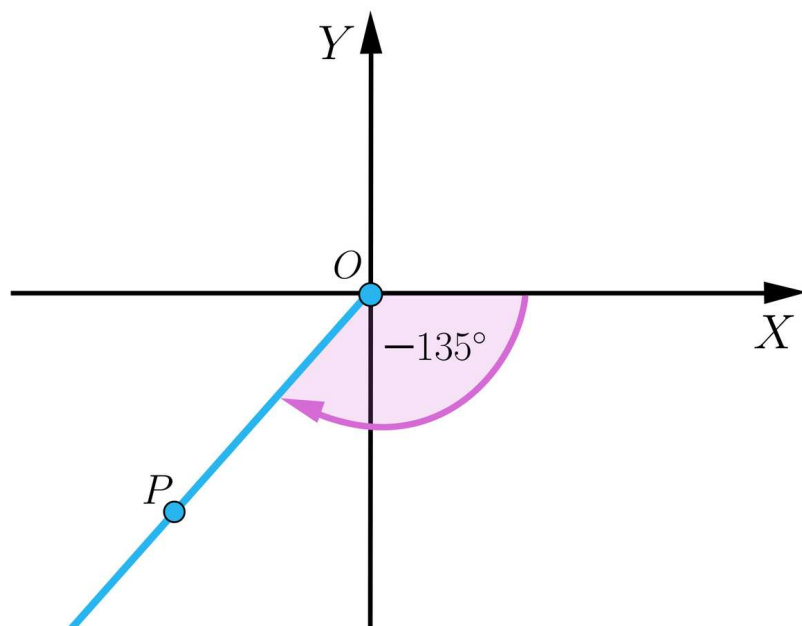
Rozwiązanie



Przykład 2

Narysujemy kąt o mierze (-135°) .

Rozwiązanie



Przykład 3

Przedstawimy kąty o miarach 1100° i (-1060°) w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$ i $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązanie

$$1100^\circ = 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ + 20^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 20^\circ$$

$$-1060^\circ = -360^\circ + -360^\circ + (-360^\circ) + 20^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 20^\circ$$

Zauważmy, że miarę kąta 20° możemy traktować jako resztę z dzielenia liczb 1100° i (-1060°) przez 360° .

Przykład 4

Sprawdzimy, czy:

- ramiona kąta o mierze 930° pokrywają się z ramionami kąta o mierze 210° .
- ramiona kąta o mierze (-1560°) pokrywają się z ramionami kąta o mierze 70° .

Rozwiązanie

- $930^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 210^\circ$, zatem ramiona kąta o mierze 930° pokrywają się z ramionami kąta o mierze 210° .
- $-1560^\circ = -5 \cdot 360^\circ + 240^\circ$, zatem ramiona kąta o mierze (-1560°) nie pokrywają się z ramionami kąta o mierze 70° .

Przykład 5

Wyznamy miarę kąta, jaki wskazówka minutowa zegara zakreśliła od godziny 14^{30} do 18^{40} .

Rozwiązanie

Zgodnie z określeniem kąta skierowanego wskazówki zegara zakreślają kąty o mierze będącej liczbą ujemną

Wskazówka minutowa w ciągu godziny zakreśla kąt (-360°) , a w ciągu minuty kąt:
 $(-360^\circ) : 60 = -6^\circ$.

Od godziny 14^{30} do 18^{40} minęły 4 godziny i 10 minut.

Obliczamy miarę kąta, jaki zakreśliła wskazówka minutowa:

$$4 \cdot (-360^\circ) + 10 \cdot (-6^\circ) = -1440^\circ - 60^\circ = -1500^\circ$$

Odp. Wskazówka minutowa zegara od godziny 14^{30} do 18^{40} zakreśliła kąt o mierze (-1500°) .

Przykład 6

Obliczymy, którą godzinę wskaże zegar, jeżeli o 8^{15} jego wskazówkę minutową obrócimy o kąt:

- a. $\alpha = -90^\circ$;
- b. $\alpha = 90^\circ$.

Rozwiązanie

a. W czasie 1 godziny wskazówka minutowa zakreśla kąt o mierze 360° , czyli w ciągu minuty zakreśla kąt o mierze $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$.

$-90^\circ = 0 \cdot (-360^\circ) + 15 \cdot (-6^\circ)$, zatem miara tego kąta odpowiada 15 minutom.

Obróciliśmy wskazówkę minutową o kąt $\alpha = -90^\circ$, więc zakreśliliśmy kąt zgodnie z ruchem wskazówek zegara: dodajemy 15 minut do 8^{15} .

Odp. Zegar wskaże godzinę 8^{30} .

b. Zauważmy, że $90^\circ = 0 \cdot 360^\circ + 15 \cdot 6^\circ$, zatem miara tego kąta odpowiada również 15 minutom.

Obróciliśmy wskazówkę minutową o kąt $\alpha = 90^\circ$, więc zakreśliliśmy kąt przeciwnie do ruchu wskazówek zegara: odejmujemy 15 minut od 8^{15} .

Odp. Zegar wskaże godzinę 8^{00} .

Przykład 7

Określmy miarę kąta, o jaki obróci się Ziemia wokół własnej osi w ciągu 5 godzin.

Rozwiązanie

Ruch obrotowy Ziemi to obrót Ziemi wokół własnej osi. Czas jednego obrotu wynosi 23 godziny 56 minut i 4 sekundy. Dla obliczeń czasu przyjmuje się dobę 24-godzinną. Ruch

obrotowy Ziemi odbywa się z zachodu na wschód. Patrząc z rzutu na biegun północny, Ziemia porusza się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, zatem miara zakreślonego przez nią kąta jest liczbą dodatnią.

Jeżeli Ziemia wykonuje pełen obrót: 360° w ciągu 24-godzinnej doby, to w ciągu 1 godziny zakreśla kąt $360^\circ : 24 = 15^\circ$, czyli w ciągu 5 godzin: $15^\circ \cdot 5 = 75^\circ$.

Odp. W ciągu 5 godzin Ziemia obróci się wokół własnej osi o kąt o mierze 75° .

Miara główna kąta skierowanego

Definicja: miara główna kąta skierowanego

Najmniejszą nieujemną miarę kąta skierowanego nazywamy miarą główną tego kąta.

Ponieważ każdy kąt skierowany możemy zapisać w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ i $k \in \mathbb{Z}$, to **miarą główną** tego kąta jest α . Miara główna kąta $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$.

Przykład 8

Wyznamy miarę główną kątów skierowanych o miarach 1358° oraz (-890°) .

Rozwiązanie

Zauważmy, że $1358^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 278^\circ$, zatem miarą główną tego kąta jest $\alpha = 278^\circ$.

Wyznamy teraz miarę główną kąta (-685°) . Mamy zatem: $-685^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 35^\circ$, co oznacza, że miarą główną tego kąta jest $\alpha = 35^\circ$.

Przykład 9

Obliczmy różnicę miar głównych kątów o miarach (-600°) oraz 1505° .

Rozwiązanie

Wyznamy najpierw miary główne kątów (-600°) oraz 1505° :

$-600^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 120^\circ$, zatem miara główna tego kąta wynosi $\alpha_1 = 120^\circ$,

$1505^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 65^\circ$, zatem miara główna tego kąta wynosi $\alpha_2 = 65^\circ$.

Ostatecznie: $\alpha_1 - \alpha_2 = 120^\circ - 65^\circ = 55^\circ$.

Przykład 10

Miara kąta β wynosi 1958° , zaś kąt $\gamma \in (-2000^\circ; -1800^\circ)$. Miara główna kąta β jest o 39° mniejsza od miary głównej kąta γ . Wyznamy miarę kąta γ .

Rozwiązanie

Wyznamy miarę główną α kąta β : $1958^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 158^\circ$, zatem $\alpha = 158^\circ$.

Miara główna kąta γ wynosi więc: $\alpha_2 = 158^\circ + 39^\circ = 197^\circ$.

Skoro $\gamma \in (-2000^\circ; -1800^\circ)$, to $\gamma = -6 \cdot 360^\circ + 197^\circ = -1963^\circ$.

Słownik

kąt skierowany

para uporządkowanych półprostych o wspólnym początku, z których pierwszą nazywamy ramieniem początkowym, a drugą ramieniem końcowym kąta skierowanego. Ramię początkowe kąta skierowanego to dodatnia półoś X . Ramię końcowe kąta skierowanego to półprosta o początku w punkcie O

miara główna kąta skierowanego

najmniejsza nieujemna miara kąta skierowanego

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą kąt jako miarę obrotu. Następnie rozwiąż zadania.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Co69qob>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej kątów jako miar obrotu.

Polecenie 2

Przedstaw kąty: 2400° i (-456°) w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$ i $k \in \mathbb{Z}$




Polecenie 3

Którą godzinę wskaże zegar, jeżeli o 14^{45} jego wskazówkę minutową obrócimy o kąt:

a. 762° ,

b. (-762°) .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąt jako miara obrotu

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się miarą stopniową kąta,
- zna definicję kąta skierowanego,
- traktuje kąt jako miarę obrotu,
- wykorzystuje kąt skierowany do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pokaz multimedialny,
- stacje zadaniowe,

- praca pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca całego zespołu,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- rzutnik multimedialny,
- karty pracy,
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji

Nauczyciel na wcześniejszych zajęciach informuje uczniów, że zajęcia będą prowadzone metodą stacji zadaniowych i określa jak będzie wyglądała praca na lekcji.

Przed lekcją:

1. Nauczyciel przygotowuje stacje zadaniowe – stoliki, na których znajdują się zadania do rozwiązania (na podstawie przykładów z sekcji Przeczytaj i ćwiczeń interaktywnych). Ilość miejsc przy stoliku powinna być taka, aby mogło przy nim pracować kilku uczniów.

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie przypominają miarę stopniową kąta.
2. Nauczyciel podaje temat lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie oglądają animację.
2. W kolejności określonej przez nauczyciela, uczniowie przechodzą do stacji i rozwiązują zadania.
3. Uczeń nie musi odwiedzić wszystkich stacji – nauczyciel określa minimalną ilość stacji.
4. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują na kartach pracy przygotowanych przez nauczyciela.
5. Nauczyciel czuwa nad przebiegiem lekcji, kontroluje czas, wyjaśnia wątpliwości uczniów.
6. Po 20 minutach uczniowie kończą pracę przy stacjach zadaniowych.
7. Uczniowie sprawdzają poprawność rozwiązań poprzez porównanie z rozwiązaniami w sekcji Przeczytaj lub zapytanie nauczyciela.
8. Na forum całej klasy omawiają poprawność wykonanych zadań.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę uczniów

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

- [Mierzenie kątów](#)
- [Przypomnienie wiadomości o kątach](#)
- [Kąty i ich rodzaje](#)

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać przy utrwaleniu wiadomości i rozwiązaniu ćwiczeń interaktywnych.