Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym

Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym

Źródło: Darren Chin-Yue z Pixabay, domena publiczna.

Rzut oszczepem jest jedną z dyscyplin olimpijskich. Wygląda bardzo nieskomplikowanie – wystarczy wziąć rozbieg, zamach i rzucić. Jeżeli jednak zapytamy profesjonalnych sportowców o tajniki dalekiego rzutu, na pewno powiedzą nam o optymalnym kącie nachylenia oszczepu podczas rzutu, ale też o kącie wbicia oszczepu w podłoże. To ostatnie jest przykładem kąta nachylenia prostej (wyznaczonej przez oszczep) do płaszczyzny (podłoża). W następującym materiale przypomnimy, jak wyznaczać miarę takiego kąta oraz przyjrzymy się kątom nachylenia różnych prostych do ścian graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

Twoje cele

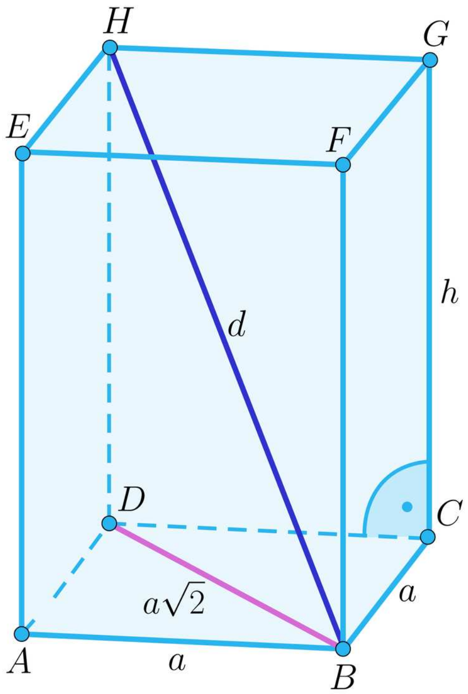
- Wskażesz, kąt nachylenia prostej zawierającej dany odcinek w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym do płaszczyzny zawierającej ścianę tego graniastosłupa.
- Obliczysz miarę kąta nachylenia prostej zawierającej dany odcinek w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym do płaszczyzny zawierającej ścianę tego graniastosłupa.
- Wykorzystasz wiedzę z trygonometrii i planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Przeczytaj

Na początku przypomnijmy wiadomości dotyczące graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

> **Definicja: graniastosłupa prawidłowego czworokątnego**
>
> Graniastosłup prawidłowy czworokątny to taki graniastosłup prosty, który ma w podstawie czworokąt foremny, czyli kwadrat.

Dany jest **graniastosłup prawidłowy czworokątny** o krawędzi podstawy długości a i krawędzi bocznej długości h.



Wtedy:

- długość przekątnej podstawy $p = a\sqrt{2}$,
- długość przekątnej graniastosłupa $d = \sqrt{2a^2 + h^2}$,
- suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa $S = 8a + 4h$.

Definicja: kąta pomiędzy prostą a płaszczyzną

- Jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to przyjmujemy kąt pomiędzy nimi 0°.
- Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to przyjmujemy kąt pomiędzy nimi 90°.
- W pozostałych przypadkach kąt pomiędzy prostą a płaszczyzną to kąt pomiędzy tą prostą a jej rzutem prostokątnym na daną płaszczyznę. Tę sytuację obrazuje poniższy aplet.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15zhJitY

Chcąc wyznaczyć kąt pomiędzy prostą m a płaszczyzną π wyznaczamy rzut prostokątny prostej m na płaszczyznę π. Poniższe kroki możesz uzyskać nawigując strzałkami od kroku 1 do 5.

1. Wyznaczamy punkt wspólny prostej i płaszczyzny (w aplecie punkt A).
2. Z dowolnego wybranego punktu na prostej m (w aplecie punkt B) prowadzimy prostą k prostopadłą do płaszczyzny π.
3. Wyznaczamy punkt wspólny prostej k i płaszczyzny π - punkt B'.
4. Prowadzimy prostą przez punkty A i B', która leży na płaszczyźnie π (w aplecie to prosta m'). Jest ona rzutem prostokątnym prostej m na płaszczyznę π.

5. Kąt pomiędzy prostymi m i m' jest kątem pomiędzy prostą m a płaszczyzną π.

Przyjrzyjmy się kątom pomiędzy prostymi zawierającymi niektóre odcinki w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym, a płaszczyznami zawierającymi ściany tej bryły.

Kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy

Rzutem prostokątnym przekątnej BG ściany bocznej $BCGF$ graniastosłupa prawidłowego czworokątnego na płaszczyznę podstawy $ABCD$ jest krawędź BC tej podstawy. Kąt nachylenia przekątnej ściany do płaszczyzny podstawy będzie zatem kątem pomiędzy przekątną ściany a krawędzią podstawy. Zauważmy, że w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie ściany są takimi samymi prostokątami, a więc kąt nachylenia przekątnej każdej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy będzie taki sam.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15zhJitY

W zależności od długości krawędzi podstawy a oraz krawędzi bocznej h tego graniastosłupa możemy zapisać następujące zależności trygonometryczne:

$$\sin\alpha = \frac{h}{|BG|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|BG|}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a}$$

Przykład 1

Kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wynosi 60°, a długość krawędzi bocznej jest równa 6. Obliczymy długość przekątnej podstawy tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przez a oznaczmy długość krawędzi podstawy graniastosłupa. Wtedy:

$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{6}{a}$

$\sqrt{3} = \frac{6}{a}$

$a = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

Długość przekątnej podstawy tego graniastosłupa jest równa $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$.

Kąt nachylenia przekątnej podstawy do płaszczyzny ściany bocznej

Rzutem prostokątnym przekątnej BD podstawy $ABCD$ na płaszczyznę ściany bocznej $ADHE$ jest krawędź AD tej podstawy. Kąt nachylenia przekątnej podstawy do płaszczyzny ściany bocznej będzie zatem kątem pomiędzy przekątną BD podstawy a krawędzią AD podstawy. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym podstawą jest kwadrat, a więc jest to kąt $\alpha = 45^\circ$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15zhJitY

Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy

Rzutem prostokątnym przekątnej CE graniastosłupa prawidłowego czworokątnego na płaszczyznę podstawy $ABCD$ jest przekątna AC tej podstawy. Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzy podstawy będzie zatem kątem pomiędzy przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15zhJitY

W zależności od długości krawędzi podstawy a, krawędzi bocznej h oraz długości przekątnej graniastosłupa $d = \sqrt{2a^2 + h^2}$ możemy zapisać następujące zależności trygonometryczne:

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}$$

$$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a\sqrt{2}}$$

Przykład 2

Suma długości wszystkich krawędzi w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym jest równa 40, a tangens kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Wyznaczymy długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przez a oznaczmy długość krawędzi podstawy graniastosłupa, a przez h długość krawędzi bocznej.

Wtedy z informacji sumie długości krawędzi otrzymujemy:

$8a + 4h = 40$

Jednocześnie z informacji o tangensie kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy mamy:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a\sqrt{2}}$

$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{h}{a\sqrt{2}}$

$h = \frac{4}{3}a.$

Wstawiając tę zależność do wzoru na sumę długości krawędzi otrzymujemy:

$8a + 4 \cdot \frac{4}{3}a = 40$

$\frac{40}{3}a = 40$

$a = 3.$

Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa wynosi 3.

Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny ściany bocznej

Rzutem prostokątnym przekątnej CE graniastosłupa prawidłowego czworokątnego na płaszczyznę ściany $CGHD$ jest przekątna CH tej ściany. Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny ściany będzie zatem kątem pomiędzy przekątną graniastosłupa a przekątną ściany.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15zhJitY

W zależności od długości krawędzi podstawy a, krawędzi bocznej h oraz przekątnej graniastosłupa $d = \sqrt{2a^2 + h^2}$ możemy zapisać następujące zależności trygonometryczne:

$$\sin\alpha = \frac{a}{d}$$

$$\cos\alpha = \frac{|CH|}{d}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{|CH|},$$

gdzie z tw. Pitagorasa $|CH| = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Przykład 3

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej. Wyznaczymy sinus kąta nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do płaszczyzny ściany bocznej.

Rozwiązanie

Oznaczając przez a długość krawędzi podstawy graniastosłupa, h długość krawędzi bocznej, a d długość przekątnej graniastosłupa, mamy:

$\sin\alpha = \frac{a}{d}$

$a = 2h.$

Wyznaczamy długość przekątnej graniastosłupa.

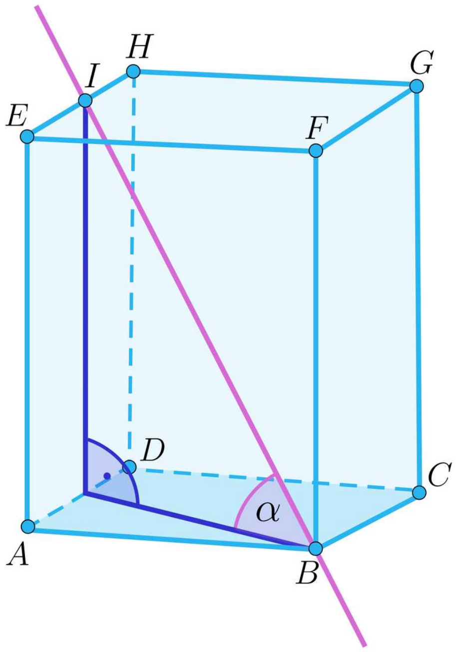
$d = \sqrt{2a^2 + h^2} = \sqrt{2 \cdot (2h)^2 + h^2} = \sqrt{9h^2} = 3h$

Odp. Jeżeli przez α oznaczymy kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny ściany bocznej, to $\sin\alpha = \frac{a}{d} = \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3}$.

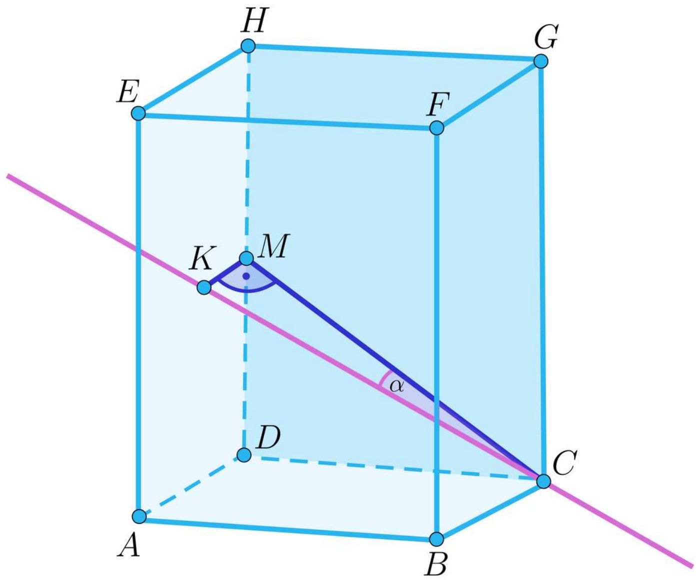
Inne przykłady kątów nachylenia prostych do ścian graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Proste w graniastosłupie mogą przechodzić przez inne punkty niż wierzchołki, na przykład przez środki krawędzi albo punkty przecięcia przekątnych ściany.

Kąt nachylenia prostej przechodzącej przez wierzchołek B i środek krawędzi HE do płaszczyzny podstawy



Kąt nachylenia prostej przechodzącej przez wierzchołek C i punkt K przecięcia przekątnych ściany $ADHE$ do płaszczyzny ściany $CGHD$.



Słownik

graniastosłup prosty

to graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a więc wszystkie ściany boczne są prostokątami

rzut prostokątny

to odwzorowanie przestrzeni na daną płaszczyznę, które każdemu punktowi przestrzeni przypisuje punkt na płaszczyźnie, przez który przechodzi prosta prostopadła do płaszczyzny i przechodząca przez dany punkt przestrzeni

twierdzenie Pitagorasa

jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą prezentacją multimedialną, a następnie rozwiąż polecenia 2 i 3.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DEkJkRPOr

Polecenie 2

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o przekątnej graniastosłupa długości d oraz kącie nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny ściany bocznej α. Wyznacz pole podstawy graniastosłupa w zależności od d i α.

Polecenie 3

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o przekątnej d oraz kącie nachylenia przekądnej do płaszczyzny podstawy α. Wykaż, że długość przekątnej ściany bocznej tego graniastosłupa jest równa $d\sqrt{\frac{\sin^2\alpha+1}{2}}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

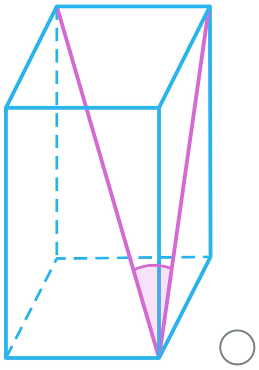
Uzupełnij tekst.

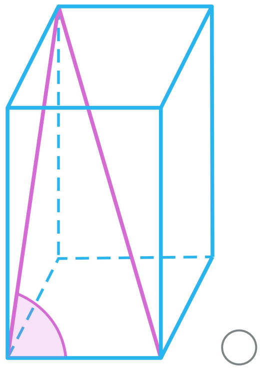
Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy to kąt pomiędzy ______.
Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny ściany bocznej to kąt pomiędzy ______.

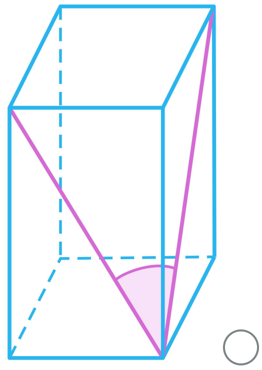
- przekątną graniastosłupa a przekątną ściany bocznej
- przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną
- przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy
- przekątną graniastosłupa a krawędzią podstawy

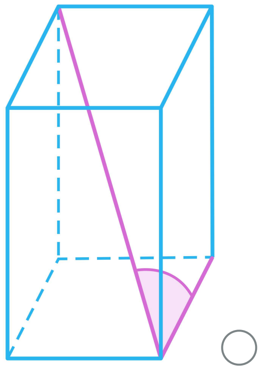
Ćwiczenie 2

Wskaż grafikę, na której zaznaczono kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny ściany bocznej.









Ćwiczenie 3

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy. Cosinus kąta między przekątną ściany tego graniastosłupa a płaszczyzną podstawy wynosi:

- $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{10}$
- $\frac{\sqrt{10}}{10}$

Ćwiczenie 4

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 3, a kąt nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy jest równy 30°. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa:

- $12+4\sqrt{6}$
- $24+4\sqrt{3}$
- $12+4\sqrt{3}$
- $24+4\sqrt{6}$

Ćwiczenie 5

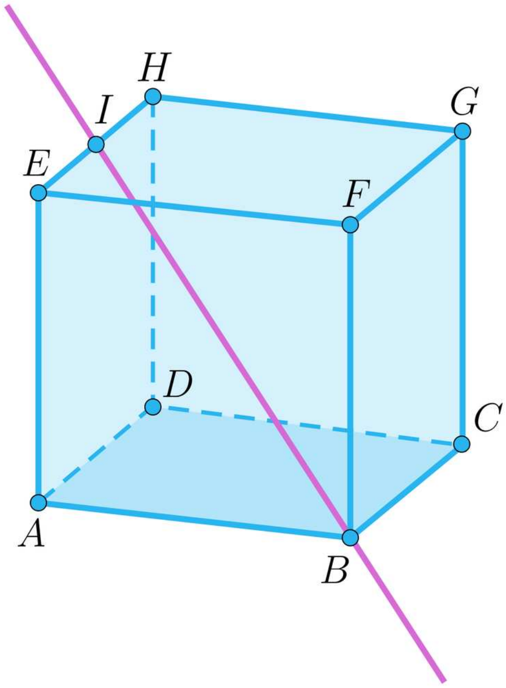
Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12. Przekątna tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny ściany bocznej pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{4}{5}$. Oblicz długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 6

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o długości krawędzi bocznej 6. Suma pola kwadratu w podstawie oraz pola prostokąta będącego ścianą boczną wynosi 27. Czy kąt α nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy jest większy niż 60°? Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 7

Wyznacz sinus kąta nachylenia prostej BI do płaszczyzny podstawy $ABCD$ w sześcianie, którego rysunek widzisz poniżej, wiedząc, że punkt I jest środkiem krawędzi HE.



Ćwiczenie 8

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy ma taką samą miarę jak kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny ściany bocznej. Wyznacz tangens i przybliżoną miarę tego kąta.

Dla nauczyciela

Autor: Bartłomiej Cymbalista

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty pomiędzy prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje kąt nachylenia prostej zawierającej dany odcinek w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym do płaszczyzny zawierającej ścianę tego graniastosłupa,
- oblicza miarę kąta nachylenia prostej zawierającej dany odcinek w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym do płaszczyzny zawierającej ścianę tego graniastosłupa,
- wykorzystuje wiedzę z trygonometrii i planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- lekcja odwrócona,
- rozmowa nauczająca,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca całą klasą.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treścią z sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Kąty pomiędzy prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym", wskazuje cele zajęć.
2. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o narysowanie na tablicy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego i zaznaczenie kąta pomiędzy:
   - przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy,
   - przekątną graniastosłupa a płaszczyzną ściany bocznej,
   - przekątną ściany bocznej a płaszczyzną podstawy.
3. W przypadku pytań, nauczyciel wyjaśnia przykłady z sekcji „Przeczytaj" na tablicy.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia 1-4 z sekcji „sprawdź się", nauczyciel pyta poszczególnych uczniów o poprawne odpowiedzi. Pozostali uczniowie dyskutują i argumentują ich poprawność. W razie wątpliwości, uczniowie przedstawiają na tablicy poprawne rozwiązanie.
2. Uczniowie, w parach, oglądają prezentację multimedialną oraz rozwiązują polecenia 2-3 znajdujące się pod prezentacją. Wybrani uczniowie przedstawiają poprawne rozwiązania na tablicy.
3. Uczniowie pozostają w parach i rozwiązują zadania 5-8. Nauczyciel nadzoruje pracę uczniów i w razie potrzeby podaje podpowiedzi. Po zakończonej pracy nauczyciel

prosi wybranych uczniów o omówienie rozwiązań zadań na tablicy. Nauczyciel może zebrać prace pisemne niektórych par i ocenić.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zaznacza na tablicy w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym różne proste oraz płaszczyzny i pyta uczniów, gdzie znajduje się kąt pomiędzy nimi. Uczniowie zgłaszają się i udzielają odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

- Graniastosłup prosty
- Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach

Wskazówki metodyczne:

Jeżeli nauczyciel postanowi nie stosować metody lekcji odwróconej, a omawiać teoretyczne zagadnienia podczas lekcji, sekcję prezentacja multimedialna oraz poleceń pod nim może wykorzystać jako zadanie domowe.

„Prezentację multimedialną” można również wykorzystać w realizacji lekcji „Graniastosłup prosty, wzajemne położenie ścian i krawędzi w graniastosłupie”.