



Warunki równowagi bryły sztywnej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Warunki równowagi bryły sztywnej

Czy to nie ciekawe?

Przyzwyczajeni jesteśmy, że samochód porusza się na czterech kołach. Niestety, czasem dochodzi do wypadku, w którym samochód „dachuje”, czyli obraca się dookoła własnej osi. Czasem jednak jedynie na chwilę dwa koła tracą kontakt z podłożem, ale odpowiedni manewr pozwala powrócić do normalnej orientacji samochodu – lub kontynuować jazdę na dwóch kołach, jeśli ma się umiejętności kierowcy rajdowego. Jak to możliwe, że samochód pozostaje w takiej równowadze? Jak wyjaśnić to z punktu widzenia sił i momentów sił przyłożonych do bryły sztywnej?



Rysunek a. Równowaga bryły sztywnej, jaką jest samochód – dlaczego może jechać na dwóch kołach?

Twoje cele

- dowiesz się, jakie warunki muszą być spełnione, aby bryła sztywna pozostawała w równowadze – z punktu widzenia sił i momentów sił oraz z punktu widzenia energii potencjalnej,
- poznasz różne rodzaje równowagi,
- przeanalizujesz, jak zachowuje się ciało po wytrąceniu ze stanu równowagi,
- zastosujesz warunki statyki bryły sztywnej do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Zanim odpowiemy precyzyjnie na pytanie „Jakie warunki muszą być spełnione, aby bryła sztywna była w równowadze?”, zastanówmy się, co właściwie rozumiemy pod pojęciem „równowagi”. Stojące dookoła nas budynki i spoczywające przedmioty są w równowadze, a przewracająca się wieża z klocków, albo człowiek, który się poślizgnął i upada, ewidentnie w równowadze nie są. Intuicyjnie czujemy zatem, że równowaga związana jest ze spoczynkiem, czyli brakiem zmian w położeniu ciała lub układu ciał względem siebie. Ale również, gdy ciało będzie się poruszało ruchem jednostajnym prostoliniowym, w niezakłócony sposób, powiemy, że jest w równowadze – satelita lecący przez przestrzeń kosmiczną, czy samochód toczący się monotonnie w korku również będą w równowadze. Te intuicyjne rozważania można zapisać matematycznie – zrobił to Newton w XVII wieku. Sformułował on pierwszą zasadę dynamiki w następujący sposób:

„Jeśli na ciało nie działają żadne siły, lub działające siły się równoważą, ciało to pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym”.

Będziemy zatem przyglądać się siłom, które przyłożone są do ciała – jeśli siły te się równoważą, ciało nie będzie miało przyspieszenia względem przyjętego układu odniesienia: będzie albo spoczywać, albo poruszać się jednostajnie po prostej. Zasada ta obowiązuje zarówno dla punktu materialnego, jak i zbioru punktów, czyli ciała lub bryły sztywnej. Zwróćmy uwagę, że pierwsza zasada dynamiki sformułowana przez Newtona mówi o ruchu postępowym, ale bryła sztywna może zarówno poruszać się ruchem postępowym, jak i ruchem obrotowym. O ile do zbadania ruchu postępowego ciała musieliśmy przyjrzeć się przyłożonym do niego siłom, to przy ruchu obrotowym będziemy przyglądać się **momentom sił**. Możemy sformułować analogiczne prawo, które pozwoli nam zrozumieć, dlaczego niektóre obiekty się obracają, a inne nie:

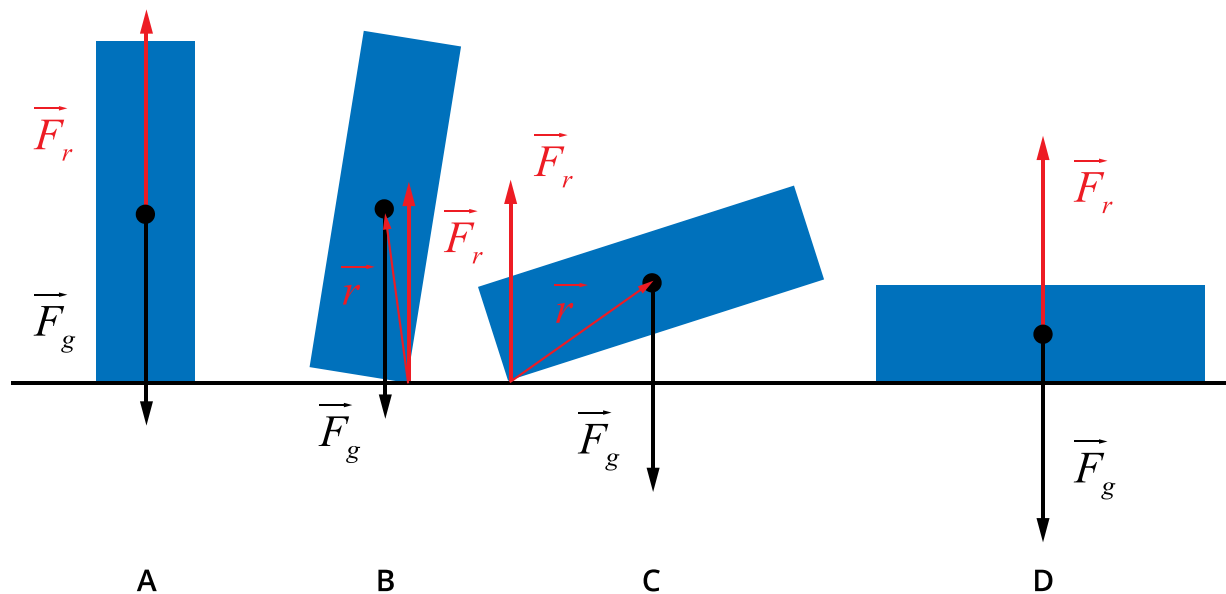
*„Jeśli na ciało nie działają żadne **momenty sił**, lub działające momenty sił się równoważą, to ciało pozostaje w spoczynku lub obraca się ruchem jednostajnym”.*

Czyli mówiąc o równowadze bryły sztywnej, będziemy analizować zarówno równowagę sił, jak i momentów sił. Bryła sztywna będzie w równowadze, jeśli suma wszystkich działających na nią sił i suma wszystkich momentów sił wyniosą zero:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_i^n \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_i^n \vec{M}_i = 0$$

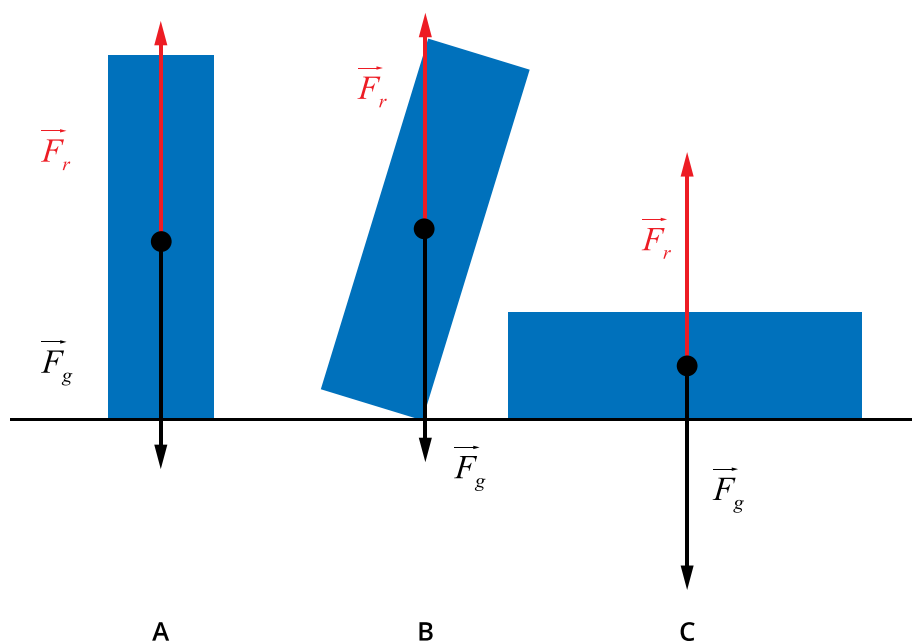
Mając to na uwadze przyjrzymy się Rys. 1. W każdym momencie na przedstawioną bryłę sztywną działa skierowana pionowo w dół siła grawitacji $\vec{F}_g$ oraz skierowana pionowo do góry siła reakcji podłoża $\vec{F}_r$. W położeniach B i C ewidentnie ciało to nie jest w równowadze, pojawia się niezrównoważony **moment siły**, który sprawia, że bryła wraca do pionu lub się przewraca. W położeniach A i D widać, że bryła pozostaje w równowadze, ponieważ nie występują żadne momenty sił (więc ich suma wynosi 0), a działające siły mają tę samą wartość, ale przeciwny zwrot, czyli się równoważą. Ale czy ta równowaga jest... tego samego rodzaju? Przecież łatwiej przewrócić taki prostopadłościan na dłuższy bok, gdy stoi na krótszym. Czym więc różni się równowaga w położeniu A i D?



Rys. 1. Bryła sztywna w różnych położeniach

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Faktycznie wyróżniamy różne rodzaje równowagi. Aby to lepiej zrozumieć przyjrzymy się jeszcze jednej orientacji bryły, jak na Rys. 2.:



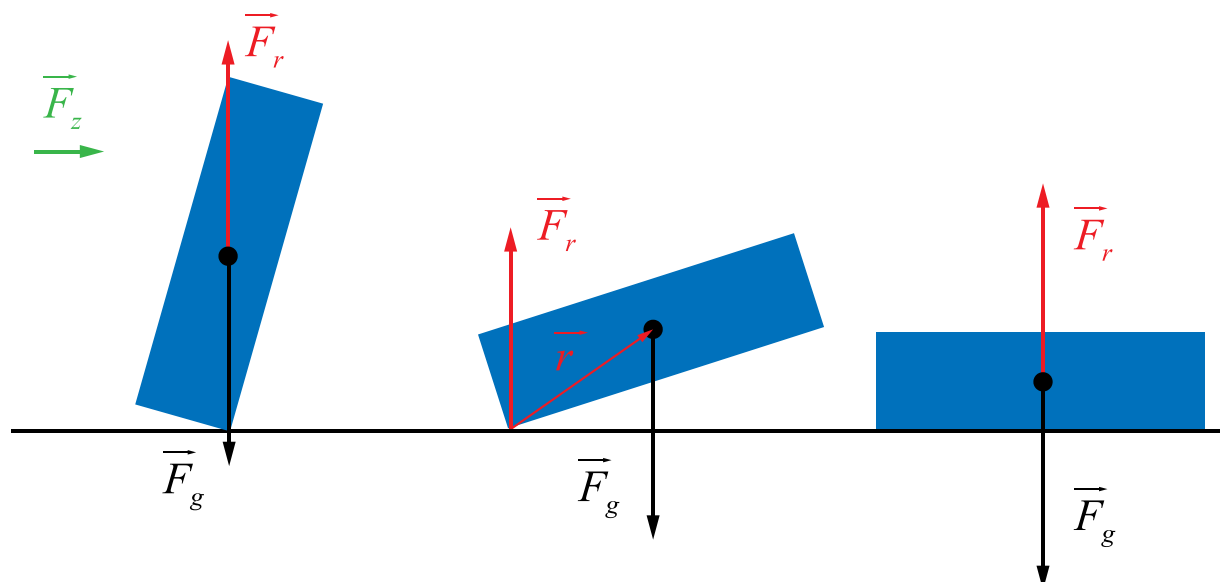
Rys. 2. Różne rodzaje równowagi?

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

We wszystkich trzech przypadkach bryła jest w równowadze, zgodnie z tym co napisaliśmy o równowadze sił i momentów sił. Wiemy jednak z codziennego doświadczenia, że ciało C pozostanie w tym położeniu, ciało B za chwilę runie w lewo lub w prawo, a ciało A również pozostanie w tym położeniu, ale łatwiej będzie zmienić jego orientację niż orientację ciała leżącego. Dlaczego? Rozważmy to z punktu widzenia momentów sił oraz z punktu widzenia energii potencjalnej.

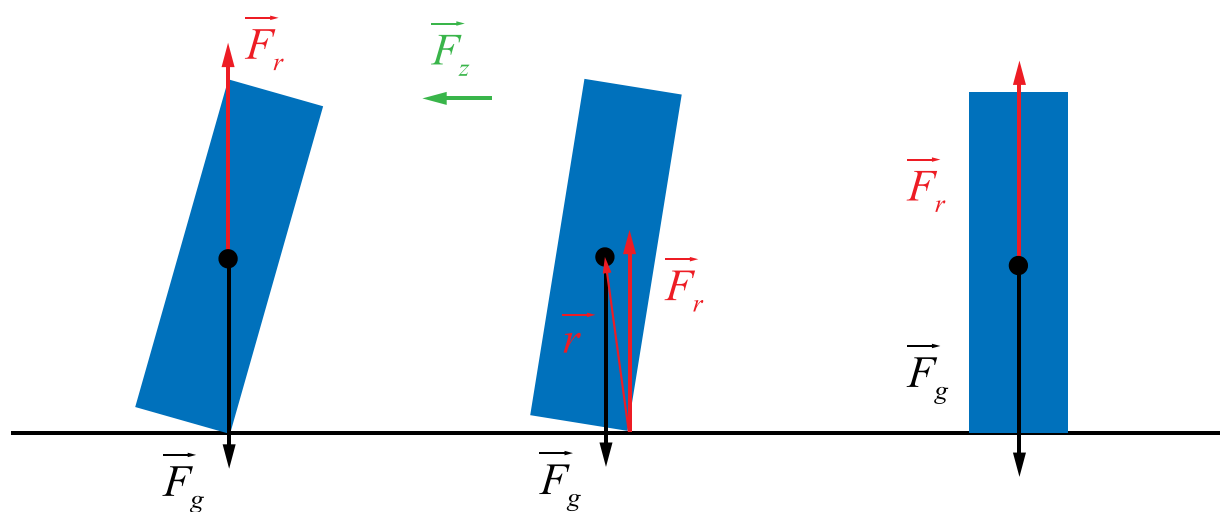
Jakie będą wartości, kierunki i zwroty momentów siły, gdy każde z tych ciał odrobinę wytrącimy z obecnego położenia równowagi?

W bryle postawionej na krawędzi pojawi się niezrównoważony **moment siły**, który będzie powodował ruch obrotowy oddalający bryłę od pierwotnego położenia równowagi – taki stan nazywamy stanem równowagi chwiejnej (Rys. 3a., Rys. 3b.).



Rys. 3a. Kolejne położenia ciała w stanie równowagi chwiejnej. Po przyłożeniu drobnej siły zaburzającej $\vec{F}_z$ ciało przewraca się i przechodzi do stanu równowagi trwałej.

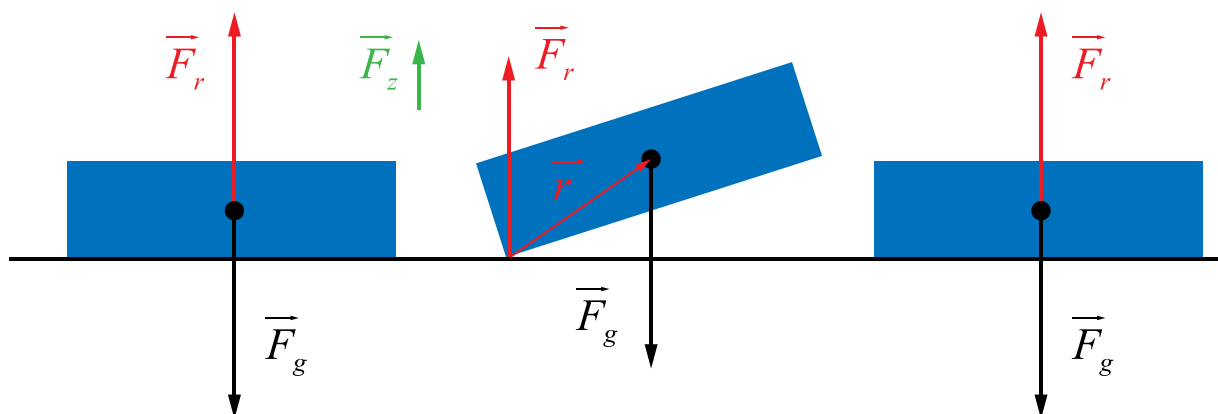
Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. 3b. Kolejne położenia ciała w stanie równowagi chwiejnej po przyłożeniu drobnej siły zaburzającej $\vec{F}_z$ o przeciwnym zwrocie niż na Rys. 4a.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

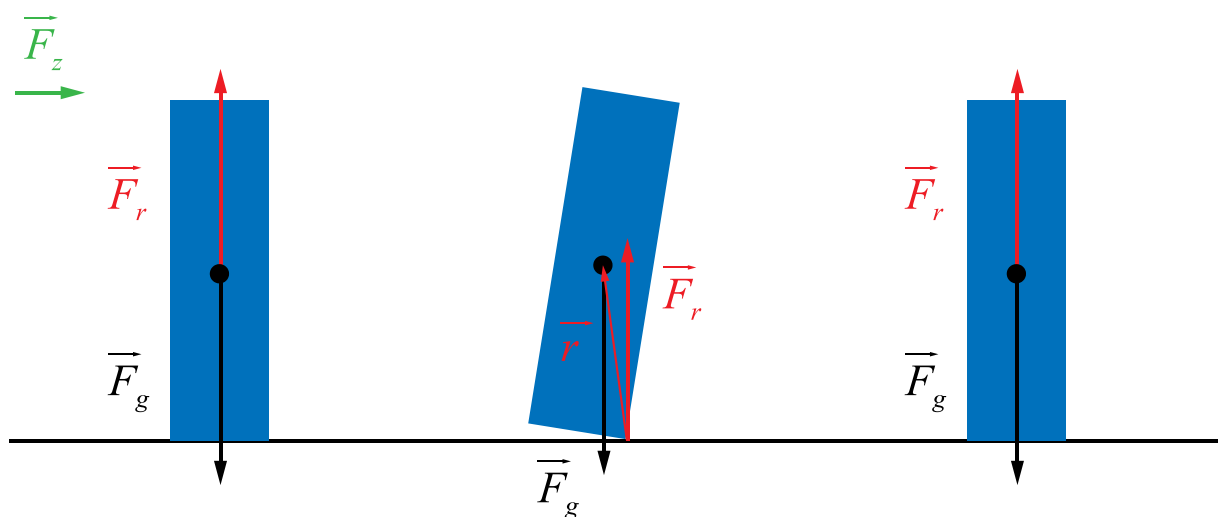
W przypadku bryły na Rys. 3c. – próba obrócenia jej, aby postawić ją do pionu, spowoduje powstanie momentu siły skierowanego tak, aby powrócić ją do pozycji poziomej. Taki stan nazywamy stanem równowagi trwałej.



Rys. 3c. Kolejne położenia ciała w stanie równowagi trwałej, które po przyłożeniu drobnej siły zaburzającej $\vec{F}_z$ wraca do położenia początkowego.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

A co z bryłą na Rys. 3d.? Też delikatne wytrącenie jej z położenia równowagi sprawi, że powstanie moment siły, który będzie skierowany w kierunku przywracającym położeniem pionowe. Czy jest to zatem również równowaga trwała? Nie do końca – ponieważ wytrącenie tego ciała odrobinę bardziej z położenia równowagi sprawi, że moment siły zmieni swój kierunek, a ciało się przewróci. Taki stan nazywamy stanem metastabilnym.

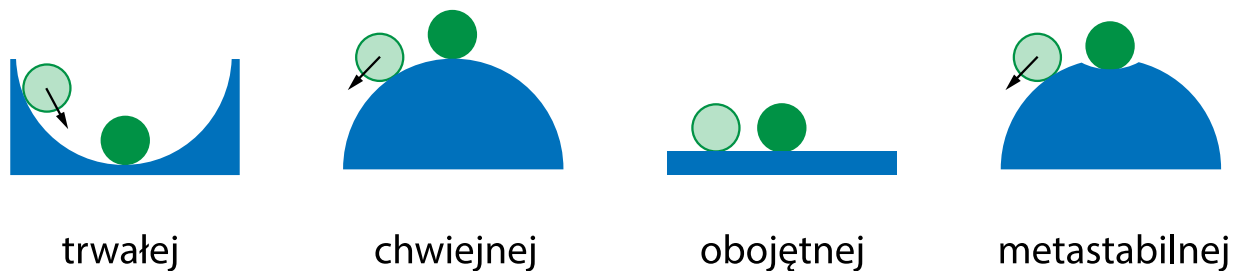


Rys. 3d. Po przyłożeniu drobnej siły zaburzającej $\vec{F}_z$ ciało wraca do położenia początkowego, ale gdy wychylimy je bardziej z położenia pionowego, przewróci się. Taki stan nazywamy stanem metastabilnym.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Przyjrzyjmy się jeszcze raz Rys. 2. Przeanalizujmy teraz nie zmiany wartości sił i momentów sił, ale zmiany położenia środka masy. Środek masy zaznaczony jest na rysunku czarną kropką. Zwróćmy uwagę, że postawienie tej bryły na krawędzi sprawia, że środek masy znajduje się wyżej – znaczy to, że zwiększyła się energia potencjalna tej bryły. Natomiast po przewróceniu się na dłuższy bok środek masy jest zdecydowanie niżej – zatem energia potencjalna się zmniejszyła. Ustaliliśmy wcześniej, że stan, gdy ciało postawione jest na krawędzi to stan równowagi chwiejnej, a gdy leży na dłuższym boku, to stan równowagi trwałej. Teraz możemy to samo zdanie sformułować z punktu widzenia energii potencjalnej. Każde ciało dąży do stanu o najniższej energii potencjalnej. Zatem stan, w którym położenie środka masy jest najniżej, jest stanem równowagi trwałej. Aby ustalić, w jakim stanie jest ciało, należy zadać pytanie: czy na skutek przyłożenia do ciała siły, która wytrąci je z położenia równowagi, energia ciała wzrośnie, zmaleje czy pozostanie bez zmian? Omawiane sytuacje porównajmy z Rys. 4.:

Schematyczne przedstawienie równowagi



Rys. 4. Różne rodzaje równowagi - położenie środka masy.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, [na podstawie: [https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnowaga_\(mechanika\)](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnowaga_(mechanika))], licencja: CC BY 4.0.

Jeśli energia potencjalna ciała się zmniejsza wskutek wytrącenia go z położenia równowagi, to mówimy o równowadze chwiejnej, jak w przykładzie B na Rys. 2.

Jeśli energia potencjalna ciała się zwiększa wskutek wytrącenia go z położenia równowagi, to ciało to było w równowadze trwałej i będzie do niego wracać, jak w położeniu C na Rys. 2.

Sytuacja przedstawiona w części A Rys. 2. odpowiada sytuacji „metastabilnej”, jak w prawej części Rys. 4. W tym wypadku ciało jest w **lokalnym** minimum energii potencjalnej. Oznacza to, że po przyłożeniu siły o niewielkiej wartości ciało wróci do wyjściowej pozycji, ale przyłożenie nieco większej siły wytrącającej go z położenia równowagi może sprawić, że zajmie nową pozycję – przewróci się. Po przewróceniu ciało to znajdzie się w **globalnym** minimum energii potencjalnym, a nie lokalnym. Innymi słowy: położenie środka masy będzie najniższe z możliwych w tym układzie.

Czyli nasz pionowo postawiony prostopadłościan przy lekkim dotknięciu się zakołysze, ale wróci do pionu, do lokalnego położenia równowagi, a przy mocniejszym pchnięciu

przewróci się, zajmując globalne położenie równowagi.

Słowniczek

moment siły

(ang.: *torque, moment of force*) wielkość wektorowa, zdefiniowana jako: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ - iloczyn wektorowy wektora $\vec{r}$ łączącego oś obrotu ciała z punktem przyłożenia siły oraz wektora siły $\vec{F}$.

strongman

rodzaj zawodów (lub określenie zawodnika biorącego w nich udział) polegających na przemieszczaniu obiektów o dużej masie

Symulacja interaktywna

Warunki równowagi bryły sztywnej

W symulacji mamy możliwość obserwowania zmian położenia środka ciężkości prostopadłościanu w trakcie obracania się go z boku na bok. Szybkość obrotu bryły zależy od sposobu uruchomienia symulacji (przycisk *Start* lub suwak ϵ). W każdym położeniu obliczana jest wartość współrzędnej momentu siły grawitacji $\vec{F}_g$ względem punktu, w którym bryła styka się z podłożem. Można też zmienić wysokość prostopadłościanu.

Uwaga. Praca z symulacją jest wygodniejsza po przełączeniu na widok pełnoekranowy.

Polecenie 1

Uruchom symulację i obserwuj zmiany położenia środka masy (SM) bryły. Zwróć uwagę na położenie lokalnego i globalnego minimum energii potencjalnej.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Polecenie 2

Sprawdź, o ile większa jest wartość momentu siły grawitacji względem punktu, w którym bryła styka się z podłożem, po obróceniu prostopadłościanu o ten sam kąt, ale z pozycji pionowej i poziomej.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



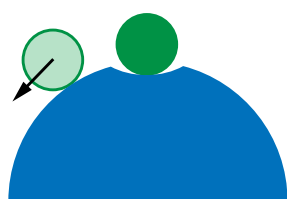
Równowaga bryły sztywnej zachodzi, gdy:

- ☐ nie działają na bryłę żadne momenty sił
- ☐ przyłożone do bryły siły równoważą momenty sił
- ☐ działające na bryłę siły się równoważą
- ☐ działające na bryłę siły i momenty sił się równoważą

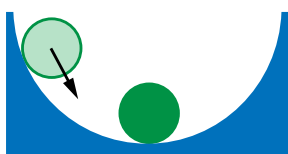
Ćwiczenie 2



Dopasuj obrazki do opisów



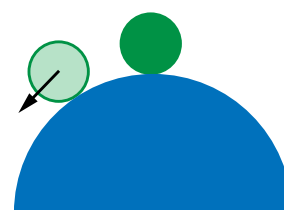
Równowaga
trwała



Równowaga
obojętna



Równowaga
metastabilna



Równowaga
chwiejna

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, [na podstawie:
[https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnowaga_\(mechanika\)](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnowaga_(mechanika))], licencja: CC BY 4.0.

Ćwiczenie 3



Sześcian o krawędzi $a = 10\text{ cm}$ i masie $m = 2\text{ kg}$ znajduje się w równowadze trwałej. Przyłożenie do tego sześcianu momentu siły spowodowało jego obrócenie do położenia równowagi chwiejnej, jak na rysunku poniżej. Jaka jest wartość pracy wykonanej przez tę siłę? Odpowiedź podaj z dokładnością do dwóch miejsc znaczących.



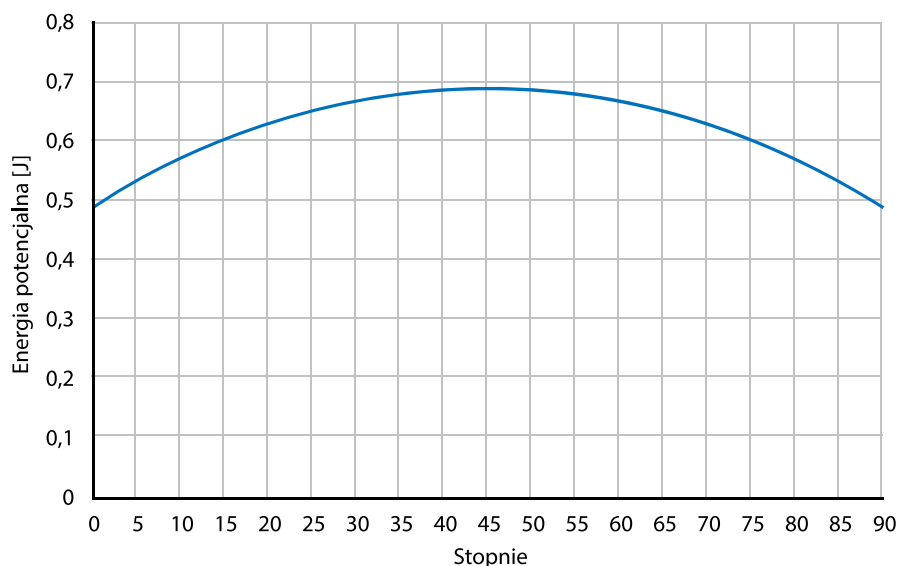
Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Odpowiedź: J

Ćwiczenie 4



Sześcian o masie $m = 1 \text{ kg}$ i krawędzi $a = 0,1 \text{ m}$ zostaje przewrócony na inny bok po przyłożeniu momentu siły. Poniższy wykres przedstawia zależność energii potencjalnej tego sześcianu od kąta obrotu α . Które z poniższych zdań możesz uznać za prawdziwe na podstawie tego wykresu?



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Całkowita praca wykonana na zmianę położenia z $\alpha = 0^\circ$ do $\alpha = 90^\circ$ może zostać obliczona z tego wykresu jako pole pod krzywą.



W położeniu $\alpha = 45^\circ$ bryła znajduje się w położeniu równowagi trwałej.



Siła zewnętrzna wykonuje pracę tylko w trakcie przekręcania bryły do położenia $\alpha = 45^\circ$, ponieważ później to siła grawitacji wykonuje pozostałą pracę.



W położeniu $\alpha = 45^\circ$ bryła znajduje się w położeniu równowagi chwiejnej.

Ćwiczenie 5



Na samochód, wchodzący w niewyprofilowany zakręt, zaczyna działać moment siły pochodzący od siły odśrodkowej. Przy jakiej prędkości samochodu jego koła oderwą się od podłoża?

Przyjmij, że: rozstaw kół $l = 160$ cm, środek ciężkości samochodu znajduje się na wysokości $h = 90$ cm, promień krzywizny drogi wynosi $R = 45$ m.

Odpowiedź podaj z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

Odpowiedź: km/h

Ćwiczenie 6



„Strongman” to rodzaj zawodów siłowych, polegających na rywalizacji głównie w podnoszeniu lub przemieszczaniu dużych ciężarów, zazwyczaj na czas. Jedną z konkurencji jest przerzucanie olbrzymich opon. Wyjaśnij, dlaczego oponę tak łatwo jest toczyć, a tak trudno jest przerzucać z pozycji leżącej? W który moment wysiłek zawodnika jest największy?

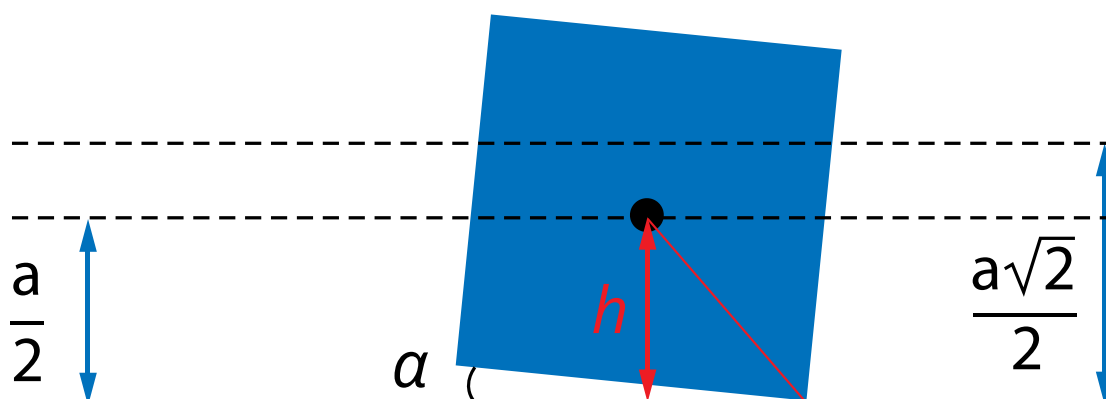


Źródło: dostępny w internecie: https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Tyre_Flip.JPG [dostęp 1.04.2022], licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 7

Wyprowadź wzór na zależność wysokości środka masy sześcianu od kąta podczas stawiania go na krawędzi, przyjmując oznaczenia, jak na rysunku poniżej.

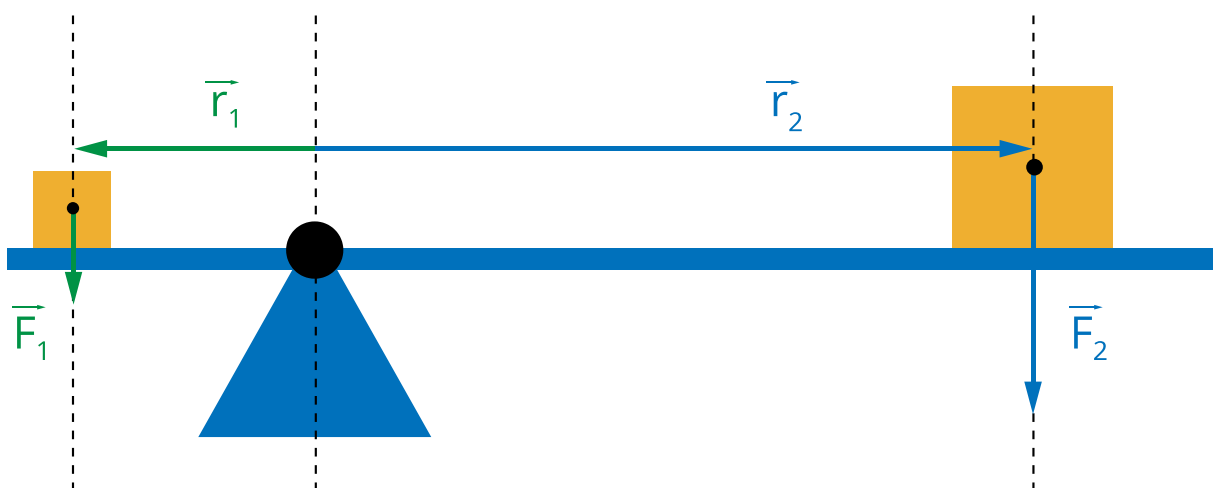
Sprawdź wynik wiedząc, że w równowadze trwałej wysokość wynosi $\frac{a}{2}$, a w położeniu równowagi chwiejnej $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ćwiczenie 8



Na rysunku poniżej przedstawiono huśtawkę – bryłę sztywną, którą obciążono dwoma ciężarami. Prawe ramię dźwigni jest trzy razy dłuższe od lewego ($r_2 = 3r_1$), a ciężar obiektu z prawej strony jest trzy razy większy niż ciężar po lewej ($F_2 = 3F_1$). Czy huśtawka ta znajduje się w położeniu równowagi?



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

☐ Nie

☐ Tak

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Warunki równowagi bryły sztywnej
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji lub doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 19) wyodrębnia zjawisko z kontekstu, nazywa je oraz wskazuje czynniki istotne i nieistotne dla jego przebiegu; III. Mechaniki bryły sztywnej. Uczeń: 3) stosuje warunki statyki bryły sztywnej; posługuje się pojęciem momentu sił wraz z jednostką.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wyjaśnia, jakie warunki muszą być spełnione, aby bryła sztywna pozostawała w równowadze – z punktu widzenia sił i momentów sił oraz z punktu widzenia energii potencjalnej. 2. rozróżnia różne rodzaje równowagi. 3. stosuje warunki statyki bryły sztywnej do rozwiązywania zadań.
Strategie i metody nauczania:	eksperymentalno-obserwacyjna
Formy zajęć:	- dyskusja grupowa, - praca indywidualna.
Środki dydaktyczne:	komputer z dostępem do Internetu i projektorem multimedialnym, podłużny przedmiot (np. długopis, kij, deska)
Materiały pomocnicze:	brak
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel prosi ochotnika o przeprowadzenie prostego doświadczenia: nauczyciel wręcza uczniowi kij i prosi o przytrzymanie go jednym palcem tak, aby spoczywał bez ruchu poziomo. Po wykonaniu zadania nauczyciel prosi o to samo, ale teraz kij ma być zorientowany pionowo. Po kilku próbach nauczyciel dziękuje uczniowi i pyta klasy, dlaczego ten sam przedmiot tak łatwo utrzymać bez ruchu w jednym położeniu, a tak trudno w drugim. Nauczyciel moderuje dyskusję grupową, przechodząc do fazy realizacji.	
Faza realizacyjna:	
Nauczyciel dzieli tablicę na dwie części, na jednej zapisując „równowaga momentów sił”, a na drugiej „położenie środka masy”. Nauczyciel prosi dwóch ochotników o wykonanie rysunków do każdego z terminów, prezentujących zagadnienie z kijem z tych dwóch perspektyw. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie zadania 1 i 2 z zestawu ćwiczeń, aby sprawdzić przyswojenie przez uczniów omawianych pojęć. Następnie nauczyciel prosi ochotnika o rozwiązanie z jego wsparciem zadania 5 na tablicy.	
Faza podsumowująca:	

Nauczyciel odpowiada na pytania i rozwiewa wątpliwości. Na zakończenie nauczyciel prezentuje symulację z niniejszego e-materiału, pokazującą zmiany położenia środka ciężkości prostopadłościanu. Nauczyciel kontrolnie pyta (na podstawie wykresu), w którym wypadku obiekt znajduje się w położeniu równowagi trwałej, a w którym w metatrwałej.

Praca domowa:

Zadania: 3, 4, 6 z zestawu ćwiczeń.

**Wskazówki
metodyczne
opisujące różne
zastosowania
danego
multimedium:**

Można również rozpocząć od samodzielnego eksperymentowania z parametrami symulacji przez uczniów i w ten sposób naprowadzić ich na intuicyjne rozumienie związku między równowagą, a położeniem środka masy bryły sztywnej.