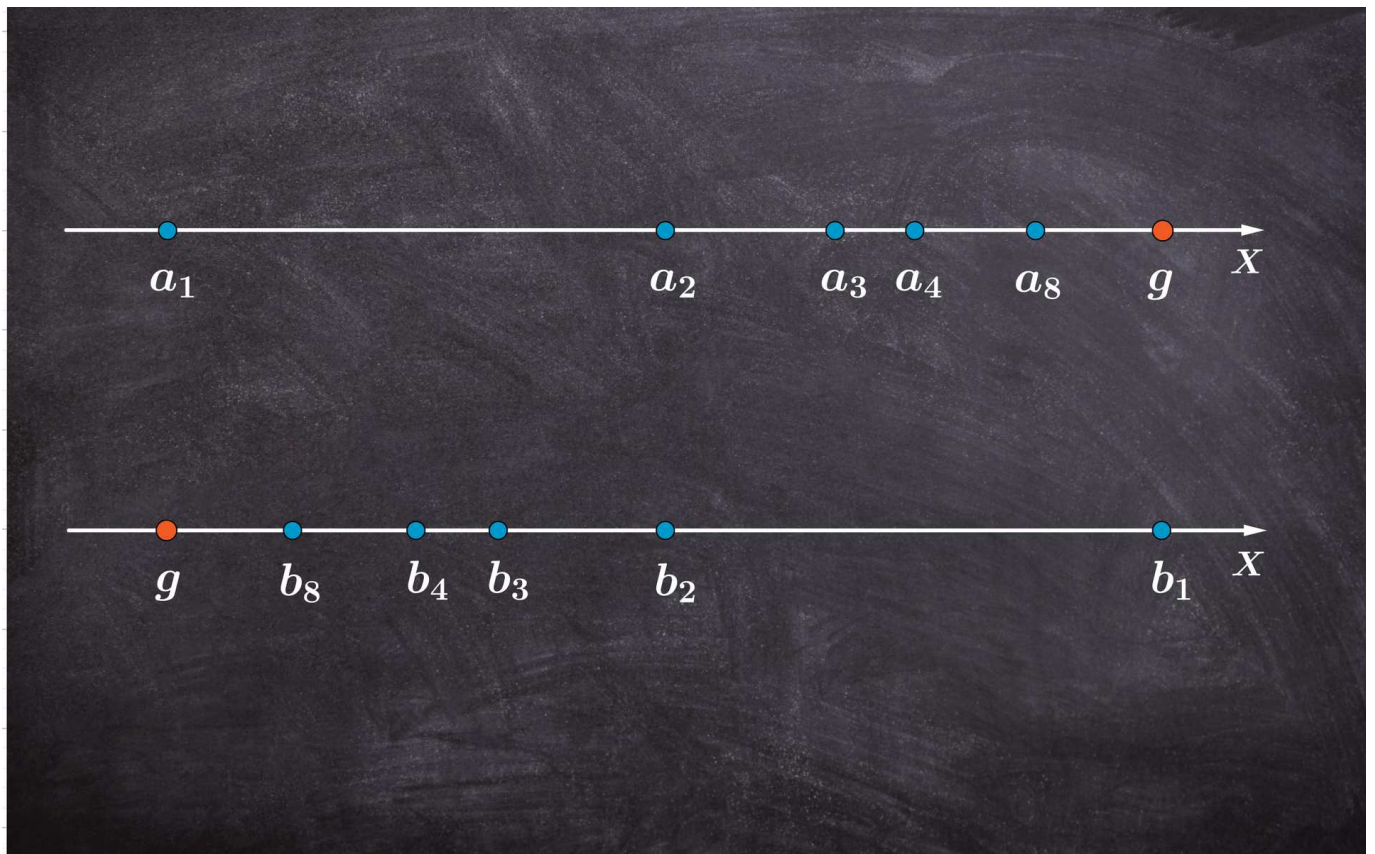
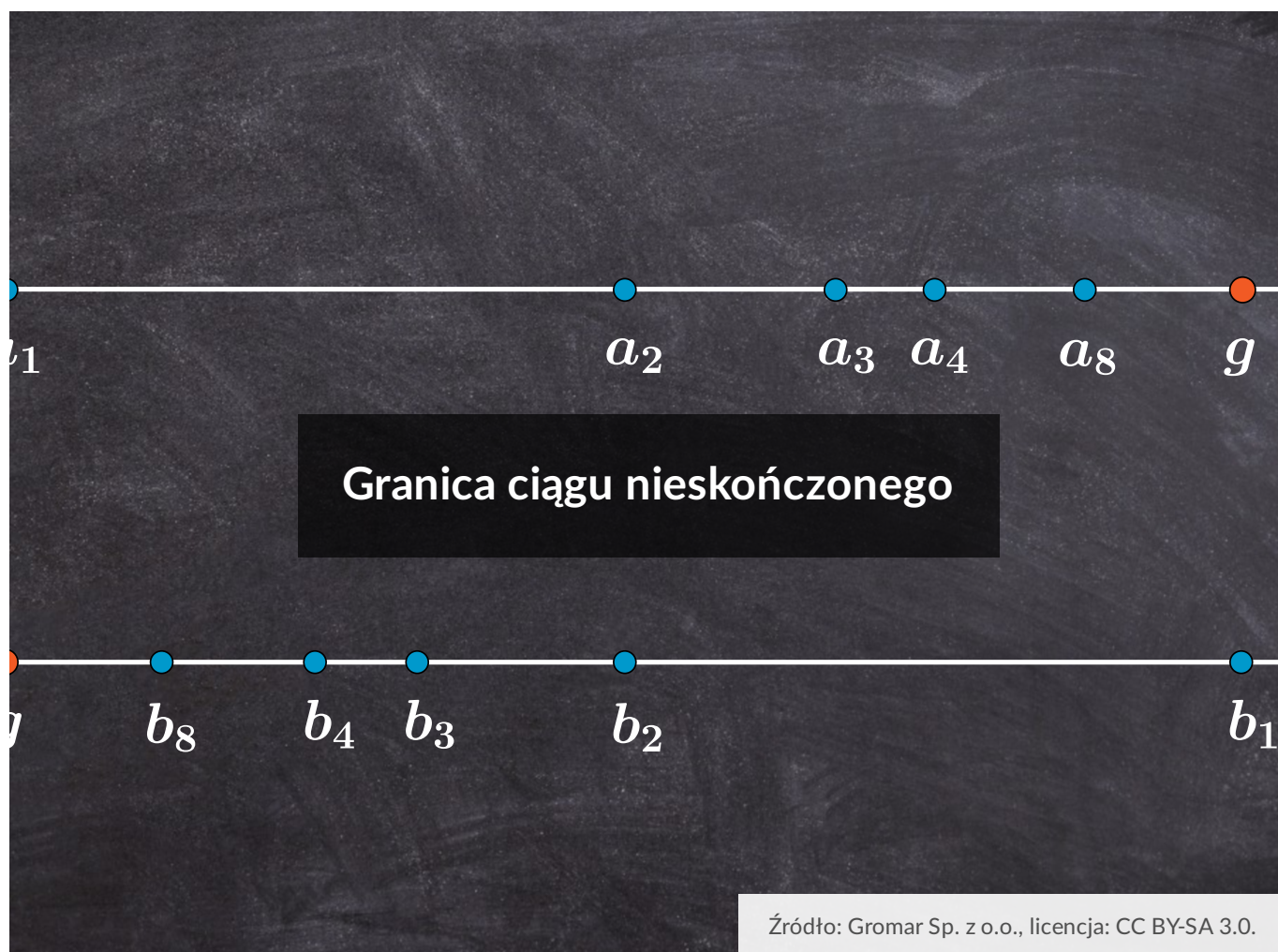




Granica ciągu nieskończonego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jedną z podstawowych własności ciągu zbieżnego jest posiadanie przez niego granicy. Obecnie stosowana definicja granicy ciągu została podana niezależnie przez dwóch matematyków. Pierwszym z nich był pochodzący z Czech Bernard Bolzano, który podał definicję granicy w roku 1816 w publikacji *Der binomische Lehrsatz*. Drugim był Francuz Augustin Louis Cauchy (*Cours d'analyse*, 1821).

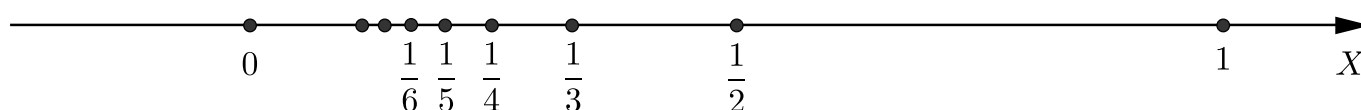
Twoje cele

- Poznasz definicję granicy ciągu zbieżnego.
- Poznasz przykłady ciągów posiadających granice.
- Zrozumiesz w jaki sposób definicja granicy ciągu powiązana jest z pojęciem otoczenia punktu.

Przeczytaj

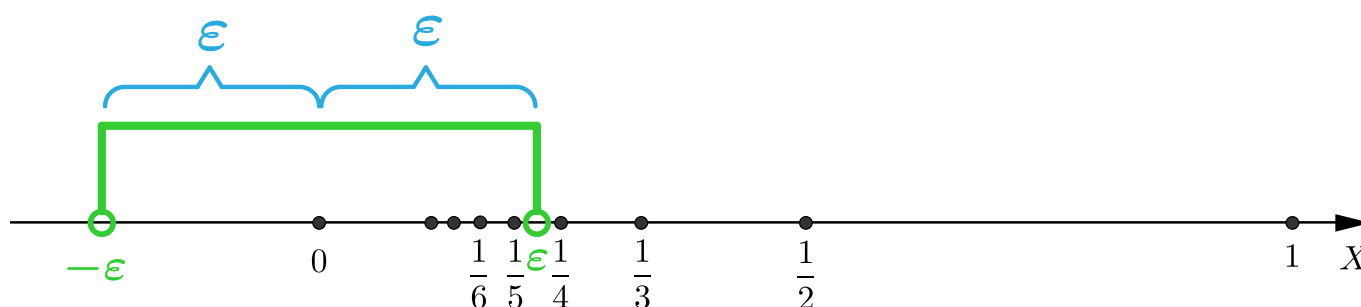
Co granica ciągu ma wspólnego z otoczeniem punktu?

Zanim podamy formalną definicję granicy ciągu nieskończonego, przyjrzyjmy się następującemu przykładowi. Rozważmy ciąg określony wzorem $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Podstawiając za n kolejne liczby naturalne, otrzymujemy ciąg $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$. Ciąg ten można przedstawić graficznie następująco



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Zwróćmy uwagę, że każdy kolejny wyraz tego ciągu znajduje się coraz bliżej zera. Wynika to z faktu, że wyrazami tego ciągu są ułamki zwykłe, których liczniki są zawsze równe jeden, natomiast mianowniki to kolejne liczby naturalne. Zatem ciąg ten jest malejący i oczywiście wszystkie jego wyrazy są dodatnie. Gdybyśmy teraz rozważyli dowolne otoczenie zera, czyli przedział $(-\varepsilon, \varepsilon)$, to niezależnie od wyboru dodatniej liczby ε (w szczególności biorąc dowolnie małą dodatnią liczbę ε) zawsze do takiego otoczenia należeć będą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu (tzn. wszystkie poza skończoną ilością).



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Patrząc na powyższy rysunek widzimy, że wybierając dodatnią liczbę ε dowolnie blisko zera, zawsze po jej prawej stronie będzie się znajdować skończona ilość wyrazów ciągu. Zatem na lewo znajdować się będą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Powyższa obserwacja pozwala sformułować intuicyjną definicję granicy ciągu. Mianowicie jest to taka liczba rzeczywista $g \in \mathbb{R}$, że w dowolnym jej otoczeniu znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Powyższą definicję można zapisać w sposób formalny następująco.

Definicja: Granica ciągu

Niech dany będzie ciąg nieskończony (a_n) . Powiemy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą tego ciągu, jeśli dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej ostatnią nierówność można zapisać następująco

$$-\varepsilon < a_n - g < \varepsilon,$$

czyli

$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon.$$

Ostatnia nierówność oznacza właśnie, że **prawie wszystkie wyrazy ciągu** a_n (dokładnie wszystkie począwszy od wyrazu o numerze $N + 1$) należą do przedziału $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$, czyli do **otoczenia** liczby g o promieniu ε , przy czym liczbę dodatnią ε można wybrać dowolnie małą.

Uwaga!

Nie każdy ciąg nieskończony posiada granicę. Przykłady takich ciągów podane będą w kolejnych tematach.

Jeśli ciąg (a_n) posiada granicę równą liczbie $g \in \mathbb{R}$, to fakt ten zapisujemy następująco

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = g.$$

Przykład 1

Powróćmy do początkowego przykładu ciągu $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że ciąg ten posiada granicę i jest ona równa 0. Zatem zgodnie z definicją dla każdej dodatniej liczby ε istnieje liczba naturalna N taka, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi nierówność $|a_n - 0| < \varepsilon$. Podstawiając wzór ciągu i korzystając z faktu, że wszystkie jego wyrazy są dodatnie, ostatnia nierówność jest równoważna nierówności $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Jest to nierówność prawdziwa, gdyż wybierając dowolną dodatnią liczbę ε (w szczególności dowolnie małą) zawsze znajdziemy na tyle

dużą liczbę naturalną N , aby $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Wówczas nierówność ta będzie też spełniona dla każdej liczby naturalnej $n > N$. Zatem istotnie prawdą jest, że

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Słownik

prawie wszystkie wyrazy ciągu

wszystkie wyrazy ciągu poza skończoną ich ilością

otoczenie punktu

Otoczeniem punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką, na której przedstawiono interpretację geometryczną ciągów (a_n) oraz (b_n) , które posiadają taką samą granicę g .

Następnie na podstawie podanych w infografice wartości niektórych wyrazów tych ciągów, odpowiedz na zamieszczone poniżej pytania.

Polecenie 2

Jaka jest granica obu ciągów przedstawionych na powyższej infografice?

Polecenie 3

Zapisz wzór na wyraz ogólny każdego z ciągów przedstawionych na powyższej infografice.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Czy prawie wszystkie wyrazy ciągu $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ należą do przedziału $(\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$?

☐ Nie

☐ Tak

Ćwiczenie 2



Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. Wskaż przedziały, do których należą prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n .

☐ $(2, 4)$

☐ $(-1, 1)$

☐ $(-2, 2)$

☐ $(0, 2)$

Ćwiczenie 3



Korzystając z definicji granicy ciągu, uzupełnij poniższy tekst wiedząc, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$.

Dla każdej liczby istnieje liczba naturalna N taka, że dla każdej liczby naturalnej prawdziwa jest nierówność .

Ćwiczenie 4



Dany jest ciąg $a_n = \frac{2}{n}$. Wskaż liczbę naturalną N taką, że $a_n < \frac{1}{2}$ dla każdego $n > N$.

☐ $N = 3$

☐ $N = 1$

☐ $N = 2$

☐ $N = 4$

Ćwiczenie 5



Dany jest ciąg $a_n = \frac{1}{2n}$. Wskaż liczby naturalne N takie, że $a_n < \frac{1}{5}$ dla każdego $n > N$.

☐ $N = 4$

☐ $N = 3$

☐ $N = 1$

☐ $N = 2$

Ćwiczenie 6



Dany jest ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$. Czy istnieje liczba naturalna N taka, że $a_n < \frac{1}{3}$ dla każdego $n > N$?

☐ Nie

☐ Tak

Ćwiczenie 7



Znając granicę ciągów połącz je w pary z przedziałami, do których należą prawie wszystkie ich wyrazy.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$$

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

$$(1, 2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

Ćwiczenie 8



Znając granice ciągów przenieś je do obszarów odpowiadających przedziałom, do których należą prawie wszystkie wyrazy ciągu.

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{9}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{8}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granica ciągu nieskończonego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- definiuje granicę ciągu zbieżnego,
- analizuje przykłady ciągów posiadających granice,
- opisuje w jaki sposób definicja granicy ciągu powiązana jest z pojęciem otoczenia punktu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu bazowego i ćwiczeń interaktywnych;
- metoda tekstu przewodniego;

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- duże arkusze papieru, flamastry dla każdej grupy.

Przebieg zajęć:

Faza wstępna

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą na temat granicy ciągu nieskończonego.

Faza realizacyjna

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 5-6 osobowe. Każda grupa ma za zadanie wyznaczenie kolejnych elementów otrzymanego ciągu i zaznaczenie ich na osi liczbowej. Ciągi jakie otrzymują uczniowie, to ciągi postaci $a_n = \frac{A}{n}$, gdzie A jest wybraną przez nauczyciela liczbą naturalną, inną dla każdej grupy. Następnie każda grupa prezentuje pozostałym uczniom swoją pracę. Uczniowie wspólnie na podstawie rysunków formułują wnioski na temat własności otrzymanych ciągów. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie pracują w parach, metodą tekstu przewodniego – wykorzystując odpowiednie treści z sekcji „Przeczytaj”. Nauczyciel na przykładzie ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ wyjaśnia definicję granicy ciągu.
3. Uczniowie wykonują zadania interaktywne zawarte w lekcji. Po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się ...”.

Praca domowa

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie robili na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Uczniowie mogą przeanalizować treść infografiki jako pracę własną przed lekcją lub po niej, jako podsumowanie.