



Rachunek prawdopodobieństwa z przymrużeniem oka

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rachunek prawdopodobieństwa z przymrużeniem oka

Źródło: Phil Sheldon Abipp, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

W tym materiale utrwalimy i rozwinieśmy umiejętności związane z obliczaniem prawdopodobieństwa zdarzeń losowych. Popatrzymy na z reguły poważne typy zadań z przymrużeniem oka. Być może takie podejście do rachunku prawdopodobieństwa zachęci Cię do samodzielnego wymyślania zabawnych historyjek opartych na obliczeniach probabilistycznych, a może nawet do stawiania śmiałych hipotez, które mogą doprowadzić Cię do znakomitych odkryć matematycznych.

Jak na przykład niejakiego Georgesa Buffona. Buffon był osiemnastowiecznym francuskim hrabią, więc w młodości nie miał zbyt wiele roboty i mógł do południa wylegiwać się w łóżku wpatrując się w sufit. Pewnego dnia jednak zamiast patrzeć w sufit, zapatrzył się w podłogę i przyszedł mu do głowy taki problem (zwany dzisiaj *igłą Buffona*): na podłogę wyłożoną identycznymi nieskończenie długimi deskami jedna obok drugiej rzucamy igłę o nierozróżnialnych końcach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

igła będzie przecinać linię oddzielającą deski?

Problem może nie wydawać Ci się zbyt pasjonujący, ale z *igłą Buffona* związana jest na przykład ciekawa metoda eksperymentalnego przybliżania wartości liczby π .



Georges-Louis Leclerc, hrabia Buffon

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Twoje cele

- Rozwiążesz zadania z rachunku prawdopodobieństwa, korzystając z typowych wzorów probabilistycznych.
- Przyporządkujesz dane zadanie do określonego typu zadań z rachunku prawdopodobieństwa (np. zadanie na prawdopodobieństwo warunkowe, zadanie na prawdopodobieństwo całkowite, itp.).
- Usystematyzujesz i rozwiniesz umiejętności rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa różnymi sposobami.

Przeczytaj

Na początek przypomnienie – co to takiego to prawdopodobieństwo.

Niech Ω będzie skończoną przestrzenią wyników pewnego doświadczenia losowego.

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję, która każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ przyporządkowuje liczbę $P(A)$ tak, aby spełnione były warunki:

- $P(A) \geq 0$,
- $P(\Omega) = 1$,
- jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Wzór, z którego często korzystamy, wyznaczając prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, określa [klasyczna definicja prawdopodobieństwa](#).

Definicja: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Przykład 1

Wezyr Oszukista namówił sułtana Prostodusznego, aby rzucali na przemian złotą monetą. Jeżeli wypadnie awers, sułtan płaci wezyrowi dukata, jeżeli wypadnie rewers – wezyr płaci dukata sułtanowi. Moneta była tak sporządzona, aby awers (na którym widniał portret sułtana) wypadał dwa razy częściej niż rewers. Sułtan jednak nie zorientował się, że moneta jest fałszywa, gdyż był dumny widząc swoją podobiznę na monecie. Obliczmy prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie tą monetą wypadnie awers i rewers.

Oznaczmy:

A – w rzucie monetą wypadnie awers,

B – w rzucie monetą wypadnie rewers,

C – w dwukrotnym rzucie monetą wypadnie awers i rewers.

Wtedy:

$$\Omega = \{(A, R), (R, A), (A, A), (R, R)\}.$$

Awers wypada dwa razy częściej niż rewers, zatem:

$$P(\{A\}) = \frac{2}{3} \text{ i } P(\{R\}) = \frac{1}{3}.$$

Stąd:

$$P(\{A, R\}) = P(\{R, A\}) = \frac{2}{9},$$

$$P(\{R, R\}) = \frac{1}{9},$$

$$P(\{A, A\}) = \frac{4}{9}.$$

Zdarzeniu C sprzyjają dwa wyniki.

$$C = \{(A, R), (R, A)\}.$$

$$\text{Z tego wynika, że } P(C) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie tą monetą wypadnie awers i rewers jest równe $\frac{4}{9}$.

Przykład 2

Przed nieczynną fontanną stoi duży pojemnik zawierający pięć kul, ponumerowanych odpowiednio: 1, 2, 3, 4, 5. Stoi też sześć małych pojemników oznaczonych odpowiednio: A, B, C, D, E, H . Gdy turysta podchodzi do fontanny, maszyna pobiera wszystkie kule z dużego pojemnika i wrzuca je losowo do małych pojemników. Gdy dokładnie jeden z pojemników pozostaje pusty, z fontanny tryska woda. Oblicz prawdopodobieństwo, że fontanna zacznie działać.

Oznaczmy:

F – zdarzenie polegające na tym, że fontanna zacznie działać.

Zbiór zdarzeń elementarnych jest zbiorem wszystkich pięciowyrazowych ciągów o wyrazach: A, B, C, D, E, H . Czyli:

$$|\Omega| = 6^5.$$

Kule trafiają do pojemników w sposób losowy, więc wszystkie możliwe rozmieszczenia kul w pojemnikach są jednakowo prawdopodobne.

Zatem:

$$|F| = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120$$

Korzystamy z klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

$$P(F) = \frac{6 \cdot 120}{6^5} = \frac{120}{1296} = \frac{5}{54}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że fontanna zacznie działać jest równe $\frac{5}{54}$.

W kolejnym przykładzie przypomnimy, jak rozwiązujemy zadania z wykorzystaniem prawdopodobieństwa warunkowego.

Definicja: Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ oraz niech $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A , pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Przykład 3

Wejścia do Zamku Śpiącej Królowny broni smok. Śmiałkowi, który chce dostać się do zamku, smok proponuje, aby z talii zawierającej 52 karty wyciągnął losowo jedną po drugiej dwie karty bez zwracania. Jeśli druga z wylosowanych przez śmiałka karta jest dziewiątką, pod warunkiem, że pierwsza karta jest królem, może wejść do zamku. W przeciwnym razie śmiałek musi wykonać sto przysiadów i wrócić tam, skąd przybył. Oblicz prawdopodobieństwo, że śmiałkowi stojącemu przed bramą Zamku Śpiącej Królowny uda się obudzić królownę.

Zbiór zdarzeń elementarnych jest zbiorem wszystkich uporządkowanych par różnych kart, czyli zbiorem dwuelementowych wariacji bez powtórzeń spośród 52 elementów.

Z tego wynika, że:

$$|\Omega| = 52 \cdot 51$$

Oznaczmy:

A – zbiór tych par, w których druga karta jest dziewiątką,

B – zbiór tych par, w których pierwsza karta jest królem.

Wtedy:

$A \cap B$ – zbiór tych par, w których pierwsza karta jest królem, a druga dziewiątką.

$$|B| = 4 \cdot 51$$

$$|A \cap B| = 4 \cdot 4 = 16$$

Korzystamy ze wzoru na [prawdopodobieństwo warunkowe](#).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{16}{52 \cdot 51}}{\frac{4 \cdot 51}{52 \cdot 51}} = \frac{16}{4 \cdot 51} = \frac{4}{51}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że śmiałkowi stojącemu przed bramą Zamku Śpiącej Królowy uda się obudzić królową jest równe $\frac{4}{51}$.

W doświadczeniach wieloetapowych obliczanie prawdopodobieństwa związane jest ze wzorem na prawdopodobieństwo całkowite. Nim rozwiążemy zadanie pokazujące zastosowanie tego wzoru – przypomnimy odpowiednie pojęcia.

Definicja: Zupełny układ zdarzeń

Niech Ω będzie dowolnym zbiorem zdarzeń elementarnych. Mówimy, że zdarzenia $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą zupełny układ zdarzeń wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

- $P(B_i) > 0$, gdy $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$,
- $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset$, gdy $i \neq j$ oraz $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Twierdzenie: Wzór na prawdopodobieństwo całkowite (zupełne)

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą zupełny układ zdarzeń, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża się wzorem:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Przykład 4

Pałac Ponurego Księcia sprzątają tylko małe stworki przy czym 40% wszystkich stworków to krasnoludy, 10% to krasnoludki, 50% to skrzaty. Wiadomo też, że w czerwonych czapeczkach chodzi 10% krasnoludów, 20% krasnoludków i 60% skrzatów. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że spotkany w pałacu stworek nie nosi czerwonej czapeczki.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że losowo spotkany stworek nie nosi czerwonej czapeczki,

B – zdarzenie polegające na tym, że losowo spotkany stworek to krasnolud,

C – zdarzenie polegające na tym, że losowo spotkany stworek to krasnoludek,
 D – zdarzenie polegające na tym, że losowo spotkany stworek to skrzat.

Zauważmy, że zdarzenia B, C, D tworzą zupełny układ zdarzeń. Możemy więc skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(C) \cdot P(A|C) + P(D) \cdot P(A|D)$$

Zauważmy, że

$$P(B) = 0,4$$

$$P(C) = 0,1$$

$$P(D) = 0,5$$

Na podstawie treści zadania, możemy zapisać:

$$P(A|B) = 0,9$$

$$P(A|C) = 0,8$$

$$P(A|D) = 0,4$$

Uzyskane liczby wstawiamy do wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,4$$

$$P(A) = 0,36 + 0,08 + 0,2 = 0,64$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że spotkany w pałacu stworek nie nosi czerwonej czapeczki jest równe 0,64.

Rozwiązanie następnego zadania będzie wymagało zastosowania twierdzenia określającego prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach Bernoulliego. Przypominamy je.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach Bernoulliego

Prawdopodobieństwo, że w n próbach Bernoulliego sukces wypadnie dokładnie k razy wyraża się wzorem:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

gdzie:

p – prawdopodobieństwo sukcesu,

$q = 1 - p$ – prawdopodobieństwo porażki w jednej próbie, $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ i $0 < p < 1$.

Przykład 5

Pan Anielski gra z panami Diabelskim, Czartowskim i Wampirskim w pokera. Anielski opracował niezawodny system wygrania, ale musi w sześciu rozdaniach otrzymać asa kier 4 razy. Obliczymy, jakie byłoby prawdopodobieństwo wygrania pana Anielskiego, gdyby nie miał opracowanego niezawodnego systemu wygranej (i gdyby w sześciu rozdaniach otrzymał asa kier 4 razy).

Zakładamy, że karty rozdawane są w sposób losowy (za każdym razem gracze otrzymują po 13 kart).

Prawdopodobieństwo otrzymania asa kier przez każdego z graczy w danym rozdaniu jest równe $p = \frac{1}{4}$ i $n = 6$ (liczba rozdań).

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo $k = 4$ sukcesów w $n = 6$ próbach Bernoulliego.

$$P(S_6 = 4) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$P(S_6 = 4) = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{256} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(S_6 = 4) = 15 \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{9}{16}$$

$$P(S_6 = 4) = \frac{135}{4096}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wygrania przez pana Anielskiego, gdyby nie miał opracowanego niezawodnego systemu wygranej, byłoby równe $\frac{135}{4096}$.

Słownik

klasyczna definicja prawdopodobieństwa

niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych; prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

prawdopodobieństwo warunkowe

niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ oraz niech $P(B) > 0$; prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A , pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

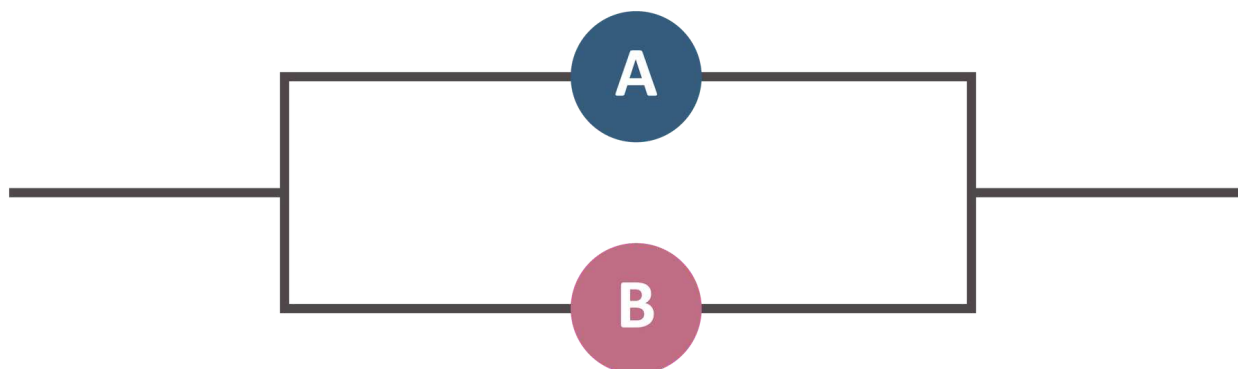
Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zapisane tam problemy, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Polecenie 2

Układ alarmowy w domu pana Bojaźliwego składa się z dwóch elementów połączonych równolegle.



Zdarzenia polegające na popsuciu się w ciągu czasu t poszczególnych elementów są niezależne. Prawdopodobieństwo niezawodności pojedynczego elementu jest równe $0,6$. Oblicz prawdopodobieństwo niezawodności całego układu w ciągu czasu t .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Przez wieś prowadzą dwie równoległe drogi. Przy pierwszej drodze stoją cztery domy, a przy drugiej trzy. Prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane domy, zaznaczone na planie, mogą być wierzchołkami trójkąta jest równe:

☐ $\frac{1}{7}$

☐ $\frac{6}{7}$

☐ $\frac{12}{35}$

☐ $\frac{3}{14}$

Ćwiczenie 2



W dwóch skrzyniach znajdują się monety zrabowane przez piratów. W pierwszej skrzyni są 4 sakiewki z monetami srebrnymi i 6 sakiewek z monetami złotymi. W drugiej skrzyni są 2 sakiewki z monetami srebrnymi i 5 sakiewek z monetami złotymi. Kukułka w zepsutym zegarze kuka w sposób losowy. Może zakukać raz, dwa razy, trzy razy, cztery razy, pięć razy lub sześć razy. Jeśli zakuka co najmniej trzy razy – możesz wyciągnąć dwie sakiewki z pierwszej skrzyni. W przeciwnym razie – wyciągasz dwie sakiewki z drugiej skrzyni. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągniesz dwie sakiewki ze złotymi monetami? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{247}{735}$

☐ $\frac{17}{42}$

☐ $\frac{347}{980}$

☐ $\frac{8}{21}$

Ćwiczenie 3



Uczniów Szkoły dla Czarodziejów zapytano o liczbę posiadanych smoków. Otrzymane wyniki zapisano w tabeli.

Liczba smoków	0	1	2	3	4	5
Liczba uczniów	6	11	7	3	2	1

Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie ułamki zwykłe nieskracalne.

Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń z tej szkoły ma więcej niż dwa smoki jest równe .

Wylosowano trzech uczniów z tej szkoły. Prawdopodobieństwo, że co najmniej dwie osoby mają smoki jest równe .

Losowo wybrano dwóch uczniów z tej szkoły. Prawdopodobieństwo, że jeden ma smoka, a drugi nie jest równe .

$\frac{52}{145}$

$\frac{174}{203}$

$\frac{184}{203}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{48}{145}$

$\frac{40}{145}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{180}{203}$

$\frac{2}{5}$

Ćwiczenie 4



W akwarium pana Lucyferskiego pływa 6 piranii i 10 skrzydlic.
Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie liczby, bądź wyrażenia.

Lucyferski wyławia dwie ryby. Prawdopodobieństwo wyłowienia piranii i skrzydlicy jest równe .

Lucyferski wyławia jedną rybę, wrzuca ją z powrotem i wyławia drugą rybę.

Prawdopodobieństwo, że wyłowił dwie ryby tego samego gatunku jest równe .

Do akwarium Lucyferskiego wpuszczono jeszcze x piranii. Okazało się wtedy, że prawdopodobieństwo wyłowienia dwóch ryb tego samego gatunku (losowanie bez zwrotu) jest równe prawdopodobieństwu wyłowienia dwóch ryb w różnych gatunkach. Równanie na wyznaczenie liczby wpuszczonych ryb można zapisać w postaci .

Ćwiczenie 5



Każdy z członków Rady Imperium Galaktycznego oznaczony jest trzycyfrowym numerem zbudowanym z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Żeby wybrać prezesa Rady najmłodszy sekretarz spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 losuje kolejno trzy cyfry (bez zwracania).

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Prawdopodobieństwo, że sekretarz wylosuje trzy cyfry, za pomocą których będzie można utworzyć numer 279 jest równe $\frac{1}{84}$.

☐ Prawdopodobieństwo, że sekretarz, zapisując cyfry w kolejności losowania (od lewej strony do prawej) otrzyma liczbę mniejszą od 451 jest równe $\frac{3}{8}$.

☐ Sekretarz zapisuje cyfry w kolejności losowania (od strony lewej do prawej).
☐ Prawdopodobieństwo, że otrzyma liczbę 359 (i tym samym oznaczona tym numerem osoba zostanie prezesem Rady) jest równe $\frac{3!}{504}$.

☐ Wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych w takim doświadczeniu losowym jest mniej niż 500.

Ćwiczenie 6



Na parterze dziesięciopiętrowego wieżowca wsiedli do windy trzech kominiarze, którzy wysiadali na losowo wybranych piętrach.

Połącz w pary stwierdzenie z odpowiednią liczbą.

Prawdopodobieństwo zdarzenia:
wszyscy kominiarze wysiądą na tym
samym piętrze: trzecim czwartym lub
piątym.

210

Prawdopodobieństwo zdarzenia: każdy
z kominiarzy wysiadł na innym piętrze,
ale powyżej trzeciego piętra.

0,003

Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu:
każdy z kominiarzy wysiadł na innym
piętrze, ale powyżej trzeciego piętra.

0,21

Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu:
wszyscy kominiarze wysiedli na tym
samym piętrze, ale powyżej drugiego
i poniżej szóstego piętra.

3

Ćwiczenie 7



Chcesz wejść do piramidy, którą strzeże Sfinks. Rzucasz pięć razy kostką do gry. Jeśli co najmniej pięć oczek wypadnie co najwyżej trzy razy, Sfinks otworzy wejście. Jeśli nie – zamieni cię w kamień. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wejdiesz do piramidy.

Ćwiczenie 8



Stwierdzono, że na dwudziestu mężczyzn przekraczających pewne przejście graniczne, jeden to przemytnik. Natomiast na pięćset kobiet przekraczających to przejście graniczne, jedna to przemytniczka. Zatrzymano grupę osób, w której jest tyle samo kobiet co mężczyzn i wybrano w sposób losowy jedną osobę z tej grupy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana osoba jest kobietą, jeśli okazało się, że jest przemytniczką.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rachunek prawdopodobieństwa z przymrużeniem oka

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa III lub IV, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje zadania z rachunku prawdopodobieństwa, korzystając z typowych wzorów probabilistycznych
- przyporządkuje dane zadanie do określonego typu zadań z rachunku prawdopodobieństwa (np. zadanie na prawdopodobieństwo warunkowe, zadanie na prawdopodobieństwo całkowite, itp.)
- systematyzuje i rozwija umiejętności rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa różnymi sposobami

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- karta kołowa
- alfabet pomysłów

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą alfabetu pomysłów przypominają wiadomości związane z rachunkiem prawdopodobieństwa. Pierwszy uczeń zaczyna od litery *A*, następny od litery *B*, itd. Zadaniem pierwszego ucznia jest przypomnienie pojęcia, symbolu, wzoru, itp. związanego z rachunkiem prawdopodobieństwa, zaczynającego się od litery *A* (lub związanego z tą literą). Np. wielką literą *A* oznacza się bardzo często zdarzenie losowe, którego prawdopodobieństwo należy obliczyć.
2. Kolejny uczeń nawiązuje do litery *B* – może przedstawić np. wzór Bayesa, itd.
3. Jeśli jakiś uczeń nie może powiązać danej litery z wiadomościami z rachunku prawdopodobieństwa, może poprosić o pomoc kolegów lub opuścić „kolejkę”.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Głównym celem zajęć jest utrwalenie i rozwinięcie umiejętności uczniów w zakresie wykorzystania znanych im już twierdzeń, wzorów, definicji rachunku prawdopodobieństwa. Zatem uczniowie przystępując do zajęć powinni już znać pojęcia, na których bazują przykłady w sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie pracują w 5 grupach metodą karty kołowej. Każda z grup otrzymuje do „rozpracowania” jeden z przykładów z sekcji „Przeczytaj”. Zadaniem grupy jest przeanalizowanie zadania i rozwiązanie go co najmniej jeszcze dwoma innymi sposobami niż sposób prezentowany w sekcji „Przeczytaj”. Uczniowie mogą korzystać

z dowolnych źródeł informacji. Mogą też sporządzić np. graficzne przedstawienie rozważanego problemu.

3. Przedstawiciele grup prezentują przygotowany przez siebie materiał, w taki sposób, aby pozostali uczniowie nauczyli się (lub przypomnieli sobie), jak rozwiązuje się zadania określonego typu.
4. Przy czym prezentacja musi być dowcipna, ciekawa i atrakcyjna. Może też być prezentowana „z przymrużeniem oka” ale rzetelnie.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, zwracając uwagę na sposób generowania pomysłów i pozyskiwania potrzebnych wiadomości.
Uczniowie dokonują oceny koleżeńskej prac grupy, zadają pytania, wyjaśniają wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Klasyczna definicja prawdopodobieństwa \(treść rozszerzona\)](#)

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć interaktywnych może być wykorzystana przy okazji omawiania tematyki związanej z wyznaczaniem prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń lub sumy zdarzeń losowych.