Wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W VI w n. e. hinduski astronom Varahamihira posługiwał się funkcjami trygonometrycznymi i korzystał ze znanego nam wzoru na tzw. jedynkę trygonometryczną.

W tym materiale wykorzystamy jedynkę trygonometryczną, czyli wzór

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

oraz inne związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta, do rozwiązywania zadań.

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz zastosowanie prostych zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
> - Znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznaczysz wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Przeczytaj

W poniższych przykładach wykorzystamy definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego oraz związki między nimi:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ i } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Będziemy przekształcać wyrażenia i równości do równoważnych postaci, aby łatwiej wyciągnąć interesujące nas wnioski.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy istnieje kąt ostry α, taki, że:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

b) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

c) $\operatorname{tg}\ \alpha = \frac{4}{3\cdot\cos\alpha}$.

Rozwiązanie:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Kąt α istnieje, gdy pomiędzy sinusem a cosinusem kąta α zachodzi związek:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Podstawiając wartości $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, otrzymujemy:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$.

Odpowiedź:

Taki kąt α istnieje.

b) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = 2$

Obliczamy wartość $\sin\alpha$, korzystając z zależności $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = 2$, więc $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$, stąd $\sin\alpha = 2\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Kąt α istnieje, gdy pomiędzy sinusem a cosinusem kąta α zachodzi związek:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Podstawiając do tego wzoru wartości $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, otrzymujemy:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$

Odpowiedź:

Nie istnieje taki kąt α, dla którego $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3\cdot\cos\alpha}$

Korzystając z zależności $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, dokonamy przekształceń, które umożliwią nam wyliczenie wartości sinusa i cosinusa kąta α:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3\cdot\cos\alpha}$,

czyli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3\cdot\cos\alpha}$ i $\cos\alpha \neq 0$.

Mnożymy obie strony równości $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3\cdot\cos\alpha}$ przez $\cos\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0)$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{4}{3\cdot\cos\alpha}\cdot\cos\alpha$, stąd $\sin\alpha = \frac{4}{3}$.

Zgodnie z definicją, w trójkącie prostokątnym sinus kąta α jest stosunkiem długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, więc niemożliwe jest, aby stosunek krótszego boku do dłuższego dawał wynik większy niż jeden.

Otrzymaliśmy wartość większą od jeden: $\sin\alpha = \frac{4}{3} > 1$, nie ma więc takiego kąta α.

Odpowiedź:

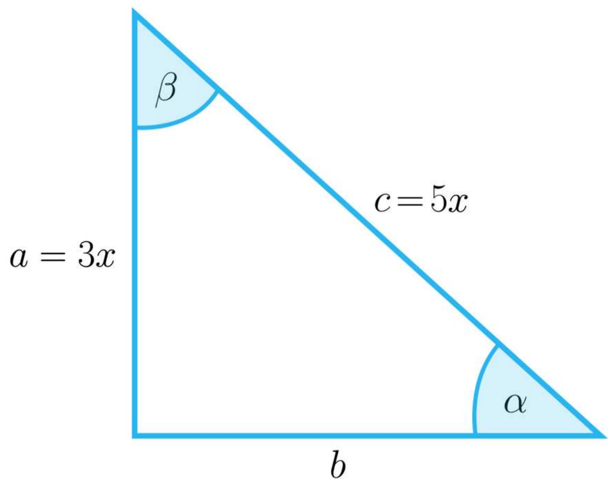
Nie istnieje taki kąt α, dla którego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3\cdot\cos\alpha}$.

Przykład 2

Wiedząc, że kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $(90^\circ - \alpha)$.

Rozwiązanie:

Mając $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, budujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α długości $3x$ i przeciwprostokątnej długości $5x$, gdzie $x > 0$.



Z twierdzenia Pitagorasa: $c^2 = a^2 + b^2$ wyznaczamy długość przyprostokątnej b:

$(5x)^2 = (3x)^2 + b^2$,

$b^2 = (5x)^2 - (3x)^2 = 25x^2 - 9x^2 = 16x^2$, więc

$b = \sqrt{16x^2} = 4x$.

Suma kątów w trójkącie wynosi 180°: $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, więc $\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Oznacza to, że kąt leżący naprzeciw przyprostokątnej b ma miarę $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$;

$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$;

$\mathrm{tg}\,(90^\circ - \alpha) = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$.

Odpowiedź:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5}$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$ i $\mathrm{tg}\,(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{3}$.

Przykład 3

Uzasadnimy, że $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \leq \frac{1}{2}$ dla dowolnego kąta α.

Rozwiązanie:

Uzasadniając powyższą nierówność, wykorzystamy fakt, że $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 \geq 0$.

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

i ze wzoru $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, otrzymujemy

$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha =$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \geq 0$,

$1 - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \geq 0$, czyli

$-2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \geq -1$.

Dzieląc stronami przez (-2), otrzymujemy:

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha \leq \frac{1}{2}$, co należało wykazać.

Przykład 4

Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=4$, obliczymy $\operatorname{tg}^3\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha}$.

Rozwiązanie:

$\operatorname{tg}^3\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha}=(\operatorname{tg}\alpha)^3+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^3$

Korzystając ze wzoru na sumę sześcianów $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$, otrzymujemy:

$\operatorname{tg}^3\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha}=$

$=(\operatorname{tg}\alpha)^3+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^3=$

$=\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\left((\operatorname{tg}\alpha)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$.

Ponadto, korzystając ze wzoru $(a+b)^2=a^2+b^2-2ab$, wyznaczymy

$\left((\operatorname{tg}\alpha^2)+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2\right)$.

$(\operatorname{tg}\alpha)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=$

$=\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=$

$=\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-2\cdot1=$

$=\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-2$

Wówczas otrzymujemy:

$\operatorname{tg}^3\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}^3\alpha}=$

$=\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\left((\operatorname{tg}\alpha)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)=$

$=\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\left((\operatorname{tg}\alpha)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-1\right)=$

(podstawiamy: $(\operatorname{tg}\alpha)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-2$ oraz $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=4$)

$=\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\left(\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2-2-1\right)=$

$= 4 \cdot \left(4^2 - 2 - 1\right) =$

$= 4 \cdot (16 - 2 - 1) =$

$= 4 \cdot 13 = 52$

Odpowiedź:

$\mathrm{tg}^3\ \alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}^3 \alpha} = 52.$

Przykład 5

Sprawdzimy, czy równość $(1 + \sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \mathrm{tg}\ \alpha\right) = \cos\alpha$ jest prawdziwa.

Rozwiązanie:

Będziemy przekształcać lewą stronę równości tak długo, aż dojdziemy do prawej strony. Jeśli jednak do niej nie dojdziemy, to pokażemy w ten sposób, że powyższa równość jest sprzeczna.

L – lewa strona równości;

P – prawa strona równości.

$L = (1 + \sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \mathrm{tg}\ \alpha\right)$

$P = \cos\alpha$

Wykorzystamy związki między funkcjami trygonometrycznymi:

$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

oraz wzór skróconego mnożenia:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$

$L = (1 + \sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \mathrm{tg}\ \alpha\right) =$

$= (1 + \sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) =$

$= \frac{(1+\sin\alpha)}{1} \cdot \frac{(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha} =$

$= \frac{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha} =$

$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \cos\alpha = P$

Odpowiedź:

Równość $(1+\sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \cos\alpha$ jest prawdziwa.

Słownik

sinus kąta α

w trójkącie prostokątnym stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej

cosinus kąta α

w trójkącie prostokątnym stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem prezentującym rozwiązania zadań z wyrażeniami zawierającymi funkcje trygonometryczne. Rozwiąż zadania znajdujące się pod filmem i porównaj swoje wyniki z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DCCEMdgSX

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne.

Polecenie 2

Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, oblicz $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Polecenie 3

Wykaż, że dla dowolnego kąta α: $\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha+1} = \sin^2\alpha$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) korzysta ze wzorów na: a^3+b^3, $(a+b)^n$ i $(a-b)^n$.

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°;

4) korzysta ze wzorów $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- poznaje różne zastosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- wykorzystuje poznane wzory do przekształcania wyrażeń
- przekształca wyrażenia stosując definicje funkcji trygonometrycznych oraz związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e–podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają związki między funkcjami trygonometrycznymi (zapisują je na tablicy).
2. Uczniowie podają wzory skróconego mnożenia i zapisują je na tablicy.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 3–osobowe.
2. Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie przedyskutowują na forum całej klasy rozwiązania przykładów zawartych w sekcji „Przeczytaj”.

4. Nauczyciel prezentuje film samouczek z metodami rozwiązywania zadań.
5. Uczniowie indywidualnie rozwiązują zadania znajdujące się pod filmem oraz ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.
6. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych nie rozwiązanych na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Tożsamości trygonometryczne
- Tożsamości trygonometryczne – Przykłady
- Tożsamości trygonometryczne – Zadania

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w filmie samouczku uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.