



Równanie wymierne zapisane w postaci proporcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie wymierne zapisane w postaci proporcji

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem równań wymiernych zapisanych w postaci proporcji.

Proporcja jest to równość dwóch stosunków.

Słownik języka polskiego *PWN* mówi, że *reguła trzech* to reguła pozwalająca obliczyć jedną z niewiadomych proporcji $a : b = c : d$, gdy pozostałe są dane.

Reguła trzech używana była w Europie już od XV w. Stosowano ją podczas transakcji kupieckich.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie wymierne zapisane w postaci proporcji.
- Wyznaczysz dziedzinę równania wymiernego zapisanego w postaci proporcji.

Przeczytaj

Pamiętasz?

Proporcja jest to równość dwóch stosunków

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$b \neq 0, d \neq 0$$

gdzie:

a, d – wyrazy skrajne,

b, c – wyrazy środkowe.

Własność: Własność proporcji

Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Reguła: Reguła trzech

Jeżeli dane są trzy wyrazy proporcji czwarty wyraz można obliczyć ze wzoru:

$$a = \frac{b \cdot c}{d}$$

$$b = \frac{a \cdot d}{c}$$

$$c = \frac{a \cdot d}{b}$$

$$d = \frac{b \cdot c}{a}$$

Pokażemy przykłady rozwiązań **równań wymiernych** zapisanych w postaci proporcji, wykorzystujących **regułę trzech** i inne własności proporcji.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $\frac{x+1}{x-3} = \frac{1}{2}$.

Określimy dziedzinę równania.

$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Równanie jest zapisane w postaci proporcji. Korzystając z własności proporcji otrzymujemy:

$$2 \cdot (x + 1) = x - 3$$

$$2x + 2 = x - 3$$

$$x = -5 \in D$$

Rozwiązaniem równania jest liczba (-5) .

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x}{1}$.

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq -1 \text{ i } x \neq 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Korzystając z własności proporcji wiemy, że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

$$x + 1 = x(x^2 - 1)$$

$$(x + 1) - x(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)[1 - x(x - 1)] = 0$$

$$(x + 1)(1 - x^2 + x) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ lub } -x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = -1 \notin D, \Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \in D$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in D$$

Rozwiązaniem równania są liczby $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $\frac{x^2-121}{x-11} = \frac{x+11}{1}$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{11\}$$

Korzystając z własności proporcji mamy:

$$x^2 - 121 = (x - 11)(x + 11)$$

$$x^2 - 121 = x^2 - 121$$

$$0 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $\frac{2x}{x+1} = 1 - \frac{x-4}{x-1}$.

$$x + 1 \neq 0 \implies x \neq -1$$

$$x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Sprawdzimy prawą stronę równania do wspólnego mianownika.

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{x-1-x+4}{x-1}$$

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{3}{x-1}$$

Z własności proporcji mamy:

$$2x(x-1) = 3 \cdot (x+1)$$

$$2x^2 - 2x = 3x + 3$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 + 24 = 49, \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \in D$$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3 \in D$$

Równanie ma dwa rozwiązania: $-\frac{1}{2}, 3$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $2 - \frac{x-2}{x-3} = |x-4|$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\frac{2 \cdot (x-3) - x + 2}{x-3} = |x-4|$$

$$\frac{2x-6-x+2}{x-3} = \frac{|x-4|}{1}$$

$$\frac{x-4}{x-3} = \frac{|x-4|}{1}$$

1. dla $x - 4 \geq 0$

$$x \geq 4 \text{ i } x \neq 3$$

$$\frac{x-4}{x-3} = \frac{x-4}{1}$$

$$x - 3 = 1$$

$$x = 4 \in D$$

2. dla $x < 4$

$$\frac{x-4}{x-3} = \frac{-x+4}{1}$$

$$x - 3 = -1$$

$$x = 2 \in D$$

Równanie ma dwa rozwiązania: 2, 4.

Słownik

równanie wymierne

równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$ z jedną niewiadomą x , gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$)

reguła trzech

jeżeli dane są trzy wyrazy proporcji czwarty wyraz można obliczyć ze wzoru:

$$a = \frac{b \cdot c}{d}$$

$$b = \frac{a \cdot d}{c}$$

$$c = \frac{a \cdot d}{b}$$

$$d = \frac{b \cdot c}{a}$$

proporcja

równość dwóch stosunków

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i przeanalizuj sposoby rozwiązywania równania wymiernego zapisanego w postaci proporcji.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxnusVFR2>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równania wymiernego zapisanego w postaci proporcji.

Polecenie 2

Korzystając z trzech własności proporcji przedstawionych w animacji, rozwiąż równanie wymierne. Połącz równanie z liczbą, która spełnia równanie.

$$\frac{x+1}{x-4} = \frac{x-2}{x-5}$$

$$x = 6\frac{1}{2}$$

$$\frac{10}{x-2} = \frac{5}{x-4}$$

$$x = 6$$

$$\frac{4}{x-3} = \frac{1}{3}$$

$$x = 15$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę. Rozwiązaniem równania $\frac{2-x}{x+3} = \frac{2}{3}$, dla $x \neq -3$ jest liczba:

$x =$

Ćwiczenie 2



Zaznacz zdanie prawdziwe. Równanie $\frac{x^2-4}{x+1} = \frac{x^2}{x+2}$:

- ☐ ma dwa rozwiązania, których suma jest równa 4.
- ☐ ma dwa rozwiązania, które są liczbami przeciwnymi.
- ☐ jest sprzeczne.
- ☐ ma dwa rozwiązania, które są liczbami całkowitymi.

Ćwiczenie 3



Połącz równanie wymierne z liczbą, która spełnia to równanie.

$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{7}, x \neq -3$$

$$x = -4\frac{3}{5}$$

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{2}{7}, x \neq 3$$

$$x = \frac{13}{5}$$

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{2}{7}, x \neq 1$$

$$x = -\frac{13}{5}$$

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{2}{7}, x \neq -1$$

$$x = 4\frac{3}{5}$$

Ćwiczenie 4



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{x^2-4}{x}$, $x \neq -3$ i $x \neq 0$ ma:

☐ nieskończenie wiele rozwiązań

☐ 0 rozwiązań

☐ 1 rozwiązanie

☐ 2 rozwiązania

Ćwiczenie 5



Wybierz wszystkie równania, które nie posiadają rozwiązań.

☐ $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2-x}{3x}$

☐ $\frac{3x}{x-1} = 2 - \frac{x-1}{x+4}$

☐ $\frac{x^2+1}{x^2+3} = -2$

☐ $1 + \frac{x+3}{2} = \frac{x}{x-1}$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij rozwiązanie poniższego równania przeciągając odpowiednie wyrażenia lub liczby.

$$\frac{2x+1}{x+2} - \frac{3x}{x+2} = \frac{1}{3}, x \neq -2$$

$$D : \mathbb{R} \setminus \boxed{}$$

$$(2x + 1 + \boxed{}) : \boxed{} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{} : (x + 2) = \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot \boxed{} = x + 2$$

$$3 - \boxed{} = x + 2$$

$$\boxed{} = -1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$(1 - x)$
 $(x + 2)$
 $3x$
 $-3x$
 $-4x$
 $(1 - x)$
 -2

Ćwiczenie 7



Wpisz brakującą liczbę, będącą rozwiązaniem równania $\left| \frac{3-x}{x+1} \right| = x$.

$$x = \boxed{}$$

Ćwiczenie 8



Zaznacz poprawną odpowiedź. Ile liczb naturalnych spełnia równanie $\frac{2}{|x|-3} = \frac{x}{2}$?

☐ 1

☐ 3

☐ 0

☐ 2

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wymierne zapisane w postaci proporcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) rozwiązuje równania wymierne $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie wymierne zapisane w postaci proporcji
- wyznacza dziedzinę równania wymiernego zapisanego w postaci proporcji
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania wymiernego, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają w grupach definicję równania wymiernego.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się w parach wiadomościami dotyczącymi definicji i własności proporcji. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe i porównują swoje wiadomości.
2. Teraz uczniowie pracują w grupach 6 osobowych i omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie oglądają animację i omawiają rozwiązania z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Przykład 2 umieszczony pod animacją.

Materiały pomocnicze:

Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.