Przykłady wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej różnymi wzorami w różnych przedziałach

Przykłady wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej różnymi wzorami w różnych przedziałach

Źródło: Stux, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wiemy, że funkcja może być opisana różnymi sposobami.
Jednym ze sposobów opisu funkcji jest określenie tej funkcji za pomocą jednego wzoru.
Przypomnij sobie, jak wyznaczyć zbiór wartości takiej funkcji. Ta umiejętość będzie bardzo przydatna, przy wyznaczaniu wartości funkcji opisanej różnymi wzorami w różnych przedziałach. A tym właśnie zajmiemy się w tym materiale.
Odpowiemy na poniższe pytania.
W jaki sposób możemy sprawdzić, czy dana liczba należy do zbioru wartości funkcji?
Czy zawsze należy wyznaczać zbiór wartości funkcji, aby sprawdzić, czy podana liczba może być wartością funkcji?

Twoje cele

- Wyznaczysz zbiór wartości funkcji, gdy funkcja będzie opisana za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach.
- Sprawdzisz, czy podana liczba może być wartością funkcji.
- Udowodnisz, że podana liczba jest elementem zbioru wartości funkcji.

Przeczytaj

Naszym celem jest określanie sposobu wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej jednym wzorem, za to kilkoma wyrażeniami w różnych przedziałach. (O takim sposobie opisu funkcji mówimy też czasem, że funkcja opisana jest różnymi wzorami w różnych przedziałach). Poniższe przykłady pomogą nam zrozumieć w jaki sposób możemy wyznaczyć zbiór wartości funkcji, gdy funkcja opisana jest jednym wzorem, za to różnymi wyrażeniami w różnych przedziałach.

Przykład 1

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{gdy } x \in \langle -4,\ 2\rangle \\ x-3, & \text{gdy } x \in (2,\ 6\rangle \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Funkcja f opisana jest dwoma wyrażeniami. W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji f naszkicujemy jej wykres. Wprowadzimy dodatkowe oznaczenia.

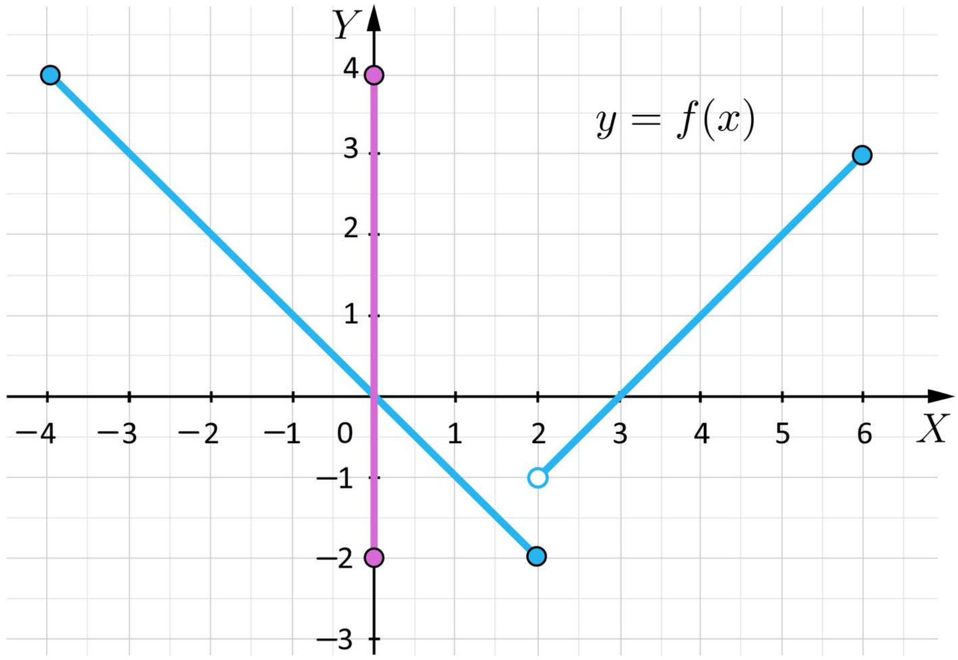
$f_1(x) = -x$, gdy $x \in \langle -4,\ 2\rangle$ oraz $f_2(x) = x - 3$, gdy $x \in (2,\ 6\rangle$.

Dla każdej z tych funkcji wykonamy tabelkę częściową.

tabelka częściowa funkcji f_1					
x	-4	$-3,5$	-2	0	2
$f_1(x)$	4	$3,5$	2	0	-2

tabelka częściowa funkcji f_2					
x	2,5	$3,5$	4	5	6
$f_2(x)$	$-0{,}5$	0	1	2	3

Naszkicujemy w układzie współrzędnych wykres funkcji f i odczytamy z wykresu zbiór wartości funkcji.



Zbiór wartości funkcji odczytujemy na osi Y. Zapisujemy go symbolicznie $ZW_f = \langle -2,\ 4\rangle$.

Przykład 2

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3, & \text{gdy } x \in (-\infty,\ 1\rangle \\ -3, & \text{gdy } x \in (1,\ \infty) \end{cases}$$

Sprawdzimy, która z podanych liczb $\{-5;\ -3,5;\ -2;\ 4;\ 7,5;\ 9\}$ należy do zbioru wartości funkcji f.

Rozwiązanie:

Funkcja f opisana jest dwoma wyrażeniami. Wprowadzimy dodatkowe oznaczenia.

$f_1(x) = x^2 + 3$, gdy $x \in (-\infty,\ 1\rangle$.

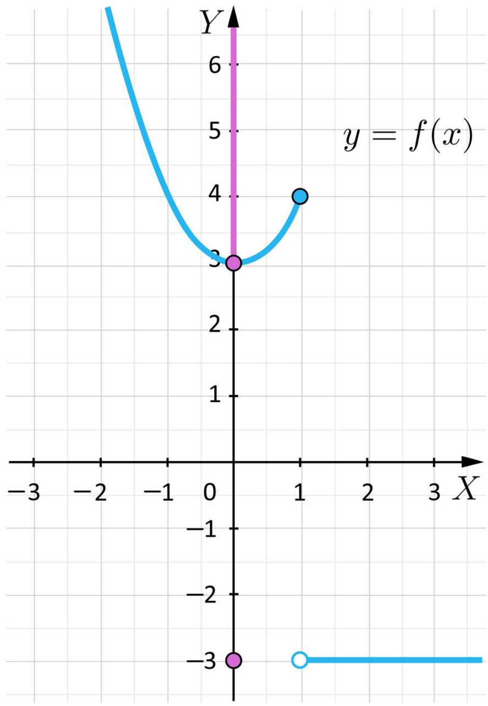
$f_2(x) = -3$, gdy $x \in (1,\ \infty)$.

Wykresem funkcji f_1 jest część paraboli. Zbiorem wartości funkcji f_1 jest przedział $\langle 3,\ \infty)$.

Wykresem funkcji f_2 jest półprosta równoległa do osi X. Początek półprostej nie należy do wykresu funkcji. Zbiór wartości funkcji f_2 jest zbiorem jednoelementowym $\{-3\}$.

Zbiorem wartości funkcji f jest suma przedziałów. Możemy zapisać to $ZW_f = \langle 3,\ \infty) \cup \{-3\}$.

Sprawdzimy nasze przypuszczenia analizując wykres funkcji f.



Zbiór wartości funkcji odczytujemy na osi Y.

$ZW_f = \langle 3,\ \infty) \cup \{-3\}$

Korzystając z wyznaczonego zbioru wartości funkcji f, sprawdzamy, która z podanych liczb należy do zbioru wartości funkcji.

Zauważamy, że do zbioru wartości funkcji f, należy tylko jedna liczba ujemna. Tą liczbą jest (-3). Wśród podanych liczb nie ma tej liczby. Do zbioru wartości należą liczby dodatnie większe lub równe liczbie 3. Na podstawie tych informacji możemy zapisać, że spośród podanych liczb do zbioru wartości funkcji f należą liczby 4; $7,5$; 9.

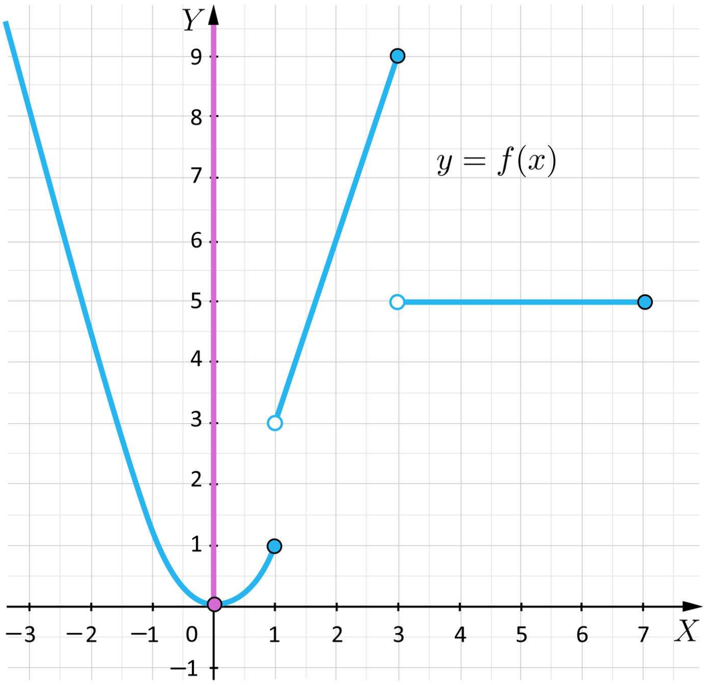
Przykład 3

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x \in (-\infty,\ 1\rangle \\ 3x, & \text{gdy } x \in (1,\ 3\rangle \\ 5, & \text{gdy } x \in (3,\ 7\rangle \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Funkcja f opisana jest za pomocą trzech wyrażeń. Naszkicujemy wykres tej funkcji i zbiór wartości odczytamy z wykresu.



Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0,\ \infty)$.

Zapisujemy to symbolicznie $ZW_f = \langle 0,\ \infty)$.

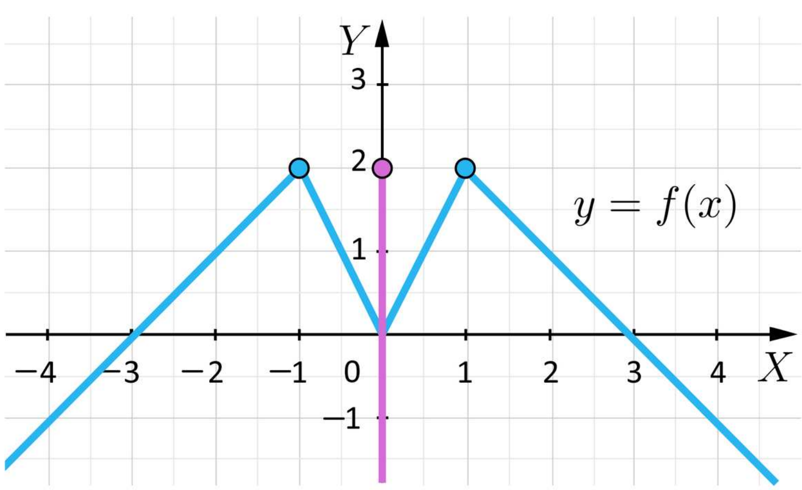
Przykład 4

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{gdy } x < -1 \\ 2 \cdot |x|, & \text{gdy } x \in \langle -1,\ 1\rangle \\ 3-x, & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Funkcja f opisana jest za pomocą trzech wyrażeń. Naszkicujemy wykres tej funkcji i zbiór wartości odczytamy z wykresu.



Zbiór wartości funkcji f odczytujemy na osi Y.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty,\ 2\rangle$.

Zapisujemy to symbolicznie $ZW_f = (-\infty,\ 2\rangle$.

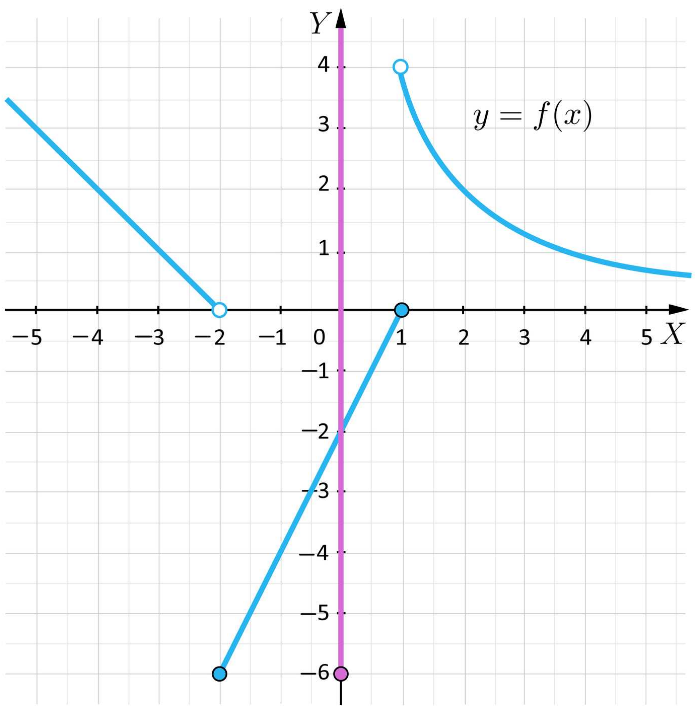
Przykład 5

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, & \text{gdy } x < -2 \\ 2x-2, & \text{gdy } x \in \langle -2,\ 1\rangle \\ \frac{4}{x}, & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Funkcja f opisana jest za pomocą trzech wyrażeń. W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji f naszkicujemy jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Zbiór wartości odczytamy na osi pionowej Y.



Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -6,\ \infty)$.

Zapisujemy to symbolicznie $ZW_f = \langle -6,\ \infty)$.

Przykład 6

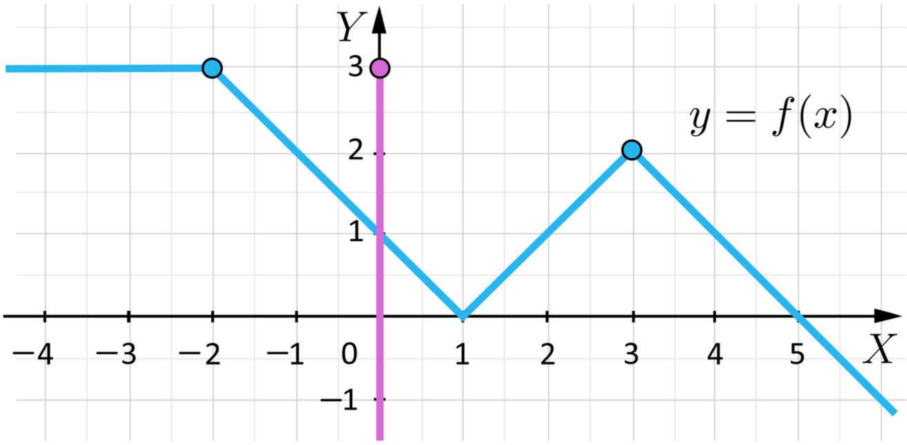
Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą wzoru.

$$f(x)=\begin{cases}3, & \text{gdy } x\le -2\\ |x-1|, & \text{gdy } x\in(-2,\ 3)\\ -x+5, & \text{gdy } x\ge 3\end{cases}$$

Uzasadnimy, że do zbioru wartości funkcji f należą liczby: -2; -1; $2,5$; 3.

Rozwiązanie:

Funkcja f opisana jest za pomocą trzech wyrażeń. W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji f naszkicujemy jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Zbiór wartości odczytamy na osi pionowej Y.



Odczytujemy z wykresu, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty,\ 3\rangle$.

Zapisujemy to symbolicznie $ZW_f=(-\infty,\ 3\rangle$.

Liczba 3 należy do zbioru wartości funkcji ponieważ wynika to ze wzoru opisującego funkcję. Dla każdej liczby rzeczywistej x takiej, że liczba x jest mniejsza lub równa (-2), wartość funkcji jest stała i równa 3.

Wartości ujemne może przyjmować funkcja opisana za pomocą trzeciego wyrażenia. Sprawdzimy to, wykonując odpowiednie obliczenia.

$-x+5=-2$

$-x=-7$

$x=7$

Liczba $7\in\langle 3,\ \infty)$, stąd wniosek, że (-2) należy do zbioru wartości funkcji f.

$-x+5=-1$

$-x=-6$

$x = 6$

Liczba $6 \in \langle 3,\ \infty)$, stąd wniosek, że (-1) należy do zbioru wartości funkcji f.

Wykażemy, że liczba $2,5$ należy do zbioru wartości funkcji f.

Rozwiązujemy odpowiednie równanie.

$|x - 1| = 2,5$

$x - 1 = -2,5$ lub $x - 1 = 2,5$

$x = -1,5$ lub $x = 3,5$

Liczba $-1,5 \in (-2,\ 3)$, stąd wniosek, że liczba $2,5$ należy do zbioru wartości funkcji f.

Podsumowanie

- W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji opisanej różnymi wzorami w różnych przedziałach, szkicujemy najpierw wykres tej funkcji, a następnie odczytujemy zbiór wartości na osi Y.
- Sprawdzenia, czy liczba a należy do zbioru wartości funkcji f, możemy dokonać dwoma sposobami:
    - sposób pierwszy – wyznaczamy zbiór wartości funkcji i sprawdzamy, czy liczba a należy do tego zbioru,
    - sposób drugi – rozwiązujemy równanie $f(x) = a$ i sprawdzamy, czy otrzymana liczba x należy do dziedziny funkcji f.

Słownik

zbiór wartości funkcji

zbiór liczb, które otrzymujemy w wyniku obliczenia wartości funkcji dla wszystkich jej argumentów

Film samouczek

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady pokazane w filmie. Rozwiąż je najpierw samodzielnie, a następnie porównaj rozwiązania. Po zapoznaniu się z filmem, wykonaj podane poniżej polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1iRr1Msr

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wyznaczania zbioru wartości funkcji.

Polecenie 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru

$$f(x) = \begin{cases} -3, & \text{gdy } x \in (-\infty,\ -2) \\ 2 - x^2, & \text{gdy } x \in \langle -2,\ 1) \\ |5 - x|, & \text{gdy } x \in \langle 1,\ \infty) \end{cases}$$

Oblicz wartości: $f\left(-\frac{117}{49}\right)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(10)$.

Polecenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \in (-\infty,\ 0) \\ \sqrt{x+4}, & \text{gdy } x \in \langle 0,\ \infty) \end{cases}$$

Spośród podanych liczb wybierz te, które należą do zbioru wartości funkcji f.

-31, -1, $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{17}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przykłady wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej różnymi wzorami w różnych przedziałach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł informacji.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza zbiór wartości funkcji, gdy funkcja jest opisana za pomocą różnych wzorów w różnych przedziałach
- sprawdza, czy podana liczba jest wartością funkcji
- udowadnia, że podana liczba jest elementem zbioru wartości funkcji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda diamentowego uszeregowania
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, pracując w grupach, metodą diamentowego uszeregowania porządkują poznane dotychczas sposoby wyznaczania zbioru wartości funkcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj".
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują uzyskane informacje, Wspólna dyskusja - w jaki jeszcze inny sposób niż przedstawiony w materiałach - można wyznaczyć zbiór wartości funkcji.
3. Uczniowie oglądają film przedstawiający sposób wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej za pomocą kilku wzorów w różnych przedziałach i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 - 4 wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 5-8.
2. Zadanie dla chętnych:
   Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.
   $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{gdy } x < 2 \\ x-2, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$
   Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie funkcji. Zależności funkcyjne
Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji

Wskazówki metodyczne:

Film można wykorzystać przy omawianiu własności funkcji liniowej.