



Wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W VI w n. e. hinduski astronom Varahamihira posługiwał się funkcjami trygonometrycznymi i korzystał ze znanego nam wzoru na tzw. jedynkę trygonometryczną.

W tym materiale wykorzystamy jedynkę trygonometryczną, czyli wzór

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

oraz inne związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta, do rozwiązywania zadań.

Twoje cele

- Poznasz zastosowanie prostych zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- Znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacysz wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Przeczytaj

W poniższych przykładach wykorzystamy definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego oraz związki między nimi:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ i } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Będziemy przekształcać wyrażenia i równości do równoważnych postaci, aby łatwiej wyciągnąć interesujące nas wnioski.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy istnieje kąt ostry α , taki, że:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{4}{5}$;

b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = 2$;

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3 \cdot \cos \alpha}$.

Rozwiązanie:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

Kąt α istnieje, gdy pomiędzy **sinusem** a **cosinusem** kąta α zachodzi związek:
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Podstawiając wartości $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, otrzymujemy:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1.$$

Odpowiedź:

Taki kąt α istnieje.

b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = 2$

Obliczamy wartość $\sin \alpha$, korzystając z zależności $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$, więc $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$, stąd $\sin \alpha = 2 \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Kąt α istnieje, gdy pomiędzy **sinusem** a **cosinusem** kąta α zachodzi związek:
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Podstawiając do tego wzoru wartości $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, otrzymujemy:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$$

Odpowiedź:

Nie istnieje taki kąt α , dla którego $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

$$\text{c) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3 \cdot \cos \alpha}$$

Korzystając z zależności $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, dokonamy przekształceń, które umożliwią nam wyliczenie wartości sinusa i cosinusa kąta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3 \cdot \cos \alpha},$$

$$\text{czyli } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3 \cdot \cos \alpha} \text{ i } \cos \alpha \neq 0.$$

Mnożymy obie strony równości $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3 \cdot \cos \alpha}$ przez $\cos \alpha$ ($\cos \alpha \neq 0$)

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{4}{3 \cdot \cos \alpha} \cdot \cos \alpha, \text{ stąd } \sin \alpha = \frac{4}{3}.$$

Zgodnie z definicją, w trójkącie prostokątnym sinus kąta α jest stosunkiem długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, więc niemożliwe jest, aby stosunek krótszego boku do dłuższego dawał wynik większy niż jeden.

Otrzymaliśmy wartość większą od jeden: $\sin \alpha = \frac{4}{3} > 1$, nie ma więc takiego kąta α .

Odpowiedź:

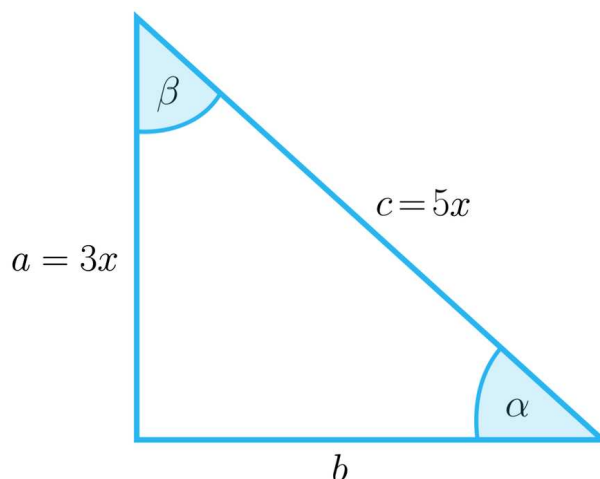
Nie istnieje taki kąt α , dla którego $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3 \cdot \cos \alpha}$.

Przykład 2

Wiedząc, że kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $(90^\circ - \alpha)$.

Rozwiązanie:

Mając $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, budujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α długości $3x$ i przeciwprostokątnej długości $5x$, gdzie $x > 0$.



Z twierdzenia Pitagorasa: $c^2 = a^2 + b^2$ wyznaczamy długość przyprostokątnej b :

$$(5x)^2 = (3x)^2 + b^2,$$

$$b^2 = (5x)^2 - (3x)^2 = 25x^2 - 9x^2 = 16x^2, \text{ więc}$$

$$b = \sqrt{16x^2} = 4x.$$

Suma kątów w trójkącie wynosi 180° : $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, więc

$\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Oznacza to, że kąt leżący naprzeciw przyprostokątnej b ma miarę $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5};$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

Odpowiedź:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5}, \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5} \text{ i } \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{3}.$$

Przykład 3

Uzasadnimy, że $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$ dla dowolnego kąta α .

Rozwiązanie:

Uzasadniając powyższą nierówność, wykorzystamy fakt, że $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \geq 0$.

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

i ze wzoru $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \geq 0,\end{aligned}$$

$$1 - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \geq 0, \text{ czyli}$$

$$-2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \geq -1.$$

Dzieląc stronami przez (-2) , otrzymujemy:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \frac{1}{2}, \text{ co należało wykazać.}$$

Przykład 4

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 4$, obliczymy $\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha}$.

Rozwiązanie:

$$\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} = (\operatorname{tg} \alpha)^3 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^3$$

Korzystając ze wzoru na sumę sześcianów $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} &= \\ &= (\operatorname{tg} \alpha)^3 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^3 = \\ &= \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \left((\operatorname{tg} \alpha)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right).\end{aligned}$$

Ponadto, korzystając ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, wyznaczmy

$$\left((\operatorname{tg} \alpha)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 \right).$$

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} \alpha)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 &= \\ &= \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 - 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 - 2 \cdot 1 =\end{aligned}$$

$$= \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - 2$$

Wówczas otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} =$$

$$= \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \left((\operatorname{tg} \alpha)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) =$$

$$= \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \left((\operatorname{tg} \alpha)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - 1 \right) =$$

$$\text{(podstawiamy: } (\operatorname{tg} \alpha)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - 2 \text{ oraz } \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 4)$$

$$= \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \left(\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - 2 - 1 \right) =$$

$$= 4 \cdot (4^2 - 2 - 1) =$$

$$= 4 \cdot (16 - 2 - 1) =$$

$$= 4 \cdot 13 = 52$$

Odpowiedź:

$$\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} = 52.$$

Przykład 5

Sprawdzimy, czy równość $(1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) = \cos \alpha$ jest prawdziwa.

Rozwiązanie:

Będziemy przekształcać lewą stronę równości tak długo, aż dojdziemy do prawej strony. Jeśli jednak do niej nie dojdziemy, to pokażemy w ten sposób, że powyższa równość jest sprzeczna.

L - lewa strona równości;

P - prawa strona równości.

$$L = (1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right)$$

$$P = \cos \alpha$$

Wykorzystamy związki między funkcjami trygonometrycznymi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ i } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

oraz wzór skróconego mnożenia:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$L = (1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) =$$

$$= (1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) =$$

$$= \frac{(1 + \sin \alpha)}{1} \cdot \frac{(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \cos \alpha = P$$

Odpowiedź:

Równość $(1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) = \cos \alpha$ jest prawdziwa.

Słownik

sinus kąta α

w trójkącie prostokątnym stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej

cosinus kąta α

w trójkącie prostokątnym stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem prezentującym rozwiązania zadań z wyrażeniami zawierającymi funkcje trygonometryczne. Rozwiąż zadania znajdujące się pod filmem i porównaj swoje wyniki z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCCEMdgSX>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wyrażen zawierających funkcje trygonometryczne.

Polecenie 2

Wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, oblicz $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

Polecenie 3

Wykaż, że dla dowolnego kąta α : $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \sin^2 \alpha$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Istnieje kąt ostry α , dla którego:

$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{45}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{45}$

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{5}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{12}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{12}$

Ćwiczenie 2



Dobierz wartość $\operatorname{tg} \alpha$ do wartości $\cos \alpha$, tak aby istniał kąt ostry α spełniający oba te warunki jednocześnie.

$\cos \alpha = \frac{1}{3}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\cos \alpha = \frac{1}{5}$

$\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

$\cos \alpha = \frac{3}{7}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

$\cos \alpha = \frac{5}{7}$

$\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{6}$

Ćwiczenie 3



Wiadomo, że α jest kątem ostrym. Wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

Nie istnieje kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{8} \cdot \sin \alpha$.

Nie istnieje kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5 \cdot \cos \alpha}$.

Istnieje kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{7 \cdot \cos \alpha}$.

Istnieje kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5} \cdot \sin \alpha$.

Ćwiczenie 4



Dla kątów ostrych α i β wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ i $\cos \beta = \frac{7}{8}$. Uporządkuj wartości poniższych funkcji trygonometrycznych w kolejności rosnącej.

$\cos(90^\circ - \alpha)$



$\sin(90^\circ - \alpha)$



$\cos(90^\circ - \beta)$



$\sin(90^\circ - \beta)$



Ćwiczenie 5



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wiadomo, że $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{17}{25}$. Wtedy:

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{336}{25}$

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{168}{25}$

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{336}{625}$

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{168}{625}$

Ćwiczenie 6



Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 6$. Wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

$\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} = 216$

$\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} = 198$

$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 36$

$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 34$

Ćwiczenie 7



Oceń prawdziwość zdań przeciągając odpowiednie wyrażenie.

1. Dla dowolnego kąta α równość

$(\sin \alpha + 2 \cdot \cos \alpha)(\sin \alpha - 2 \cdot \cos \alpha) = (\sqrt{3} \sin \alpha + 2)(\sqrt{3} \sin \alpha - 2)$ jest prawdziwa.

2. Dla dowolnego kąta α równość $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha$ jest prawdziwa.

3. Dla dowolnego kąta α równość $\frac{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1-2 \cdot \sin^2 \alpha}$ jest prawdziwa.

Prawda

Fałsz

Prawda

Fałsz

Fałsz

Prawda

Ćwiczenie 8



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wiemy, że $\sin \alpha = \frac{5}{7}$. Wtedy:

$\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{12}{7}$

$\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = 1 + \frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = 1 - \frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{2}{7}$

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$.

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60° ;

4) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- poznaje różne zastosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- wykorzystuje poznane wzory do przekształcania wyrażeń
- przekształca wyrażenia stosując definicje funkcji trygonometrycznych oraz związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają związki między funkcjami trygonometrycznymi (zapisują je na tablicy).
2. Uczniowie podają wzory skróconego mnożenia i zapisują je na tablicy.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 3-osobowe.
2. Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie przedyskutowują na forum całej klasy rozwiązania przykładów zawartych w sekcji „Przeczytaj”.

4. Nauczyciel prezentuje film samouczek z metodami rozwiązywania zadań.
5. Uczniowie indywidualnie rozwiązują zadania znajdujące się pod filmem oraz ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.
6. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych nie rozwiązanych na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Tożsamości trygonometryczne](#)
- [Tożsamości trygonometryczne – Przykłady](#)
- [Tożsamości trygonometryczne – Zadania](#)

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w filmie samouczku uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.