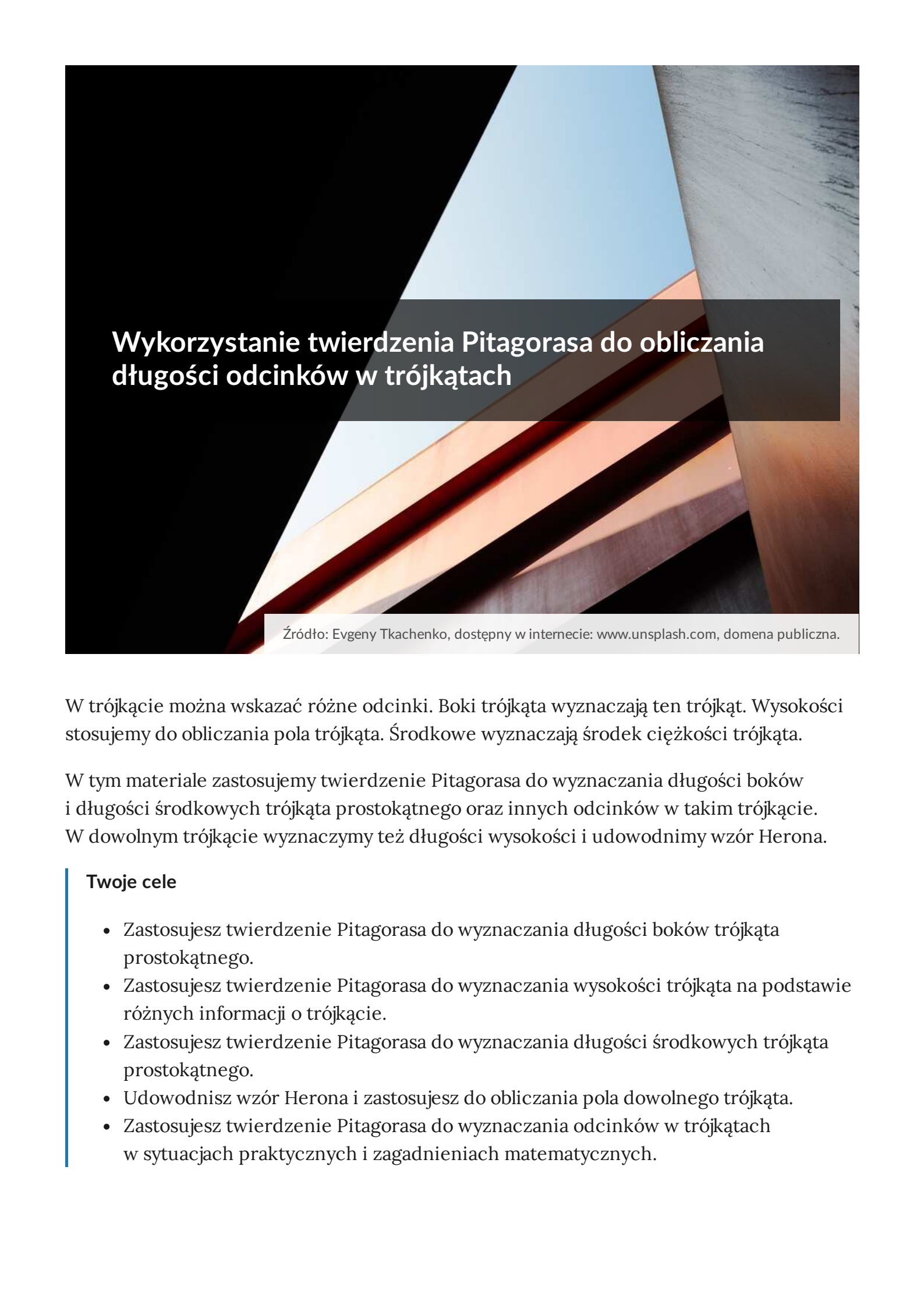




Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania długości odcinków w trójkątach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania długości odcinków w trójkątach

Źródło: Evgeny Tkachenko, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

W trójkącie można wskazać różne odcinki. Boki trójkąta wyznaczają ten trójkąt. Wysokości stosujemy do obliczania pola trójkąta. Środkowe wyznaczają środek ciężkości trójkąta.

W tym materiale zastosujemy twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania długości boków i długości środkowych trójkąta prostokątnego oraz innych odcinków w takim trójkącie. W dowolnym trójkącie wyznaczymy też długości wysokości i udowodnimy wzór Herona.

Twoje cele

- Zastosujesz twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania długości boków trójkąta prostokątnego.
- Zastosujesz twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania wysokości trójkąta na podstawie różnych informacji o trójkącie.
- Zastosujesz twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania długości środkowych trójkąta prostokątnego.
- Udowodnisz wzór Herona i zastosujesz do obliczania pola dowolnego trójkąta.
- Zastosujesz twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania odcinków w trójkątach w sytuacjach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Twierdzenie: Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie Pitagorasa mówi, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c zachodzi następująca równość:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Twierdzenie to pozwala na wyznaczenie długości boku, jeśli znamy długości dwóch pozostałych. Wzór na kwadrat długości przeciwprostokątnej podany jest w twierdzeniu Pitagorasa. Proste przekształcenie równości Pitagorasa daje nam wzory na kwadraty długości przyprostokątnych:

$$a^2 = c^2 - b^2,$$

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Aby uzyskać długości tych odcinków, należy wyznaczyć pierwiastki z ich kwadratów.

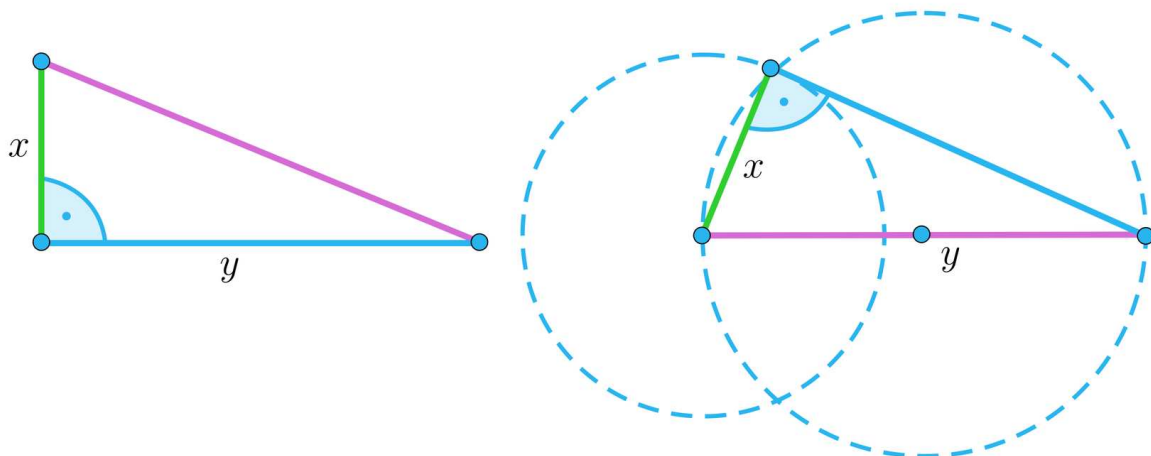
Przykład 1

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 37, a jedna z przyprostokątnych ma długość 35. Wyznamy długość drugiej przyprostokątnej.

Rozwiązanie

$$a^2 = c^2 - b^2 = 37^2 - 35^2 = 144, \text{ więc } a = \sqrt{144} = 12.$$

Jeżeli mamy dwa boki $x \leq y$ trójkąta prostokątnego, to żeby wyznaczyć trzeci bok, musimy wiedzieć jaką rolę pełnią te boki w trójkącie. Na rysunku mamy dwa różne trójkąty prostokątne zbudowane z odcinków x , y .



Przykład 2

Trójkąt prostokątny ma dwa boki długości 8 i 15. Pokażemy, że istnieją dwa trójkąty prostokątne spełniające ten warunek. Wyznamy długość trzeciego boku każdego z nich.

Rozwiązanie

Jeżeli znane boki są przyprostokątnymi, to przeciwprostokątna $c = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.

Jeżeli jeden ze znanych boków jest przeciwprostokątną, to jest to dłuższy bok. Wtedy druga przyprostokątna ma długość $\sqrt{15^2 - 8^2} = \sqrt{161}$.

Przykład 3

Długości boków trójkąta prostokątnego są liczbami całkowitymi opisanymi za pomocą wyrażeń: x , $2x - 10$, $2x - 1$. Wyznamy długości tych boków.

Rozwiązanie

Najpierw przeanalizujemy warunki, jakie powinna spełniać zmienna x .

Ponieważ podane wyrażenia odnoszą się do długości boków, to $x > 0$, $2x - 10 > 0$, więc $x > \frac{10}{2} = 5$ oraz $2x - 1 > 0$, więc $x > \frac{1}{2}$. Stąd $x > 5$.

Założmy, że:

1. odcinek o długości x jest przeciwprostokątną.

$$\text{Wtedy } x^2 = (2x - 10)^2 + (2x - 1)^2 = 4x^2 - 40x + 100 + 4x^2 - 4x + 1.$$

$$-7x^2 + 44x - 101 = 0$$

$$\Delta = 44^2 - 4 \cdot 7 \cdot 101 < 0 - \text{brak rozwiązań.}$$

2. odcinek o długości $2x - 10$ jest przeciwprostokątną.

$$\text{Wtedy } (2x - 10)^2 = x^2 + (2x - 1)^2$$

$$4x^2 - 40x + 100 = x^2 + 4x^2 - 4x + 1$$

$$-x^2 - 36x + 99 = 0$$

$$\Delta = 36^2 + 4 \cdot 99 = 1692$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1692} = 6\sqrt{47}$$

Pierwiastki równania nie są liczbami całkowitymi, bo $\sqrt{\Delta}$ jest liczbą niewymierną, a współczynniki równania są liczbami całkowitymi.

3. odcinek o długości $2x - 1$ jest przeciwprostokątną.

$$\text{Wtedy } (2x - 1)^2 = x^2 + (2x - 10)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 4x^2 - 40x + 100$$

$$-x^2 + 36x - 99 = 0$$

$$\Delta = 36^2 - 4 \cdot 99 = 900$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{900} = 30$$

$$x_1 = \frac{-36-30}{-2} = 33 > 5$$

Długości boków tego trójkąta, to:

$$x = 33$$

$$2x - 10 = 56$$

$$2x - 1 = 65$$

$$x_2 = \frac{-36+30}{-2} = 3 < 5 - \text{nie spełnia wymagań.}$$

Długości boków tego trójkąta są równe: 33, 56, 65.

Przykład 4

Trójkąt prostokątny ma boki długości x , $3x - 10$, $2x - 1$. Wyznaczymy długości tych boków.

Rozwiązanie

Najpierw przeanalizujemy warunki, jakie powinna spełniać zmienna x .

Ponieważ podane wyrażenia odnoszą się do długości boków, to

$$x > 0, 3x - 10 > 0, \text{ więc } x > \frac{10}{3} \text{ oraz } 2x - 1 > 0, \text{ więc } x > \frac{1}{2}. \text{ Stąd } x > \frac{10}{3}.$$

Założmy, że

1. odcinek o długości x jest przeciwprostokątną.

Wtedy

$$x^2 = (3x - 10)^2 + (2x - 1)^2 = 9x^2 - 60x + 100 + 4x^2 - 4x + 1 =$$

$$= 13x^2 - 64x + 101$$

$$-12x^2 + 64x - 101 = 0$$

$$\Delta = 64^2 - 4 \cdot 12 \cdot 101 < 0 - \text{brak rozwiązań.}$$

2. odcinek o długości $3x - 10$ jest przeciwprostokątną.

$$\text{Wtedy } (3x - 10)^2 = x^2 + (2x - 1)^2$$

$$9x^2 - 60x + 100 = x^2 + 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 56x + 99 = 0$$

$$\Delta = 56^2 - 4 \cdot 4 \cdot 99 = 1552$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1552} = 4\sqrt{97}$$

$$x_1 = \frac{56 - 4\sqrt{97}}{2 \cdot 4} = 7 - \frac{\sqrt{97}}{2} < \frac{10}{3} \text{ - nie spełnia wymagań,}$$

$$x_2 = \frac{56 + 4\sqrt{97}}{2 \cdot 4} = 7 + \frac{\sqrt{97}}{2} > \frac{10}{3} \text{ - jest rozwiązaniem.}$$

Długości boków tego trójkąta, to

$$x = 7 - \frac{\sqrt{97}}{2}$$

$$3x - 10 = 11 - \frac{3\sqrt{97}}{2}$$

$$2x - 1 = 13 - \sqrt{97}$$

3. odcinek o długości $2x - 1$ jest przeciwprostokątną. Przeliczenia wykonujemy analogicznie do warunku 2 a długości boków tego trójkąta to:

$$x = \frac{28 + \sqrt{190}}{6}$$

$$3x - 10 = \frac{8 + \sqrt{190}}{2}$$

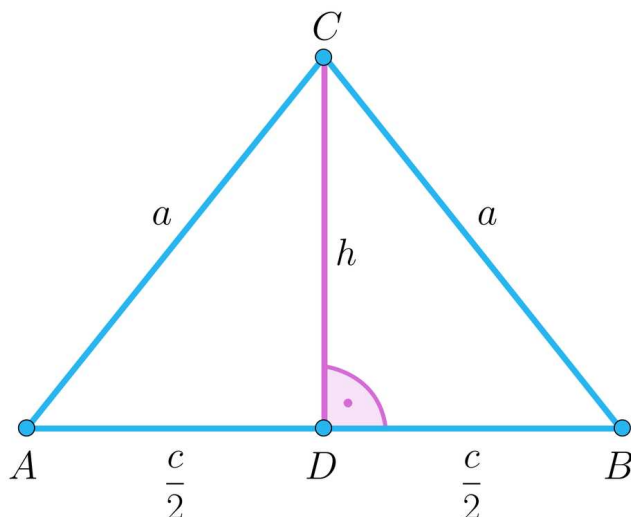
$$2x - 1 = \frac{25 + \sqrt{190}}{3}$$

Zatem długości boków trójkąta wynoszą: $7 - \frac{\sqrt{97}}{2}$; $11 - \frac{3\sqrt{97}}{2}$; $13 - \sqrt{97}$ lub $\frac{28 + \sqrt{190}}{6}$; $\frac{8 + \sqrt{190}}{2}$; $\frac{25 + \sqrt{190}}{3}$

Jednym z najważniejszych odcinków w trójkącie jest wysokość trójkąta. W każdym trójkącie przynajmniej jedna wysokość leży wewnątrz trójkąta.

Przykład 5

W trójkącie równoramiennym dana jest wysokość h opuszczona na podstawę trójkąta oraz ramię a .



Wyznamy wzór na obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie

Wykorzystamy własność, że wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli podstawę c na połowy.

Wtedy $(\frac{c}{2})^2 = a^2 - h^2$, więc $c = 2\sqrt{a^2 - h^2}$.

Zatem obwód jest równy $2a + c = 2a + 2\sqrt{a^2 - h^2}$.

Przykład 6

W trójkącie ABC spodek D wysokości opuszczonej na bok AB dzieli ten bok tak, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Długość wysokości $h = 2$, a długość boku $|AC| = 2\sqrt{5}$.

Wyznamy pole tego trójkąta.

Rozwiązanie

Wysokość dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne ACD i BCD .

Wtedy $|AD|^2 = |AC|^2 - h^2 = 20 - 4 = 16$.

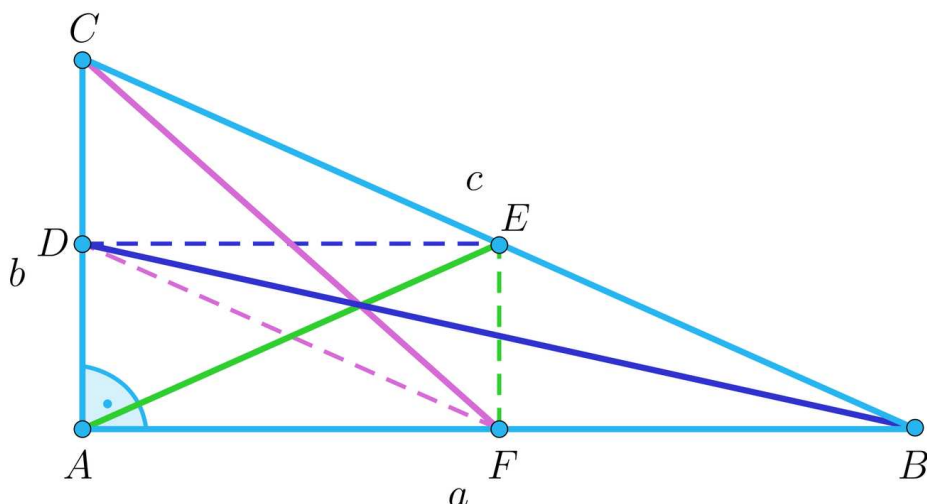
$$|AD| = \sqrt{16} = 4$$

$$|DB| = \frac{|AD|}{2} = 2, \text{ stąd } |AB| = 6$$

$$\text{Pole trójkąta wynosi } P = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6.$$

Wyznaczanie długości środkowych w trójkącie prostokątnym

Na rysunku przedstawiony jest trójkąt prostokątny i jego środkowe oznaczone różnymi kolorami.



Odcinki oznaczone liniami przerywanymi łączą środki boków. Z własności **linii środkowej w trójkącie**, odcinki te są równoległe do odpowiednich boków i mają długości równe połowie długości odpowiednich boków.

Wyznamy długość **środkowej** AE .

Zauważamy, że AE jest przeciwprostokątną trójkąta AEF , bo $EF \parallel AC$. Ponadto, $|EF| = \frac{b}{2}$ i $|AF| = \frac{a}{2}$.

Stąd $|AE|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$, więc $|AE| = \frac{c}{2}$.

Długość **środkowej** CF wyznaczamy jako długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ACF .

Stąd $|CF|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2+4b^2}{4}$, więc $|CF| = \sqrt{\frac{a^2+4b^2}{4}} = \frac{\sqrt{c^2+3b^2}}{2}$.

Przykład 7

Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość a i jest pięć razy krótsza od przeciwprostokątnej. Wyznamy długość **środkowej** poprowadzonej do dłuższej przyprostokątnej.

Rozwiązanie

Wyznamy długość x drugiej przyprostokątnej korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = (5a)^2 - a^2 = 24a^2, \text{ stąd } x = 2\sqrt{6}a$$

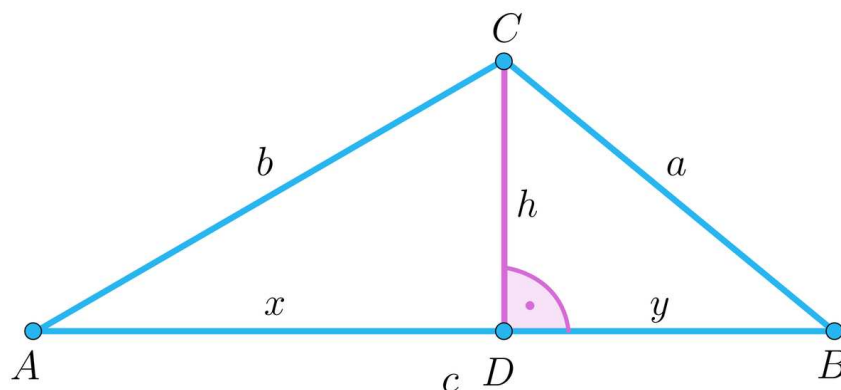
Zauważamy, że $x > a$, więc to przyprostokątna długości x jest dłuższa.

Korzystając z wyliczeń w materiale powyżej długość **środkowej** poprowadzonej do dłuższej przyprostokątnej wynosi $\frac{\sqrt{c^2+3b^2}}{2} = \frac{\sqrt{25a^2+3a^2}}{2} = \frac{2\sqrt{7}a^2}{2} = a\sqrt{7}$.

Wyznaczanie długości wysokości w dowolnym trójkącie

Wyznamy długość wysokości leżącej wewnątrz trójkąta korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Na rysunku przedstawione są oznaczenia, które wykorzystamy do wyprowadzenia wzoru na wysokość trójkąta.



Wysokość dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne ADC o bokach x, h, b oraz BDC o bokach y, h, a .

Stąd $b^2 = x^2 + h^2$ oraz $a^2 = y^2 + h^2$. Odejmując te równania stronami, dostaniemy

$$b^2 - a^2 = x^2 + h^2 - y^2 - h^2 = x^2 - y^2 = x^2 - (c - x)^2 =$$

$$= x^2 - c^2 + 2cx - x^2 = 2cx - c^2$$

Stąd $x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$. Otrzymany wynik wstawiamy do pierwszego równania

$$b^2 = \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \right)^2 + h^2, \text{ więc stosując wzory skróconego mnożenia mamy}$$

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \right)^2 = \left(b - \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \right) \cdot \left(b + \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \right) =$$

$$= \frac{(2bc - b^2 + a^2 - c^2)(2bc + b^2 - a^2 + c^2)}{4c^2} = \frac{(a^2 - (b^2 - 2bc + c^2))((2bc + b^2 + c^2) - a^2)}{4c^2} =$$

$$= \frac{(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)}{4c^2} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)(b + c + a)}{4c^2}$$

$$\text{Ostatecznie } h = \frac{\sqrt{(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)(b + c + a)}}{2c}.$$

Trójkąt egipski, to trójkąt prostokątny o bokach będących liczbami całkowitymi, pozostającymi w stosunku 3 : 4 : 5. Pole tego trójkąta, dla pewnego $a > 0$, wynosi

$$P = \frac{3a \cdot 4a}{2} = 6a^2, \text{ a długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną jest równa}$$

$$h = \frac{2P}{5a} = \frac{12a^2}{5a} = \frac{12}{5}a.$$

Przykład 8

W oparciu o wyprowadzony wzór na wysokość wyznaczmy długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną trójkąta egipskiego o bokach długości 3, 4, 5.

Rozwiązanie

W tym trójkącie najdłuższy bok ma długość 5, więc $c = 5$, $a = 3$, $b = 4$.

$$\text{Wyznaczamy } h = \frac{\sqrt{(3+4-5)(3-4+5)(4+5-3)(4+5+3)}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{576}}{10} = \frac{\sqrt{9 \cdot 64}}{10} = \frac{3 \cdot 8}{10} = \frac{12}{5}$$

Wprowadźmy oznaczenie $p = \frac{a+b+c}{2}$ na połowę obwodu trójkąta ABC o bokach a , b , c i zastosujmy we wzorze na wysokość trójkąta. Oznaczmy boki trójkąta tak, żeby c było najdłuższym bokiem.

Wtedy

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$

$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

$$a + b + c = 2p$$

Po wstawieniu do wzoru na wysokość opuszczoną na bok c , dostajemy

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b+c+a)}}{2c} = \\ &= \frac{\sqrt{2(p-c) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-a) \cdot 2p}}{2c} = \frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2c} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} \end{aligned}$$

Wyprowadzony wzór pozwala na sformułowanie wzoru na pole trójkąta.

Twierdzenie: Wzór Herona

Pole trójkąta o bokach a , b , c jest równe $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p jest połową obwodu trójkąta.

Dowód

$$P = \frac{c \cdot h}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Przykład 9

Wyznaczmy pole trójkąta o bokach 6, 8, 12.

Rozwiązanie

$$p = \frac{6+8+12}{2} = 13$$

korzystając ze [wzoru Herona](#)

$$P = \sqrt{13 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1} = \sqrt{455}$$

Słownik

wzór Herona

wzór, który pozwala na wyznaczenie pola trójkąta na podstawie długości jego boków; pole trójkąta o bokach a , b , c jest równe $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p jest połową obwodu trójkąta

linia środkowa w trójkącie

odcinek, który łączy środki boków trójkąta

środkowa w trójkącie

odcinek w trójkącie, który łączy wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj animację pokazującą wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do wyznaczania długości boków w trójkącie. Możesz wielokrotnie odtwarzać ten materiał w celu utrwalenia wiadomości.




Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący zastosowania twierdzenia Pitagorasa.

Polecenie 2

Zaznacz prawidłowe odpowiedzi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest trójkąt prostokątny o bokach całkowitych. Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

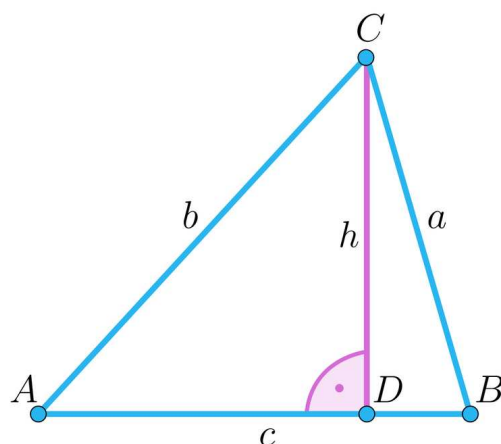
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Stosując oznaczenia z rysunku, wybierz prawidłowe odpowiedzi.



Jeżeli pole trójkąta wynosi 100 i $h = 10$ oraz $|AD| = 15$, to

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o obwodzie 132 jest liczbą całkowitą i jest o 1 większa od długości jednej z przyprostokątnych. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Ćwiczenie 6



Wyznacz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, gdy przyprostokątne mają długości: a i $\frac{a^2-1}{2}$; $a > 1$.

Ćwiczenie 7

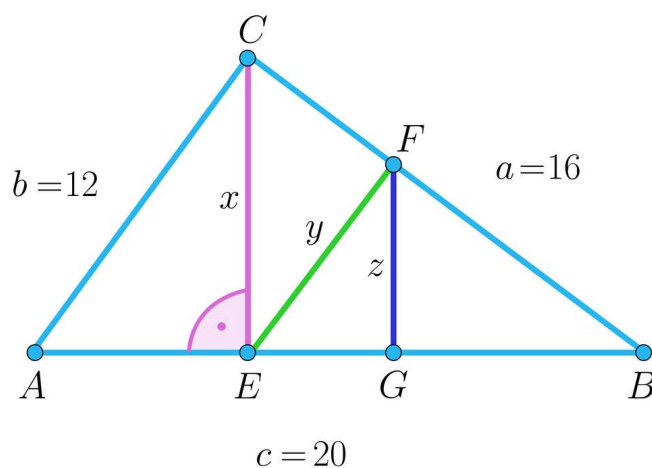


Dany jest trójkąt o bokach 13, 16, 19. Oblicz pole i wyznac wszystkie wysokości tego trójkąta.

Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o bokach 12, 16, 20.



Odcinek y leży na prostej równoległej do AC poprowadzonej przez spodek wysokości x . Odcinek z jest wysokością trójkąta BEF .

Wyznacz x , y , z .

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania długości odcinków w trójkątach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza długości boków trójkąta prostokątnego z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa
- wyznacza długości wysokości i środkowych trójkąta prostokątnego z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa
- wyznacza długość wysokości wewnętrznej dowolnego trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa
- wyprowadza i stosuje wzór Herona

- stosuje twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania odcinków trójkącie w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści w ćwiczeniach interaktywnych i animacji
- analiza tekstu przewodniego

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg zajęć:

Przed lekcją:

Uczniowie przypominają sobie twierdzenie Pitagorasa.

Faza wstępna:

- Nauczyciel przeprowadza pogadankę na temat odcinków, które można wyznaczyć w trójkącie, własności wysokości i linii środkowej w trójkącie.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie przypominają twierdzenie Pitagorasa oraz sposoby na wyznaczanie długości boków trójkąta prostokątnego z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.
2. Uczniowie w parach, metodą analizy tekstu przewodniego, analizują przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Nauczyciel przedstawia wzór Herona i przeprowadza jego dowód, uczniowie obliczają pole trójkąta o danych bokach.
4. Uczniowie w parach analizują przykłady zawarte w animacji.
5. Uczniowie sprawdzają nabyte umiejętności i wiedzę wykonując ćwiczenia interaktywne 1-5 w sekcji „Sprawdź się”. Ewentualne problemy omawiane są na forum

klasy.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie lekcji uczniowie oglądają animację.
2. Nauczyciel podsumowuje lekcję wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa

1. Uczniowie rozwiązują polecenie 2 w sekcji „Animacja”.
2. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 6-8 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Twierdzenie Pitagorasa](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimediu:

- Nauczyciel może wykorzystać animację na lekcji o twierdzeniu Pitagorasa.
- Uczniowie mogą wykorzystać animację, aby przygotować się do lekcji i wystąpić w niej w roli ekspertów.