



Mnożenie dwumianu przez dwumian



Mnożenie dwumianu przez dwumian

Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Strażnikiem wrót prowadzących do pewnej piramidy jest sfinks. Jeśli chcesz wejść do piramidy, musisz rozwiązać zagadkę, którą zada ci sfinks. W przeciwnym razie może zamienić cię w kamień.

Zagadka sfinksa.

Suma dwóch liczb jest równa siedem, a ich różnica jest równa trzynastcie. Ile jest równa różnica kwadratów tych liczb?

Czy potrafisz rozwiązać zagadkę sfinksa?

Jeśli nie – zapoznaj się z poniższym materiałem, a znajdziesz tam odpowiedź. Jeśli zagadka została przez Ciebie rozwiązana – również zajrzyj do poniższego materiału, aby rozszerzyć swoje umiejętności.

Bowiem w tym materiale zajmiemy się mnożeniem dwumianów, czy wyrażen algebraicznych, będących sumą dwóch jednomianów.

1. Interaktywna treść merytoryczna

2. Ilustracja interaktywna

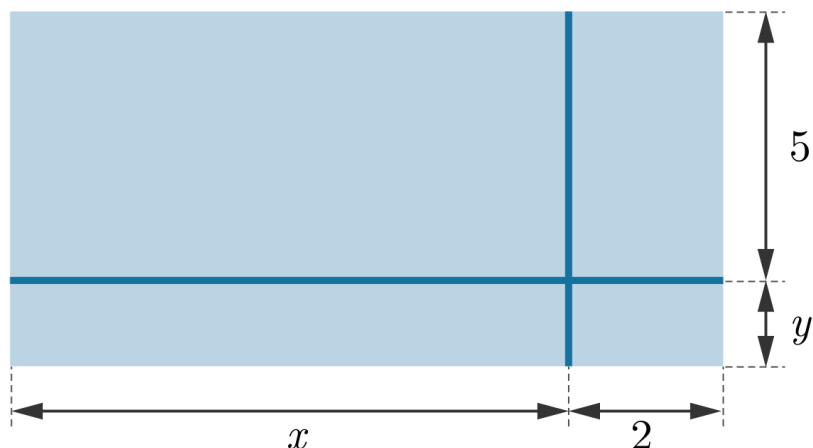
3. Zestaw ćwiczeń interaktywnych

4. Słownik

Twoje cele

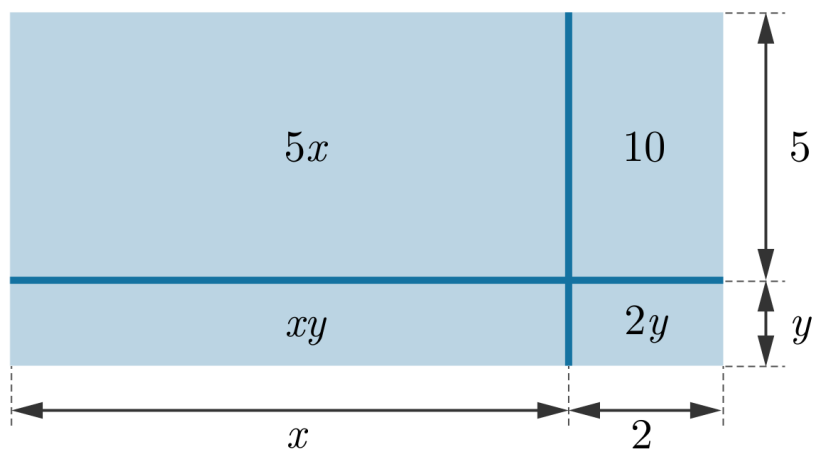
- Pomnożysz dwa dwumiany.
- Zapiszesz w prostszej postaci wyrażenie wymagające mnożenia dwumianów.
- Wykorzystasz interpretację geometryczną wyrażen algebraicznych w obliczeniach.

Prostokąt przedstawiony na rysunku podzielono na mniejsze prostokąty.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Pole tego prostokąta opisują wyrażenia $(x + 2)(5 + y)$ oraz $5x + xy + 10 + 2y$.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Możemy więc zapisać:

$$(x + 2)(5 + y) = 5x + xy + 10 + 2y$$

Zatem wyrażenie zapisane po prawej stronie równości otrzymujemy, **mnożąc sumy algebraiczne** $x + 2$ i $5 + y$.

Chcąc w inny sposób wykonać to mnożenie, stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$$(x + 2)(5 + y) = x \cdot (5 + y) + 2 \cdot (5 + y) = 5x + xy + 10 + 2y$$

Wykonać mnożenie możemy też w prostszej wersji – mnożąc od razu każdy wyraz pierwszego dwumianu, przez każdy wyraz drugiego dwumianu.

$$(x + 2)(5 + y) = x \cdot 5 + x \cdot y + 2 \cdot 5 + 2 \cdot y = 5x + xy + 10 + 2y$$

Korzystając z powyższego przykładu, podamy sposób [mnożenia sum algebraicznych](#).

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz pierwszej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy i otrzymane jednomiany dodać.

Przykład 1

Zapiszemy iloczyn $(2x - 1)(-5x + 2)$ w postaci sumy.

Mnożenie	Obliczenia pomocnicze
$(2x - 1)(-5x + 2) =$	—
$2x \cdot (-5x) + 2x \cdot 2 - 1 \cdot (-5x) - 1 \cdot 2 =$	$2x \cdot (-5x) = -10x^2$ $2x \cdot 2 = 4x$ $-1 \cdot (-5x) = 5x$ $-1 \cdot 2 = -2$
$-10x^2 + 4x + 5x - 2 =$	$4x + 5x = 9x$
$-10x^2 + 9x - 2$	—

Mnożenie sum algebraicznych wykorzystamy do zapisania kwadratu dwumianu w postaci sumy.

Przykład 2

Zapiszemy wyrażenie $(4 + x)^2$ w postaci sumy.

Aby wykonać potęgowanie, zapisujemy kwadrat danego wyrażenia w postaci iloczynu, a następnie mnożymy.

$$(4 + x)^2 = (4 + x)(4 + x)$$

$$(4 + x)(4 + x) = 4 \cdot 4 + 4 \cdot x + 4 \cdot x + x \cdot x = 16 + 4x + 4x + x^2$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$(4 + x)^2 = 16 + 8x + x^2$$

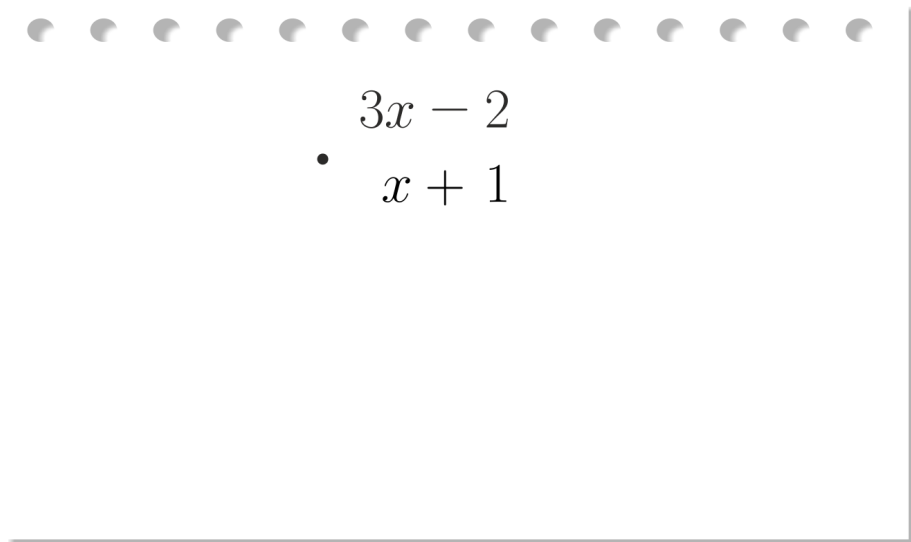
Mnożenie dwumianów czasem wykonujemy sposobem pisemnym, podobnie jak mnożymy liczby naturalne.

Przykład 3

Pomnożymy pisemnie $(3x - 2)$ i $(x + 1)$.

Krok 1

Zapisujemy jeden dwumian pod drugim.

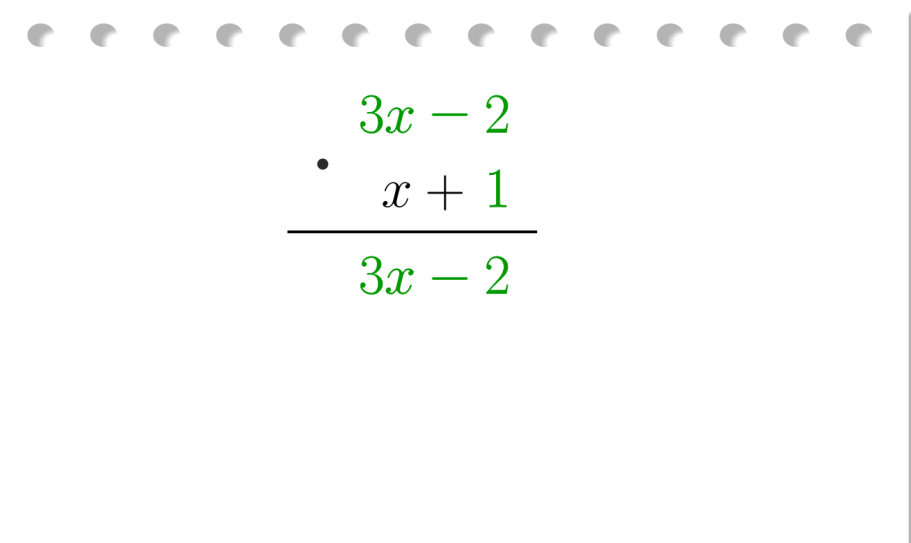


$$\begin{array}{r} 3x - 2 \\ \cdot \\ x + 1 \end{array}$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Krok 2

Mnożymy pierwszy dwumian przez 1.



$$\begin{array}{r} 3x - 2 \\ \cdot \\ x + 1 \\ \hline 3x - 2 \end{array}$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Krok 3

Mnożymy pierwszy dwumian przez x .

$$\begin{array}{r}
 3x - 2 \\
 \cdot \\
 x + 1 \\
 \hline
 3x - 2 \\
 + \quad 3x^2 - 2x \\
 \hline
 \end{array}$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Krok 4

Dodajemy otrzymane wyrażenia i redukujemy wyrazy podobne.

$$\begin{array}{r}
 3x - 2 \\
 \cdot \\
 x + 1 \\
 \hline
 3x - 2 \\
 + \quad 3x^2 - 2x \\
 \hline
 3x^2 + 3x - 2x - 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

$$(3x - 2) \cdot (x + 1) = 3x^2 + x - 2$$

Poznane sposoby mnożenia można zastosować do mnożenia wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 4

Zapiszemy w prostszej postaci wyrażenie $W = (\sqrt{2} - \sqrt{5})(2\sqrt{5} + \sqrt{2})$.

$$W = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$$

Zauważmy, że: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$ i $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5}$.

$$W = 2\sqrt{10} + \sqrt{4} + 2\sqrt{25} - \sqrt{10}$$

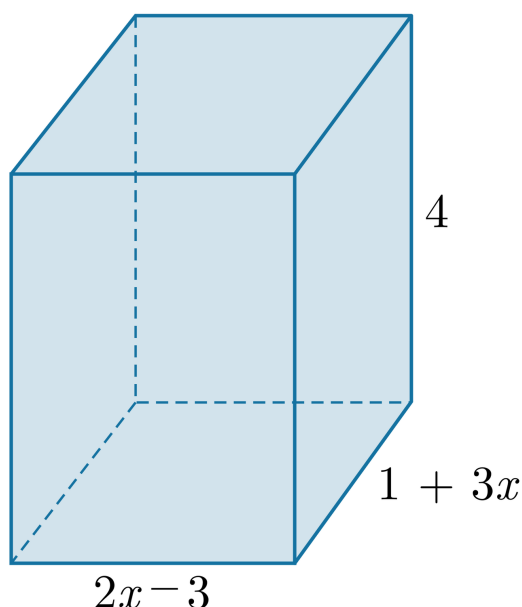
$$W = 2\sqrt{10} + 2 + 2 \cdot 5 - \sqrt{10}$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$W = 12 + \sqrt{10}$$

Przykład 5

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach długości $2x - 3$ i $1 + 3x$, gdzie $x > 1,5$. Wysokość tego prostopadłościanu jest równa 4. Zapiszemy wzór, który pozwoli na obliczenie objętości tego prostopadłościanu.



Aby obliczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy wysokość prostopadłościanu przez pole podstawy tego prostopadłościanu.

$$V = 4(2x - 3)(1 + 3x)$$

W tym przypadku mnożymy najpierw pierwszą sumę przez 4, a następnie tak otrzymane wyrażenie mnożymy przez $1 + 3x$.

$$V = (8x - 12)(1 + 3x)$$

$$V = 8x + 8x \cdot 3x - 12 - 12 \cdot 3x$$

$$V = 8x + 24x^2 - 12 - 36x$$

$$V = 24x^2 - 28x - 12$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Notatki

Miejsce na Twoje notatki

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ilustracja interaktywna

Polecenie 1

Obejrzyj materiał ilustrujący różne sposoby zamiany iloczynu dwumianów na sumę.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 2

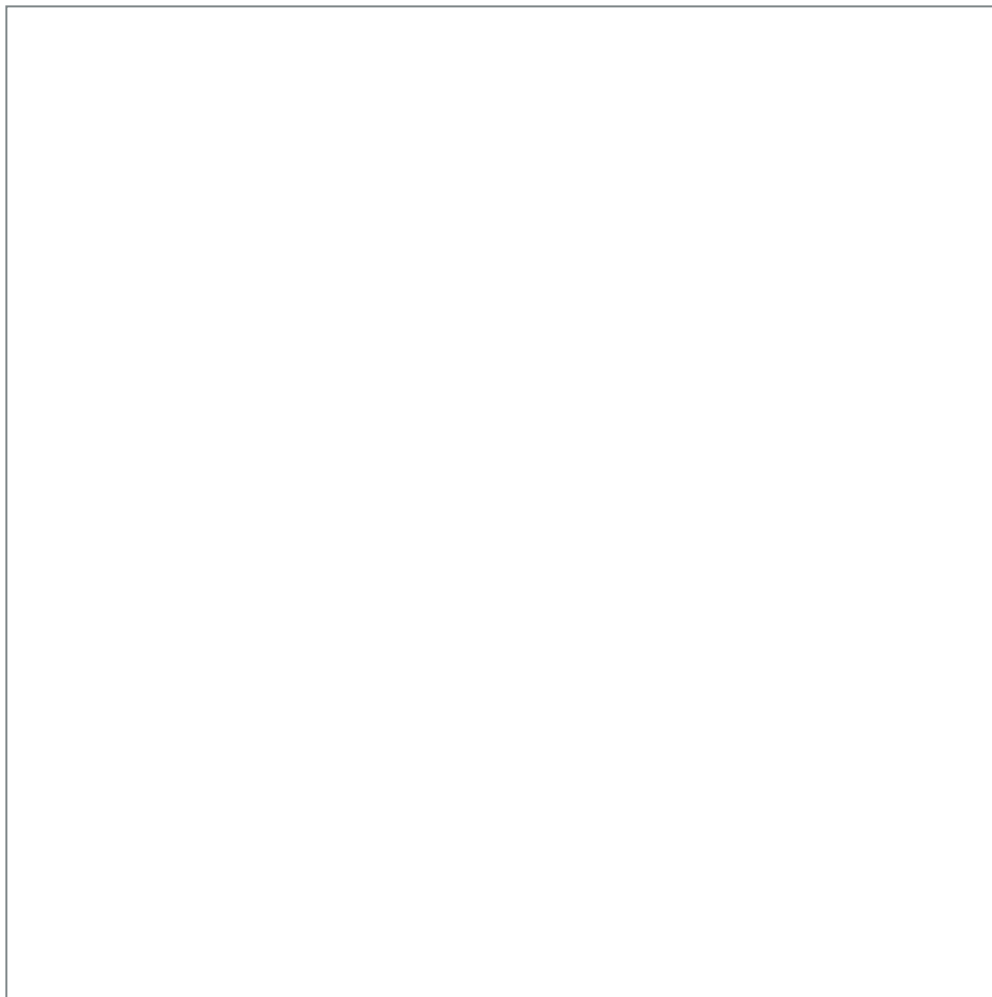
Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie $A \cdot B$, gdy $A = 8 - wa$ i $B = -2aw - 3$.
Skorzystaj z rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

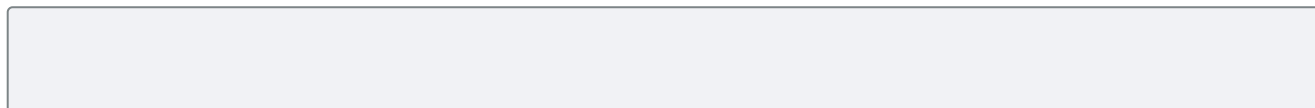
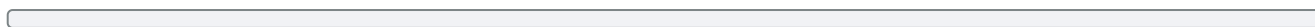
Polecenie 3

Wykonaj mnożenie: $(5 - 6a)(7a - 1)$.

Skorzystaj z interpretacji graficznej mnożenia.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 4

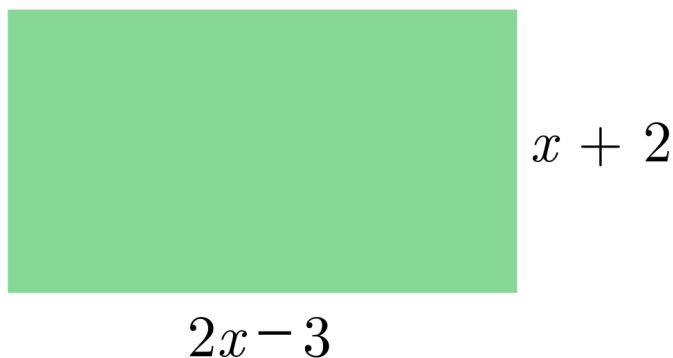
Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie $W = 3(x + 1)(x - 1) - 3(x^2 - 1)$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Zestaw ćwiczeń interaktywnych

Ćwiczenie 1

Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania. Wyrażenie algebraiczne opisujące pole prostokąta przedstawionego na rysunku to:



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

☐ $2x^2 - 2x + 6$

☐ $-x - 4$

☐ $3x - 1$

☐ $2x^2 + x - 6$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Maszynistka przepisuje $a + 3$ strony tekstu w ciągu godziny. Ile stron przepisze w ciągu $g + 1$ godzin? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $ag + a + 3g$

☐ $ag + 3g + a + 1$

☐ $ag + a + 3g + 3$

☐ $ag + 3g$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Połącz w pary - iloczyn i odpowiadającą mu sumę algebraiczną.

$(x - 3)(x - 2)$

$x^2 + 5x + 6$

$(x - 2)(3 - x)$

$-x^2 + 5x - 6$

$(-2 - x)(3 + x)$

$-x^2 - x + 6$

$(x + 2)(x + 3)$

$x^2 - 5x + 6$

$(2 - x)(3 + x)$

$-x^2 - 5x - 6$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

W luki wpisz takie liczby, aby otrzymać równości prawdziwe.

$(x - 2)(x + 2) = x^2 - \boxed{}$

$(x + 3)(3 - x) = -x^2 + \boxed{}$

$(1 - 2x)(1 + 2x) = \boxed{} - 4x^2$

$(3 + 4x)(3 - 4x) = 9 - \boxed{}x^2$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

W luki przeciągnij takie wyrażenia, aby otrzymać równości prawdziwe.

$$\begin{aligned}(x + 2y)(2x - y) &= 2x^2 + \boxed{} - 2y^2 \\ (-y + x)(-y + 2x) &= \boxed{} - 3xy + 2x^2 \\ (2x - 2y)(x + 1) &= \boxed{} + 2x - 2xy - 2y \\ (2y + 2x)(x - y) &= \boxed{} + 2x^2\end{aligned}$$

$-2y^2$

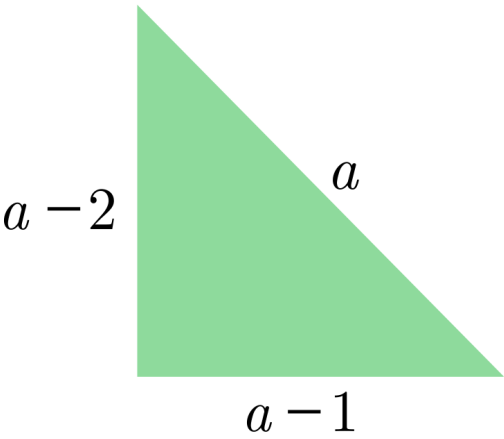
$3xy$

y^2

$2x^2$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Aby obliczyć długości boków tego trójkąta, trzeba rozwiązać równanie $2a^2 - 6a + 5 = a^2$.	☐	☐
Pole tego trójkąta jest równe $a^2 - 3a + 2$.	☐	☐
Jeżeli każdy bok tego trójkąta zwiększymy o 2, to różnica między polem trójkąta o zwiększonych bokach i polem trójkąta przedstawionego na rysunku jest równa $2a - 1$.	☐	☐

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Uzasadnij, że liczba $K = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) + \sqrt{6}$ jest liczbą całkowitą.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Zapisz podane wyrażenie w postaci sumy i zredukuj wyrazy podobne.

$$(2a - 3b)(a + b) - 2(a^2 - 2b^2)$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Słownik

mnożenie sum algebraicznych

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz pierwszej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy i otrzymame jednomiany dodać.

Bibliografia

Darling D., Banerjee A., (2020), *Jeszcze dziwniejsza matematyka. Na granicy poznania*, Gliwice: Helion.