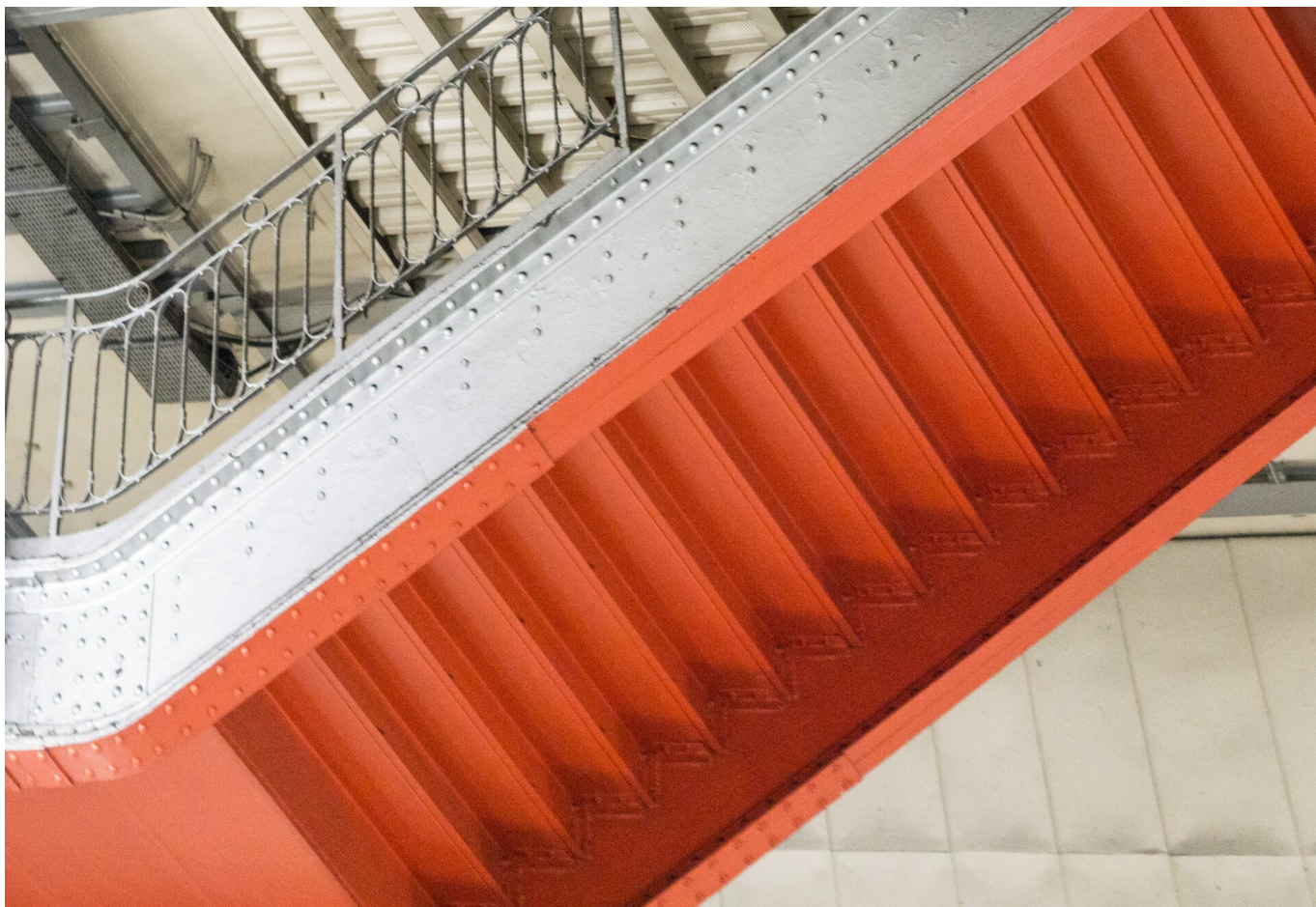




Odwrotna notacja polska

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Odwrotna notacja polska

Źródło: Guillaume Techer, domena publiczna.

Część języków programowania oraz kalkulatorów używa do swoich obliczeń pewnego zapisu wyrażeń arytmetycznych. Zapis ten nazywamy odwrotną notacją polską. Sposób ten zainicjował australijski naukowiec, Charles Leonard Hamblin, a jego nazwa pochodzi od odwrócenia innego zapisu – notacji polskiej, którą przedstawił Jan Łukasiewicz. W tym e-materiale dowiesz się, na czym polega odwrotna notacja polska i czym różni się od tradycyjnego zapisu wyrażeń.

Implementacja algorytmu w różnych językach programowania została przedstawiona w e-materiałach:

- [Odwrotna notacja polska w języku C++](#),
- [Odwrotna notacja polska w języku Java](#),
- [Odwrotna notacja polska w języku Python](#).

Więcej zadań? Sięgnij do: [Odwrotna notacja polska – zadania maturalne](#).

Twoje cele

- Scharakteryzujesz notację polską i odwrotną notację polską.
- Przeanalizujesz kilka przykładów zapisu wyrażeń klasycznym sposobem i odwrotną notacją polską.

- Wykonasz konwersję wyrażenia zapisanego w sposób klasyczny na wyrażenie zapisane w odwrotnej notacji polskiej.

Przeczytaj

Odwrotna notacja polska

Zapis wyrażenia algebraicznego, w którym między dwoma **operandami** umieszczamy operator, nazywamy **zapisem infiksowym**.

Oto przykładowe działanie dodawania w zapisie infiksowym:

$$2 + 3$$

W 1920 r. polski logik i matematyk Jan Łukasiewicz opracował notację polską, czyli sposób zapisu, w którym na początku stawiamy znak, a następnie operandy. Dzięki takiemu zapisywaniu wyrażeń, nie ma już konieczności używania nawiasów, w celu zmiany kolejności wykonywania działań.

Oto ta sama operacja dodawania, ale zapisana za pomocą notacji polskiej:

$$+2\ 3$$

Taki sposób zapisu nazywamy też **prefiksowym**.

Tematem tego e-materiału jest jednak odwrotna notacja polska, inaczej nazywana **zapisem postfiksowym**. Wyrażenia zapisujemy w taki sposób, że znak stawiamy na końcu.

Oto przykładowa operacja dodawania, zapisana za pomocą odwrotnej notacji polskiej:

$$2\ 3+$$

Zastosowanie odwrotnej notacji polskiej

Sposoby zapisu wyrażeń, takie jak notacja polska lub **odwrotna notacja polska** (ONP), używane są głównie w informatyce. Jest to związane z optymalizacją pracy komputera – zachowanie kolejności wykonywania działań, bez wykorzystania nawiasów, znacznie ułatwia obliczenia.

Przedstawione wyrażenie zapisane jest klasycznym sposobem infiksowym.

$$(2 + 3) \div 5 \cdot (2 + 7)$$

W celu zmiany kolejności wykonywania działań użyto nawiasów. W odwrotnej notacji polskiej nie są one potrzebne. To samo wyrażenie w ONP wygląda następująco:

$$2\ 3+5\div2\ 7+\cdot$$

Konwersja wyrażenia zapisanego sposobem klasycznym na zapis w odwrotnej notacji polskiej

W jaki sposób dokonać konwersji wyrażenia w zapisie klasycznym na postać w odwrotnej notacji polskiej?

W algorytmie będziemy wykorzystywali [stos](#), na którym umieścimy operatory i nawiasy z wyrażenia. Niezbędne okażą się także informacje na temat łączności danego operatora (czy jest lewostronny, czy prawostronny), a także ich priorytety. Informacje te przedstawia następująca tabela:

Operator	Łączność	Priorytet
$\wedge$	prawostronna	3
$\ast$ /	lewostronna	2
$+$ -	lewostronna	1

Operator $\wedge$ oznacza operację potęgowania.

Priorytet operatora oznacza, które działanie jest ważniejsze i powinno zostać wykonane jako pierwsze. Operacja potęgowania ma priorytet 3, co oznacza, że ma pierwszeństwo przed mnożeniem, dzieleniem, dodawaniem i odejmowaniem.

W przypadku, gdy w wyrażeniu występują operatory o tym samym priorytecie, łączność operatorów pomaga w zinterpretowaniu kolejności wykonywania działań. Łączność lewostronna oznacza, że działania w zapisie infiksowym powinny być wykonywane od lewej do prawej:

$$a + b - c = (a + b) - c$$

Operatory dodawania i odejmowania mają ten sam priorytet i łączność lewostronną, wykonujemy zatem najpierw działanie dodawania, a następnie odejmowania.

W przypadku łączności prawostronnej wykonujemy działania od strony prawej:

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

Algorytm konwersji wyrażenia w zapisie klasycznym, na postać w odwrotnej notacji polskiej, przedstawia się w kilku krokach.

Specyfikacja problemu:

Dane:

- infiksowy – łańcuch znaków; zapis infiksowy wyrażenia arytmetycznego

Wynik:

Wyrażenie infiksowy zapisane w odwrotnej notacji polskiej.

Krok 1. Jeśli jest element wyrażenia infiksowy do odczytania, wykonuj (jeśli nie, przejdź do kroku 7):

Krok 2. Jeśli element jest liczbą/zmienną, przekaz go na standardowe wyjście. Jeśli nie, przejdź do kroku 3.

Krok 3. Jeśli element jest operatorem, wykonuj (jeśli nie, przejdź do kroku 4):

Krok 3.1. Jeśli na szczycie stosu znajduje się operator, wykonuj (jeśli nie, przejdź do kroku 3.2):

Krok 3.1.1. Jeśli odczytany operator ma łączność lewostronną oraz priorytet nie większy niż priorytet operatora na szczycie stosu lub jeśli operator ma łączność prawostronną oraz priorytet mniejszy od priorytetu operatora na szczycie stosu, zdejmij operator ze szczytu stosu, umieść go na standardowym wyjściu i przejdź do kroku 3.1.

Krok 3.2. Umieść odczytany operator na szczycie stosu.

Krok 4. Jeśli element jest nawiasem otwierającym, umieść go na szczycie stosu. Jeśli nie, przejdź do kroku 5.

Krok 5. Jeśli element jest nawiasem zamykającym, wykonuj (jeśli nie, przejdź do kroku 6):

Krok 5.1. Jeśli na szczycie stosu nie znajduje się nawias otwierający, wykonuj (jeśli tak, przejdź do kroku 5.2):

Krok 5.1.1. Zdejmij operator z góry stosu, umieść go na wyjściu i wróć do kroku 5.1.

Krok 5.2. Zdejmij nawias otwierający. Nie przekazuj go na wyjście. Przejdź do kroku 6.

Krok 6. Wróć do kroku 1.

Krok 7. Zdejmij wszystkie operatory ze stosu i przekaz je kolejno na standardowe wyjście.

Słownik

odwrotna notacja polska

inaczej: zapis postfiksowy; sposób zapisu wyrażeń arytmetycznych, w którym operator umieszczany jest po operandach

operand

liczba, na której wykonywane jest działanie

stos

struktura danych, w której dane są odkładane na szczyt stosu i z niego zdejmowane, co oznacza, że bezpośrednio ze stosu możemy pobrać tylko ostatni odłożony element

zapis infiksowy

sposób zapisu wyrażeń, w którym operator jest stawiany między operandami, na których chcemy wykonać daną operację

zapis postfiksowy

sposób zapisu wyrażeń, w którym operator jest stawiany po operandach, na których chcemy wykonać daną operację; w tej notacji nie stosuje się nawiasów

zapis prefiksowy

sposób zapisu wyrażeń, w którym operator jest stawiany przed operandami, na których chcemy wykonać daną operację; w tej notacji nie stosuje się nawiasów

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Przeanalizuj przykład konwersji zapisu infiksowego wyrażenia na wyrażenie zapisane w odwrotnej notacji polskiej.

Specyfikacja problemu:

Dane:

- infiksowy – łańcuch znaków; zapis infiksowy wyrażenia arytmetycznego,

Wynik:

Wyrażenie infiksowy zapisane w odwrotnej notacji polskiej.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

Zgodnie z poznanym algorytmem przekształćmy następujące wyrażenie na postać w odwrotnej notacji polskiej:

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj pierwszy element zapisany w zapisie infiksowym. Znak to „2”. Element jest liczbą, przekaz go na wyjście.

Stos:	Wyjście:
	2



2

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdfSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj drugi element, który jest znakiem „+”.
Element jest operatorem, umieść go na szczycie stosu.

Stos:	Wyjście:
+	2

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdfSp>

3

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj trzeci element o wartości „3”. Element
jest liczbą, przekaz go na wyjście.

Stos:	Wyjście:
+	2 3

4

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdfSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj czwarty element, czyli znak „^”.
Element jest operatorem. Ma łączność
prawostronną, ale jego priorytet jest większy od
priorytetu operatora „+”, zatem nie zdejmuj

operatora „+” ze szczytu stosu. Operator „^” umieść na szczycie stosu.

Stos:	Wyjście:
+ ^	2 3

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

5

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj piąty element o wartości „2”. Element jest liczbą, przekaz go na wyjście.

Stos:	Wyjście:
+ ^	2 3 2

6

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj szósty element, który jest znakiem „.”. Element jest operatorem. Ma łączność lewostronną oraz priorytet mniejszy od priorytetu operatora na szczycie stosu „^”. Operator „^” zdejmij ze stosu i wyprowadź na wyjście. Operator „.” umieść na stosie.

Stos:	Wyjście:
+ .	2 3 2 ^

7

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj siódmy element, czyli znak „(”.

Element jest nawiasem otwierającym, umieść go na szczycie stosu.

Stos:	Wyjście:
+ · (	2 3 2 ^

8

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj ósmy element o wartości „5”. Element jest liczbą, przekaż go na wyjście.

Stos:	Wyjście:
+ · (	2 3 2 ^ 5

9

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj dziewiąty element, czyli znak „+”.

Element jest operatorem, umieść go na szczycie stosu.

Stos:	Wyjście:
-------	----------

Stos:	Wyjście:
+ · (+	2 3 2 ^ 5

10

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj dziesiąty element, mający wartość „8”.
Element jest liczbą, przekaz go na wyjście.

Stos:	Wyjście:
+ · (+	2 3 2 ^ 5 8

11

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Odczytaj ostatni element, czyli znak „)”.
Element jest nawiasem zamykającym. Na szczycie stosu nie znajduje się nawias otwierający, więc zdejmij operator „+” z góry stosu i przekaz na wyjście.

Stos:	Wyjście:
+ · (	2 3 2 ^ 5 8 +

12

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Na szczycie stosu znajduje się nawias otwierający. Zdejmij nawias otwierający, nie przekazuj go na wyjście.

Stos:	Wyjście:
+ ·	2 3 2 ^ 5 8 +

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

13

$$2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$$

Nie pozostało więcej elementów do odczytania, przechodzimy więc do kroku drugiego. Wszystkie operatory ze stosu trafiają kolejno na wyjście.

Stos:	Wyjście:
	2 3 2 ^ 5 8 + · +

14

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P10WrdFSp>

Wyrażenie $2 + 3^2 \cdot (5 + 8)$ zapisane w odwrotnej notacji polskiej wygląda następująco 2 3 2 ^ 5 8 + · +.

Polecenie 2

Przygotuj notatkę, w której podsumujesz najważniejsze informacje zawarte w prezentacji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż wszystkie zdania prawdziwe, dotyczące odwrotnej notacji polskiej.

- ☐ Jest sposobem zapisu wyrażeń, którego używamy w codziennym życiu.
- ☐ Została przedstawiona przez polskiego matematyka Jana Łukasiewicza.
- ☐ Stosowana jest głównie w informatyce.
- ☐ Nazywana jest zapisem prefiksowym.
- ☐ Nazywana jest zapisem postfiksowym.
- ☐ Nazywana jest zapisem infiksowym.
- ☐ Nie wymaga użycia nawiasów.

Ćwiczenie 2



Wskaż prawdziwe stwierdzenie, opisujące odwrotną notację polską.

- ☐ Jest sposobem zapisu wyrażeń arytmetycznych, w którym najpierw stawiamy operandy, a na końcu operator.
- ☐ Jest sposobem zapisu wyrażeń arytmetycznych, w którym operator wstawiamy między operandy.
- ☐ Jest sposobem zapisu wyrażeń arytmetycznych, w którym najpierw stawiamy operator, a na końcu operandy.

Ćwiczenie 3



Połącz każde wyrażenie z właściwą nazwą sposobu, w jakim zostało zapisane.

$5\ 8 + 2 \div 8 +$

notacja polska

$(5 + 8) \div 2 + 8$

odwrotna notacja polska

$+ 8 \div 2 + 5\ 8$

zapis infiksowy

Ćwiczenie 4



Wskaż, co należy zrobić w algorytmie konwersji wyrażenia z klasycznego sposobu infiksowego na odwrotną notację polską, gdy nie mamy już elementu do odczytania z wejścia, a na stosie znajdują się operatory.

- ☐ Należy usunąć operatory ze stosu i zakończyć algorytm.
- ☐ Należy zdjąć wszystkie operatory ze stosu i przekazać je kolejno na wyjście.
- ☐ Należy zakończyć algorytm.
- ☐ Należy przekazać operatory na wyjście aż do momentu, gdy napotkamy nawias otwierający.

Ćwiczenie 5



Wskaż, co należy zrobić w algorytmie konwersji wyrażenia z klasycznego sposobu infiksowego na odwrotną notację polską, gdy odczytany element będzie nawias zamykający.

- ☐ Należy umieścić nawias na stosie.
- ☐ Należy przekazać nawias na wyjście.
- ☐ Należy kolejno zdjąć operatory ze stosu i umieścić je na wyjście, aż do napotkania nawiasu otwierającego, który zdejmujemy ze stosu.
- ☐ Należy zdjąć wszystkie operatory ze stosu aż do napotkania nawiasu otwierającego.

Ćwiczenie 6



Uzupełnij wyrażenie odpowiednimi operatorami i operandami we właściwej kolejności.

Wyrażenie $4 \div (2 \cdot 3)^5 - (9 + 1)$ przekształcone na wyrażenie w odwrotnej notacji polskiej będzie wyglądało następująco:

÷	-	5	1	^	2	3	+		4	·	9
---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---

Ćwiczenie 7



Zdecyduj, jakie elementy będą znajdowały się na stosie w momencie odczytywania ostatniej liczby 1 z następującego wyrażenia $(2 + 8 \cdot 5) \cdot 2 \div (3 + 2 \cdot 1)$. Uzupełnij stos odpowiednimi operatorami w prawidłowej kolejności.

Stos

--	--	--	--

·	+	)	(	÷
---	---	---	---	---

Ćwiczenie 8



Uzupełnij zdanie.

Wartość wyrażenia zapisanego w odwrotnej notacji polskiej

$5\ 1\ 3\ 3\cdot+\cdot5\ 3^{\wedge}5\ 5\cdot4\cdot-\div$

wynosi

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Odwrotna notacja polska

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wykorzystuje znane sobie algorytmy przy rozwiązywaniu i programowaniu rozwiązań następujących problemów:

d) zamiany wyrażenia na postać w odwrotnej notacji polskiej i obliczanie jego wartości na podstawie tej postaci,

3) objaśnia, a także porównuje podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przy tym przykłady problemów i algorytmów, w szczególności:

i) struktury dynamiczne: stos, kolejka, lista (do realizacji algorytmu: ONP, symulacji problemu Flawiusza, sortowania leksykograficznego),

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Scharakteryzujesz notację polską i odwrotną notację polską.
- Przeanalizujesz kilka przykładów zapisu wyrażeń klasycznym sposobem i odwrotną notacją polską.
- Wykonasz konwersję wyrażenia zapisanego w sposób klasyczny na wyrażenie zapisane w odwrotnej notacji polskiej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimedium i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie przygotowują krótką notatkę nt. notacji polskiej.
2. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Odwrotna notacja polska”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z multimedium w sekcji „Prezentacja multimedialna”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat lekcji. Przedstawia cele zajęć oraz kryteria sukcesu.

2. Rozpoznawanie wiedzy potocznej uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Chętna lub wybrana osoba przedstawia charakterystykę notacji polskiej. W kontekście jej wypowiedzi nauczyciel charakteryzuje odwrotną notację polską. Uczniowie notują różnice i podobieństwa w formie mapy myśli.
2. Uczniowie wykonują ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel ponownie wyświetla na tablicy temat i cele lekcji zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W kontekście ich realizacji następuje omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel ponownie wyświetla na tablicy temat lekcji zawarty w sekcji „Wprowadzenie” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli).

Praca domowa:

1. Zapisz algorytm obliczania odwrotnej notacji polskiej w postaci pseudokodu.

Wskazówki metodyczne:

- Multimedia w sekcji „Prezentacja multimedialna” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu zawartego w temacie „Odwrotna notacja polska”.