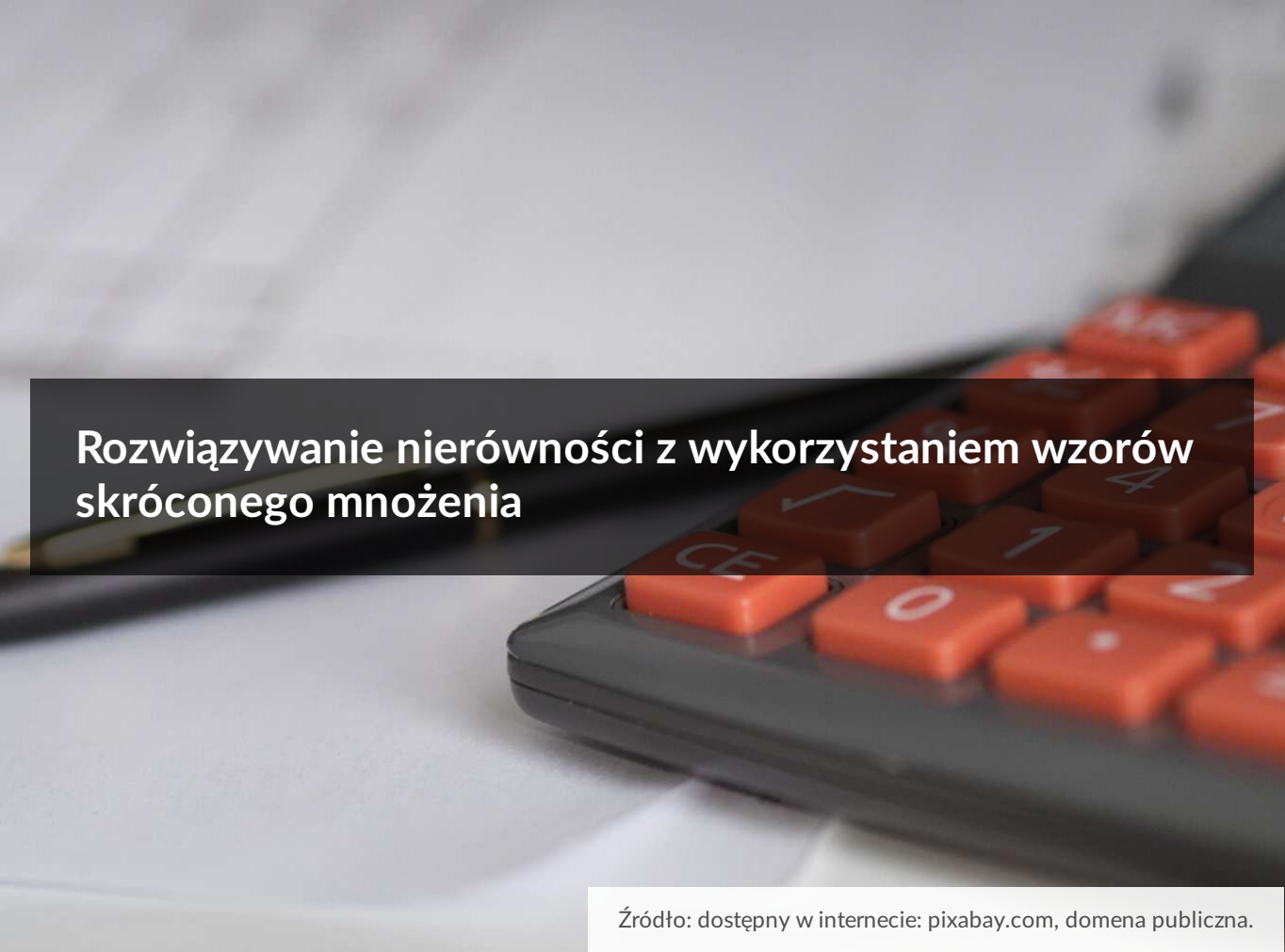




Rozwiązywanie nierówności z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie nierówności z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Dzięki wzorom skróconego mnożenia, działania z wieloma przekształceniami algebraicznymi stają się znacznie prostsze. Wzory te mają również zastosowanie w przypadku rozwiązywania równań i nierówności.

Przypomnijmy wzory skróconego mnożenia, które znamy z wcześniejszych lekcji:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności zawierające wzory skróconego mnożenia metodą nierówności równoważnych.
- Dopiszesz do nierówności taką liczbę lub takie wyrażenie algebraiczne, aby otrzymana nierówność spełniała określony warunek.

Przeczytaj

Nierówności są w matematyce rodzajem relacji porządku między dwoma wyrażeniami. Mamy cztery podstawowe znaki, które określają nierówności. Załóżmy, że a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy możemy ustalić między nimi pewną relację, mianowicie:

- $a > b$, jest to nierówność ostra (mocna), gdzie liczba a jest większa od liczby b ,
- $a < b$, jest to nierówność ostra (mocna), gdzie liczba a jest mniejsza od liczby b ,
- $a \geq b$, jest to nierówność nieostra (słaba), gdzie liczba a jest większa od liczby b lub równa liczbie b ,
- $a \leq b$, jest to nierówność nieostra (słaba), gdzie liczba a jest mniejsza od liczby b lub równa liczbie b .

W nierównościach wynikiem obliczeń nie jest na ogół konkretna liczba, jak w przypadku równań, a zbiór liczb, np.:

$$5x \leq 15 \quad |:5$$

$$x \leq 3$$

Zbiorem rozwiązań jest podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, $x \in (-\infty, 3]$. Zauważmy, że do zbioru rozwiązań nierówności należą wszystkie **liczby rzeczywiste**, które ją spełniają.

Zasady dodawania/odejmowania, mnożenia/dzielenia oraz potęgowania/pierwiastkowania stronami obowiązują w nierównościach, podobnie jak w równościach, jednak z zastrzeżeniem, że jeśli mnożymy/dzielimy przez liczbę mniejszą od zera, to musimy zmienić znak nierówności na przeciwny, np.:

$$-2x < 8 \quad |:(-2)$$

$$x > -4.$$

W dzisiejszej lekcji zajmiemy się rozwiązywaniem nierówności z wykorzystaniem znanych nam już wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $-(x+2)^2 \leq 2-x^2-x$.

Zacznijmy od skorzystania ze wzoru skróconego mnożenia na **kwadrat sumy dwóch wyrażeń**. Należy pamiętać o kolejności wykonywania działań. Najpierw wykonujemy potęgowanie (czyli podnosimy wyrażenie w nawiasie do kwadratu), a następnie mnożymy otrzymaną sumę algebraiczną przez (-1) .

$$-(x^2 + 4x + 4) \leq 2 - x^2 - x$$

$$-x^2 - 4x - 4 \leq 2 - x^2 - x$$

$$-x^2 + x^2 - 4x + x \leq 2 + 4$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$-3x \leq 6$$

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę ujemną (-3) . Zmieniamy zatem znak nierówności na przeciwny.

$$-3x \leq 6 \mid : (-3)$$

$$x \geq -2$$

Nierówność spełnia każda liczba należąca do przedziału $\langle -2, \infty \rangle$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $2(x - 1)^2 > x^2 - (1 - x)(1 + x)$.

Zastosujemy najpierw wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń oraz wzór skróconego mnożenia na [różnicę kwadratów dwóch wyrażeń](#).

$$2(x^2 - 2x + 1) > x^2 - (1 - x^2)$$

Pozbędziemy się nawiasów.

$$2x^2 - 4x + 2 > x^2 - 1 + x^2$$

Redukujemy wyrazy podobne i przekształcamy równoważnie nierówność, doprowadzając ją do najprostszej postaci.

$$2x^2 - 4x + 2 > 2x^2 - 1$$

$$-4x + 2 > -1$$

$$-4x > -3$$

$$x < \frac{3}{4}$$

Nierówność spełnia każda liczba należąca do przedziału $(-\infty, \frac{3}{4})$.

Przykład 3

Wykażemy, że rozwiązaniem nierówności $(3x - 1)(3x + 1) - 8x^2 > (x - 3)^2 - 10$ jest każda dodatnia liczba rzeczywista.

$$(3x - 1)(3x + 1) - 8x^2 > (x - 3)^2 - 10$$

Wykorzystamy wzory skróconego mnożenia.

$$9x^2 - 1 - 8x^2 > x^2 - 6x + 9 - 10$$

Aby pozbyć się tych samych wyrazów, dodajemy 1 do obu stron nierówności.

$$x^2 - 1 > x^2 - 6x - 1$$

$$6x > 0$$

$$x > 0$$

Wykazaliśmy zatem, że nierówność jest spełniona dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej.

Przykład 4

Obliczymy, dla jakich naturalnych wartości x , wartość wyrażenia $\frac{x}{3} + \frac{(3x-1)^2}{6} - 3x^2$ jest nie większa od wartości wyrażenia $\frac{(2-x)^2}{6} - \frac{5(x-2)(x+2)}{3}$.

Najpierw zapiszemy nierówność opisującą warunki zadania. Pamiętajmy, że stwierdzenie „nie większa” oznacza, że wartość pierwszego wyrażenia musi być mniejsza od wartości drugiego wyrażenia lub równa tej wartości.

$$\frac{x}{3} + \frac{(3x-1)^2}{6} - 3x^2 \leq \frac{(2-x)^2}{6} - \frac{5(x-2)(x+2)}{3}$$

Obydwie strony nierówności mnożymy przez 6.

$$6 \cdot \frac{x}{3} + 6 \cdot \frac{(3x-1)^2}{6} - 6 \cdot 3x^2 \leq 6 \cdot \frac{(2-x)^2}{6} - 6 \cdot \frac{5(x-2)(x+2)}{3}$$

$$2x + (3x - 1)^2 - 18x^2 \leq (2 - x)^2 - 10(x - 2)(x + 2)$$

Zastosujemy teraz wzory skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń i różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

$$2x + 9x^2 - 6x + 1 - 18x^2 \leq 4 - 4x + x^2 - 10(x^2 - 4)$$

$$-9x^2 - 4x + 1 \leq 4 - 4x + x^2 - 10x^2 + 40$$

$$-9x^2 - 4x + 1 \leq -9x^2 - 4x + 44$$

$$1 \leq 44$$

Otrzymaliśmy tożsamość, czyli wartość wyrażenia $\frac{x}{3} + \frac{(3x-1)^2}{6} - 3x^2$ jest nie większa od wartości wyrażenia $\frac{(2-x)^2}{6} - \frac{5(x-2)(x+2)}{3}$ dla każdej liczby naturalnej.

Słownik

kwadrat sumy dwóch wyrażeń a i b

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

kwadrat różnicy dwóch wyrażeń a i b

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

różnica kwadratów dwóch wyrażeń a i b

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką. Spróbuj samodzielnie rozwiązać podany przykład. Sprawdź poprawność Twojego rozwiązania z rozwiązaniem przedstawionym w infografice. Przeczytaj wskazówki.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą, która należy do zbioru rozwiązań nierówności.

$$1 - (3x - 2)^2 \geq -(3x - 1)^2$$

Polecenie 3

Rozwiąż nierówność $(4 - x)(4 + x) - (x - 1)^2 + 3x^2 \geq (x + 3)^2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest nierówność $(1 - x)^2 + 3 \leq (x - 1)(x + 1) - 2x + 5$. Wybierz zdania prawdziwe.

☐ Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

☐ Dla $x = -1$ nierówność jest sprzeczna.

☐ Nierówność jest sprzeczna dla dowolnej liczby ujemnej.

☐ Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby $x \in (-1, 4)$.

☐ Dla $x = 0$ nierówność jest prawdziwa.

Ćwiczenie 2



Wskaż nierówność, która nie jest równoważna pozostałym nierównościom.

☐ $(1 - x)^2 + 3 > 2x + x^2$

☐ $(x + 2)^2 + 3x > x^2 + x$

☐ $2(x + 2)^2 < 4x + 2x^2 + 12$

☐ $x^3 < 1$

Ćwiczenie 3



Wybierz i wstaw w wolne miejsce taką liczbę lub wyrażenie algebraiczne, aby poniższa nierówność była tożsamościowa.

$$4x - (x - 5)^2 > 3 - (1 - x)^2 - 10x + \boxed{}$$

$$2x - 3$$

$$27$$

$$25$$

$$22x - 37$$

Ćwiczenie 4



Wybierz i przeciągnij w odpowiednie miejsce takie wyrażenie algebraiczne, aby nierówność była sprzeczna:

$$(x + 2)^2 < x^2 + x + \boxed{}$$

$$(x - 3)^2 + 1 \geq 10 + x^2 + \boxed{}$$

$$(x - 4)(x + 4) - x \geq x^2 + \boxed{}$$

$$(12 - x)$$

$$(3x - 3)$$

$$(12 + x)$$

$$(1 - 6x)$$

$$(3x + 6)$$

$$(1 - 5x)$$

Ćwiczenie 5



Połącz w pary nierówności równoważne.

$$(x - 3)^2 > (x + 2)^2$$

$$2x < \frac{2}{3}$$

$$(x + 1)^2 > (x - 1)^2$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot (x - 2)^2 > (x + 2)^2 + x^2$$

$$x > \frac{7}{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - x)^2 \leq \frac{1}{2} x^2$$

$$2x < 1$$

$$x - (x - 5)^2 > -(x + 2)^2$$

$$x > 0$$

Ćwiczenie 6



Rozwiąż nierówność $2x - \left[(x+1)^2 - 3x\right] \leq 4 + 2 \cdot (x+3)^2 - 3 \cdot (x-2)(2+x)$,
a następnie przeciągnij w odpowiednie miejsca prawidłowe liczby.

Do zbioru rozwiązań nierówności należą liczby ze zbioru
(-4, -3, -2, -1).

Do zbioru rozwiązań nierówności **nie** należą liczby ze zbioru
 $(-\sqrt{5} - 3, 4^{-3} - 3^0, \sqrt[3]{-125})$.

Najmniejsza liczba całkowita ujemna, która należy do zbioru rozwiązań nierówności wynosi

.

-2 2 0 2 4 3 -3 4 3 -4

Ćwiczenie 7



Posortuj rozwiązanie nierówności w odpowiedniej kolejności.

$$x \leq \frac{5}{11}$$



$$-11x + 1 \geq -4$$



$$9x^2 - 6x + 1 - 5x^2 - 5x \geq 5 - 9 + 4x^2$$



$$-11x \geq -5$$



$$-11x \geq -4 - 1$$



$$4x^2 - 11x + 1 \geq 4x^2 - 4$$



$$(3x - 1)^2 - 5x(x + 1) \geq 5 - (3 - 2x)(3 + 2x)$$



$$9x^2 - 6x + 1 - 5x^2 - 5x \geq 5 - (9 - 4x^2)$$



Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówność:

$$\sqrt{(4x^2 - 4x + 1)} > 3$$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności zawierające wzory skróconego mnożenia metodą nierówności równoważnych
- dopisuje do nierówności taką liczbę lub takie wyrażenie algebraiczne, aby nierówność spełniała określony warunek
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych
- dyskusja

- metoda wędrujących plakatów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie przypominają twierdzenia o sposobie rozwiązywania nierówności za pomocą nierówności równoważnych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie nazw i zastosowania wzorów skróconego mnożenia w konkretnych przykładach. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na kartonie wybrany wzór skróconego mnożenia i podaje następnej grupie, która dopisuje nazwę wzoru. Kolejna grupa podaje przykład zastosowania tego wzoru. Plakat wędruje do następnej grupy, która dopisuje kolejny wzór itd. W ten sposób uczniowie przypominają wzory na kwadraty i sześciiany wyrażeń.
2. Uczniowie oglądają infografikę i omawiają ją wraz z nauczycielem.
3. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania nierówności zawierających wzory skróconego mnożenia.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Rozwiązanie zadań 7 i 8.

Materiały pomocnicze:

Nierówności stopnia pierwszego

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystane przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania własnej prezentacji multimedialnej pokazującej rozwiązywanie nierówności zawierających wzory skróconego mnożenia.