



Pojęcia, definicje i twierdzenia związane z trójkątem, funkcją, potęgami, pierwiastkami, proporcjonalnością prostą i kątami przy dwóch prostych

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), filmy.

Słowniczek – pojęcia, definicje i twierdzenia związane z trójkątem (pole trójkąta – twierdzenie, cechy przystawania, twierdzenie Pitagorasa i odwrotne), funkcją (definicja, monotoniczność, własności), potęgami i pierwiastkami (prawa działań), proporcjonalnością prostą, kątami przy dwóch prostych (kąty naprzemianległe, odpowiadające, wierzchołkowe, przyległe).

Pojęcia, definicje i twierdzenia związane z trójkątem, funkcją, potęgami, pierwiastkami, proporcjonalnością prostą i kątami przy dwóch prostych

W tym materiale przypomnisz sobie pewne pojęcia, definicje i twierdzenia związane z liczbami rzeczywistymi, kątami, planimetrią, funkcjami oraz proporcjonalnością.

Liczby rzeczywiste

Definicja: Działania na potęgach

Dla dowolnej liczby dodatniej a i dowolnych liczb wymiennych x i y prawdziwe są równości:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach)
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (wzór na iloraz potęg o tych samych podstawach)
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ (wzór na potęgę potęgi)

Twierdzenie: Działania na potęgach

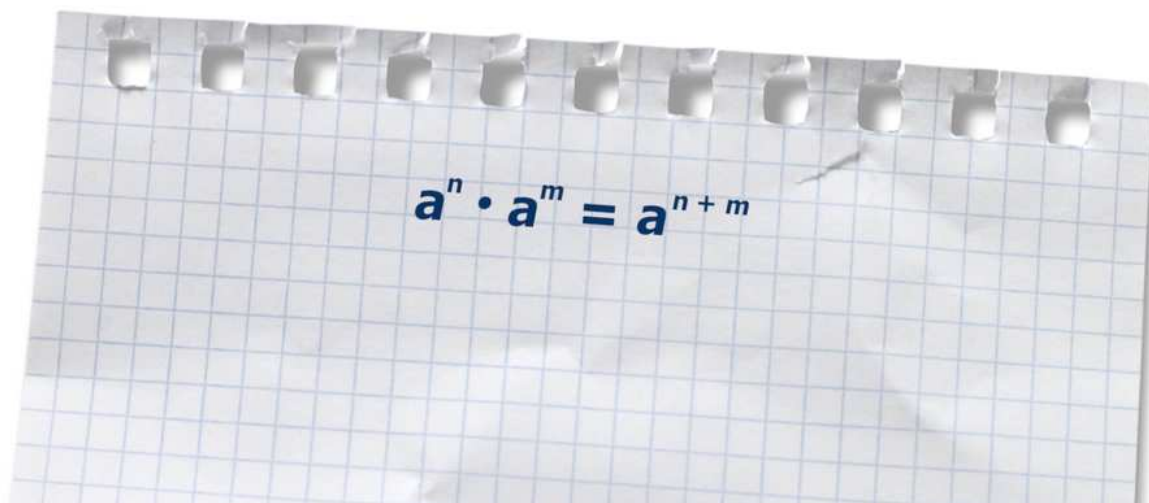
- Iloczyn potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$



Aby pomnożyć dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, dodajemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1Z1tjwk482bF>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób mnożymy potęgi o takich samych podstawach.

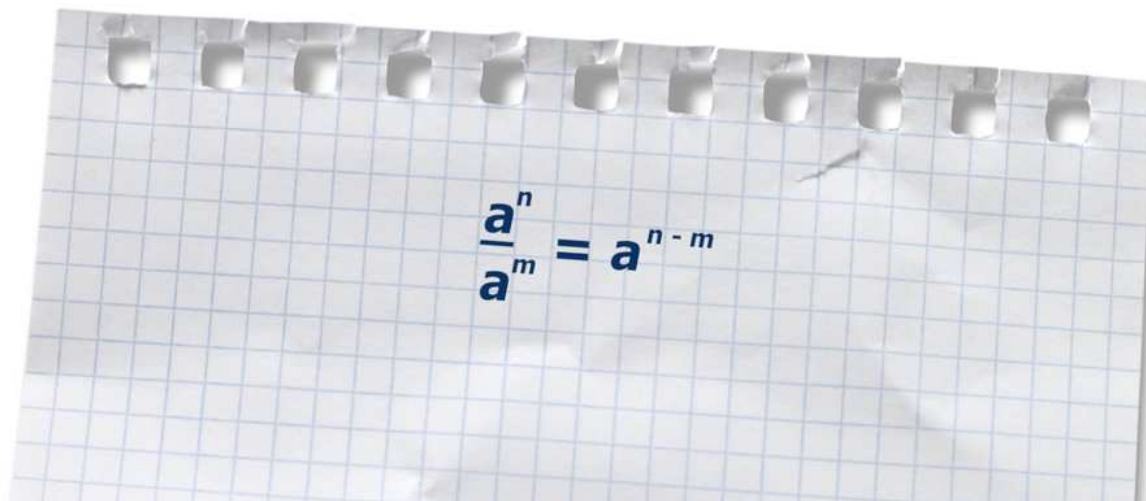
-
- Iloraz potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$



Aby podzielić dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, odejmujemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.


$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1HUeWq4VRmFi>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób dzielimy potęgi o takich samych podstawach.

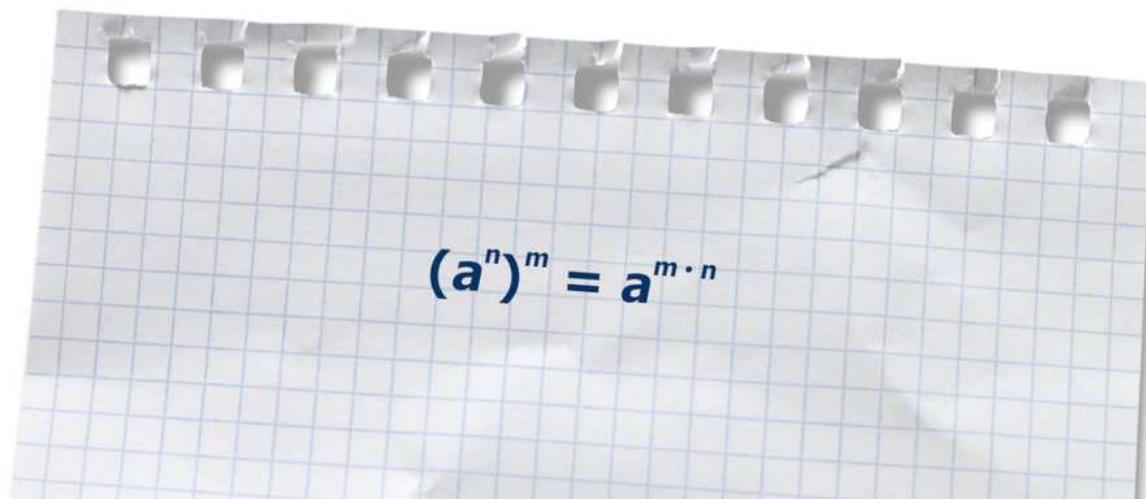
- Potęga potęgi

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$



Potęgując potęgę mnożymy wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.


$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RDBoa22Rshi5M>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób potęgujemy potęgę.

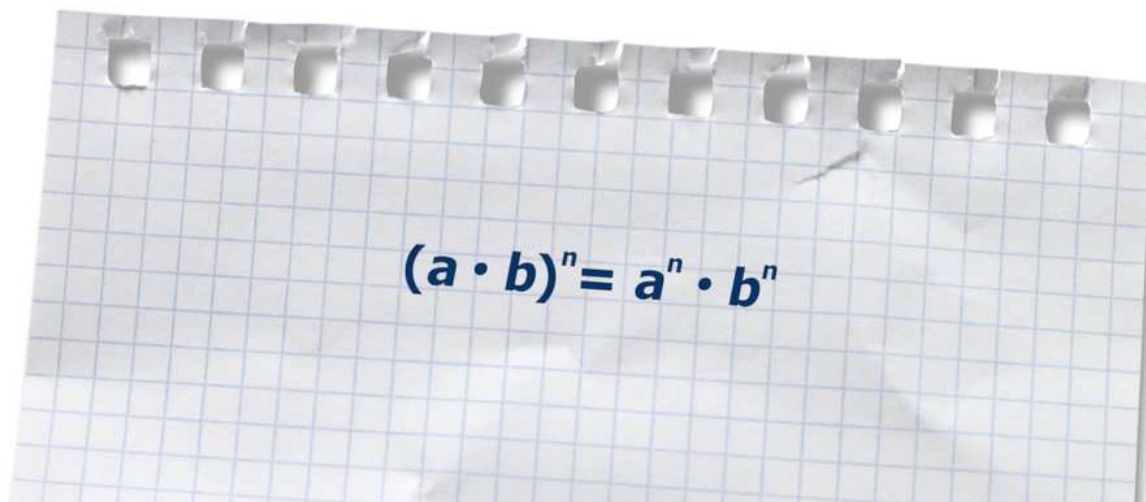
- Iloczyn potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$



Dla dowolnych liczb a i b różnych od zera oraz dowolnej liczby naturalnej n , n -ta potęga iloczynu tych liczb jest równa iloczynowi n -tych potęg tych liczb.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RGkqhPYvk1uXR>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób potęgujemy iloczyn liczb.

- Iloraz potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

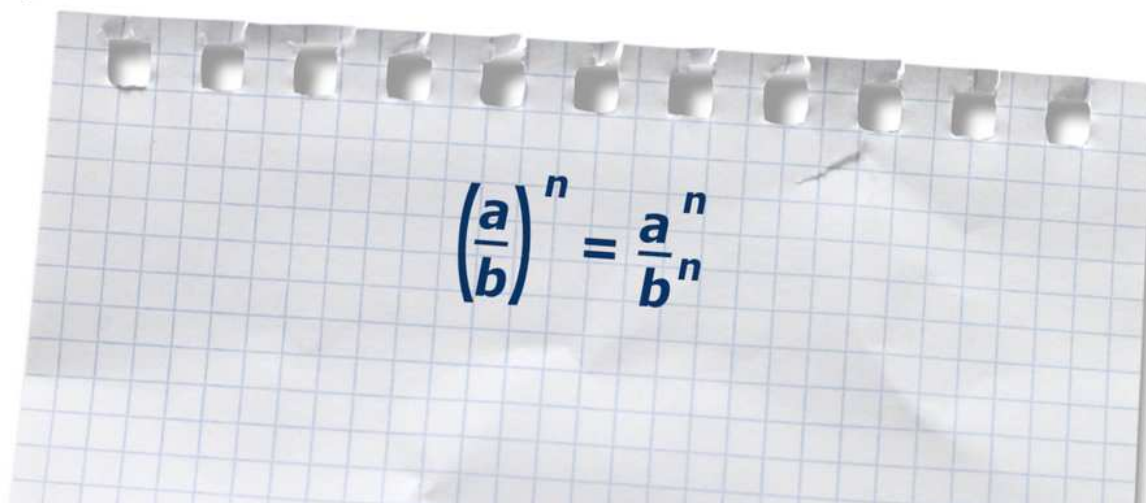
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$



Dla dowolnych liczby a i b różnych od zera oraz liczby naturalnej n :



Potęga ilorazu dowolnych liczb różnych od zera jest równa ilorazowi potęg tych liczb.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RS6b7c3hac1S>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób potęgujemy iloraz liczb.

Definicja: Potęga o wykładniku $\frac{1}{n}$

Dla dowolnej liczby nieujemnej a i liczby naturalnej n większej od 1 przyjmujemy

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Twierdzenie: Działania na pierwiastkach

Jeśli a i b są liczbami nieujemnymi, n i m są liczbami naturalnymi większymi od 1, k jest dodatnią liczbą naturalną, to

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Jeśli w powyższym twierdzeniu liczby n i m (stopnie pierwiastków) są nieparzyste, to twierdzenie pozostanie prawdziwe również dla ujemnych liczb podpierwiastkowych (a lub b).

Reguła: zaokrąglania liczb

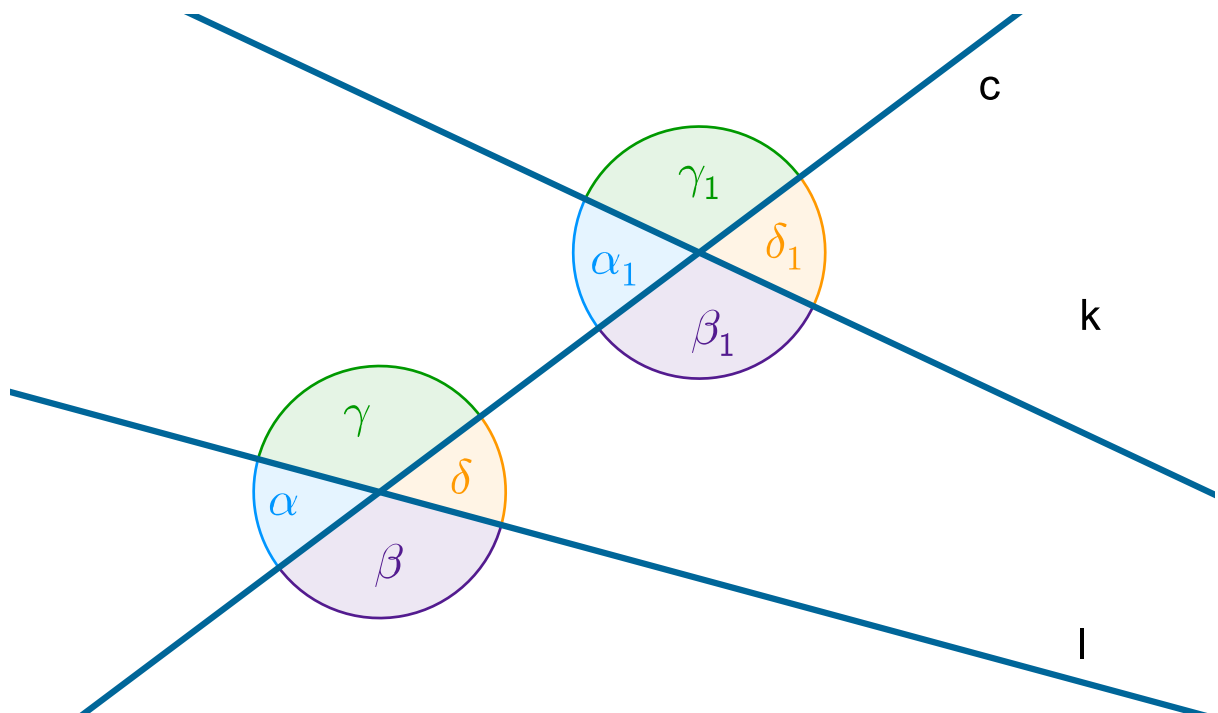
Jeżeli liczbę dodatnią zaokrąglamy do ustalonego rzędu wielkości, np. do tysięcy, setek, dziesiątek, jedności, części dziesiątych, części setnych itd., to wszystkie cyfry stojące po prawej stronie ostatniej (licząc od strony lewej) cyfry znaczącej zastępujemy zerami. Z cyframi znaczącymi postępujemy następująco:

- gdy pierwsza cyfra z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej jest mniejsza od 5, to wszystkie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian,
- gdy pierwsza cyfra z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej jest co najmniej równa 5, a ostatnia cyfra znacząca jest mniejsza od 9, to tę cyfrę zwiększamy o 1, a wszystkie poprzednie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian. Jeśli natomiast ostatnią cyfrą znaczącą jest 9, to zamiast niej piszemy cyfrę 0 i tę samą procedurę stosujemy do poprzednich cyfr znaczących.

Kąty

Definicja: Kąty naprzemianległe i odpowiadające

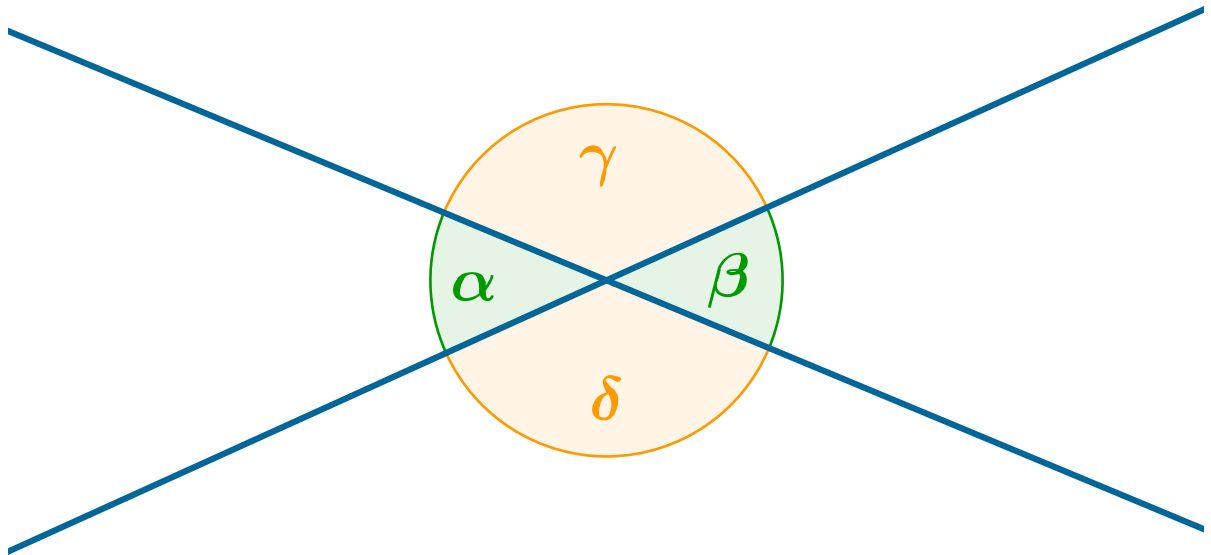
- Kąty: α i α_1 , β i β_1 , γ i γ_1 oraz δ i δ_1 nazywamy kątami odpowiadającymi.
- Kąty α_1 i δ oraz β_1 i γ nazywamy kątami naprzemianległymi wewnętrznymi.
- Kąty β i γ_1 oraz α i δ_1 nazywamy kątami naprzemianległymi zewnętrznymi.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Kąty przyległe i wierzchołkowe

- Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.
- Kąty wierzchołkowe to dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek i przedłużeniem ramion jednego kąta są odpowiednie ramiona drugiego kąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na przykład α i γ na rysunku są kątami przyległymi. Pary kątów wierzchołkowych to α i β oraz γ i δ .

Twierdzenie: o kątach wierzchołkowych

Kąty wierzchołkowe są równe.

Planimetria

Trójkąt

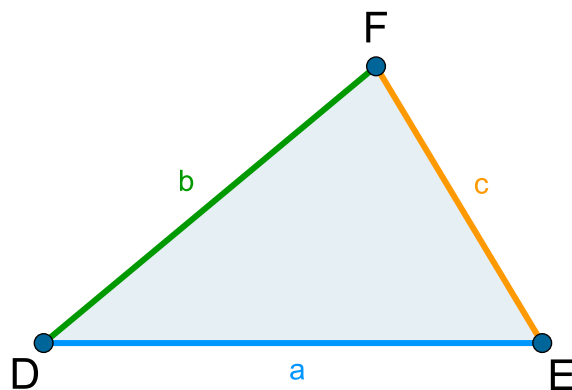
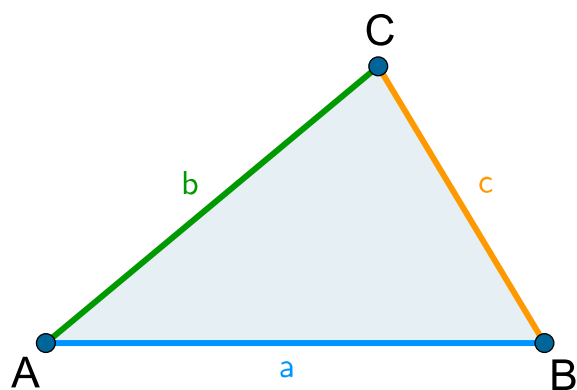
Twierdzenie: Cechy przystawania trójkątów

Przystawanie trójkątów ABC i DEF wynika z każdej z następujących cech przystawania trójkątów:

- cecha przystawania bok-bok-bok (bbb)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długości boków jednego trójkąta są odpowiednio równe długościom boków drugiego trójkąta.

$$|AB| = |DE|, |AC| = |DF|, |BC| = |EF|.$$

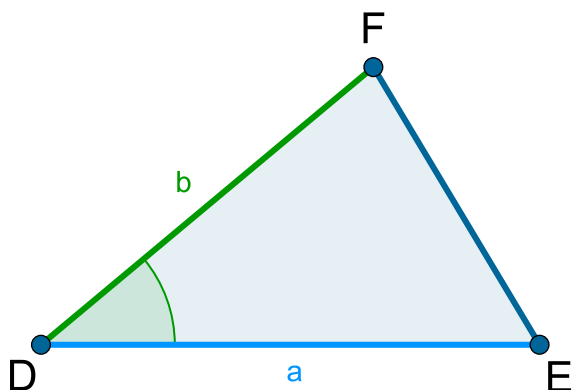
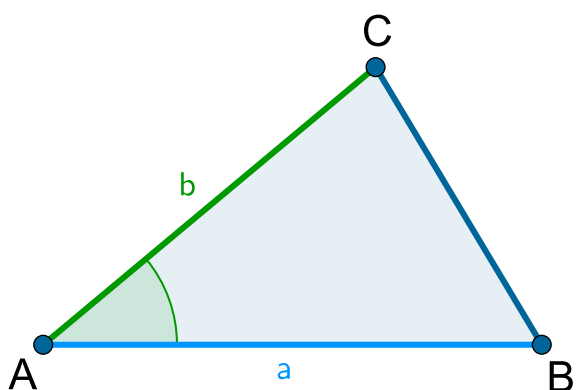


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- cecha przystawania bok-kąt-bok (*bkb*)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długości dwóch boków i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie

$$|AB| = |DE|, |AC| = |DF|, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|.$$

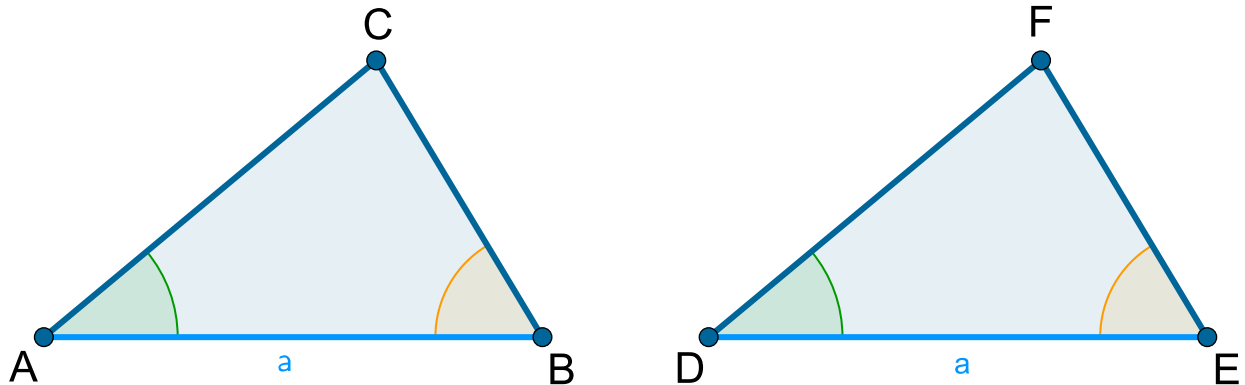


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- cecha przystawania kąt-bok-kąt (*kbb*)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długość boku i miary kątów przyległych do tego boku w jednym trójkącie są odpowiednio równe długości boku i miarom kątów przyległych do tego boku w drugim trójkącie

$$|AB| = |DE|, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|, |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Własności podobieństwa

Jeżeli trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali podobieństwa k , to stosunek obwodów tych trójkątów jest równy skali podobieństwa, a stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa

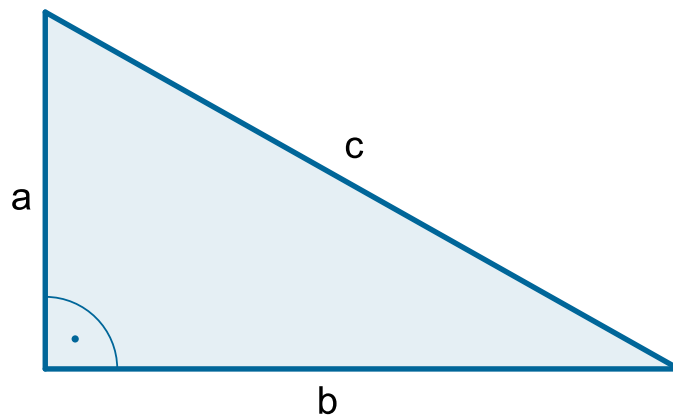
$$\frac{L_{A'B'C'}}{L_{ABC}} = k$$

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k^2$$

Twierdzenie: Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

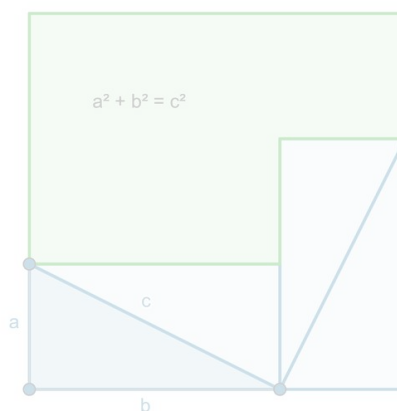
Dowód

Twierdzenie Pitagorasa

etap 6 z 6

Ostatecznie otrzymujemy równość:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P110B07ZQ>

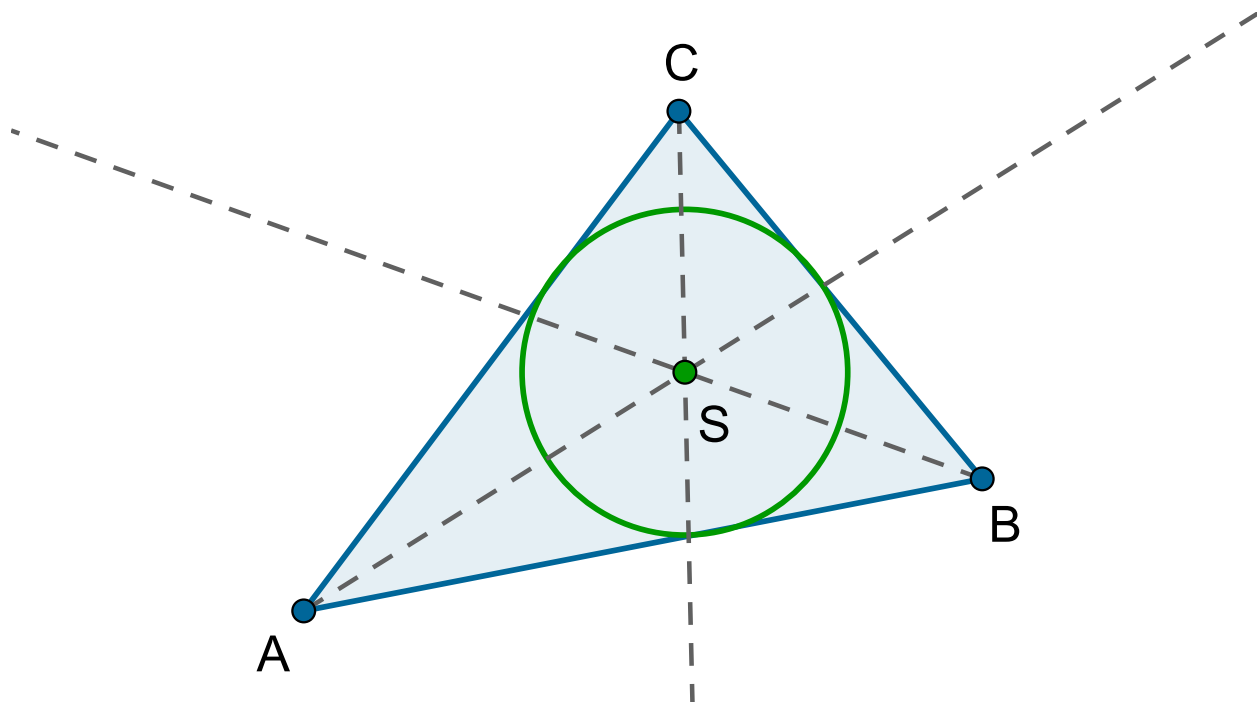
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt jest prostokątny.

Twierdzenie: o dwusiecznych kątów trójkąta

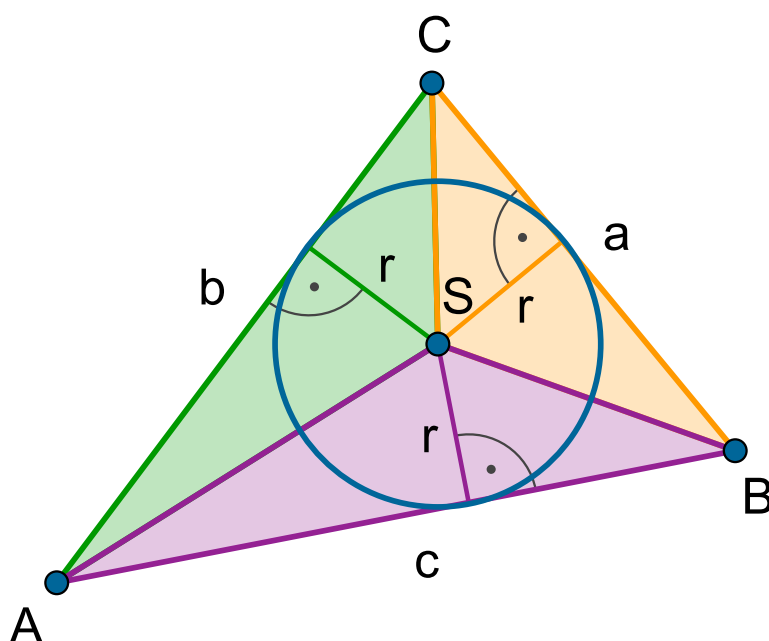
Dwusieczne każdego z kątów w trójkącie przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odcinki łączące środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC z wierzchołkami tego trójkąta podzieliły trójkąt na trzy trójkąty ABS , BCS i ACS .

Wysokość każdego z tych trójkątów jest równa promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ABC (jak na rysunku).



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów BCS , ACS i ABS

$$P_{ABC} = P_{BCS} + P_{ACS} + P_{ABS} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r.$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób wzór na pole trójkąta, w którym występują długości jego boków oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie: Pole trójkąta

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c oraz promieniu r okręgu wpisanego w ten trójkąt wyraża się wzorem

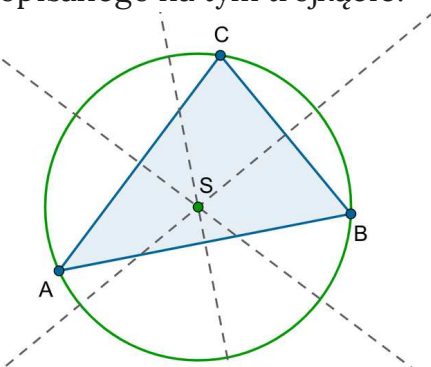
$$P = \frac{a + b + c}{2} r.$$

Gdy oznaczymy $\frac{a+b+c}{2} = p$, wzór przyjmuje postać $P = pr$.

Twierdzenie: o symetralnych boków trójkąta

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dowód

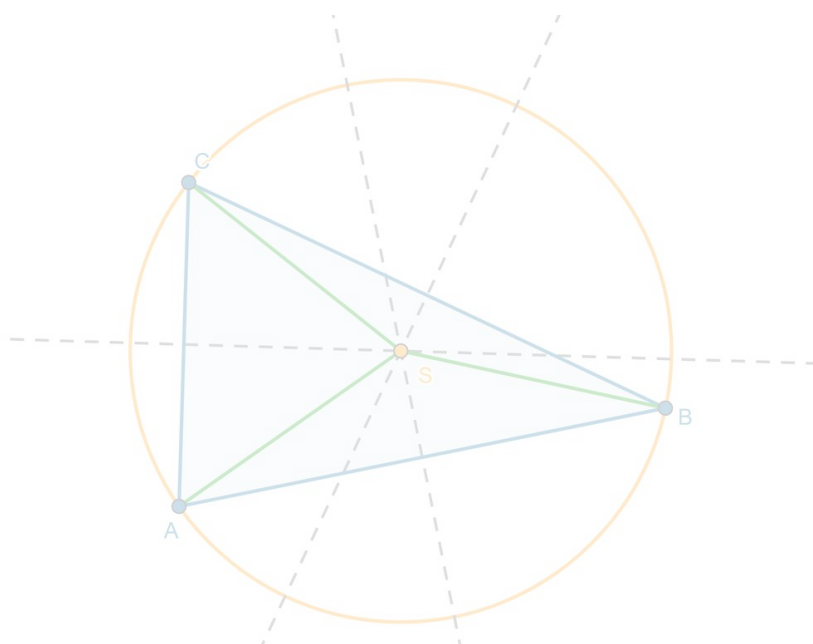
Okrąg opisany na trójkącie

etap 6 z 6



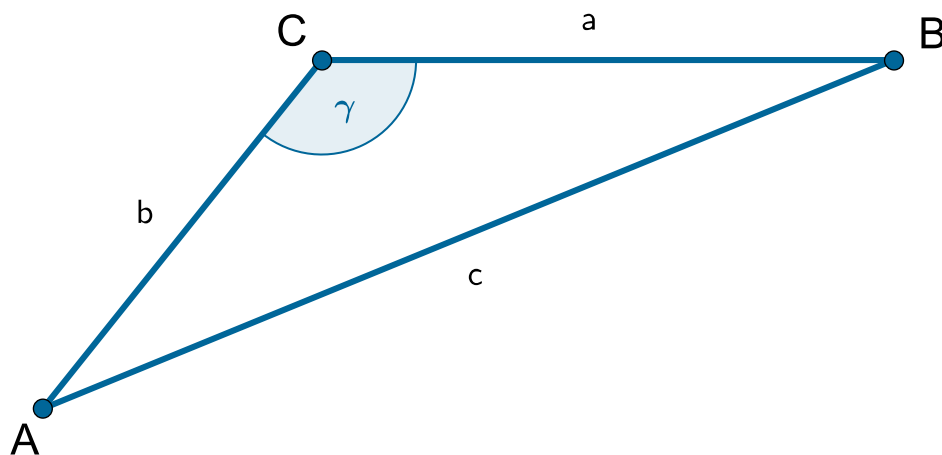
Jeżeli poprowadzimy okrąg o środku w punkcie S i promieniu równym $|AS|$, będzie on przechodził przez wszystkie wierzchołki trójkąta ABC.

Jest to okrąg opisany na trójkącie ABC.



Twierdzenie: Pole trójkąta z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznej

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

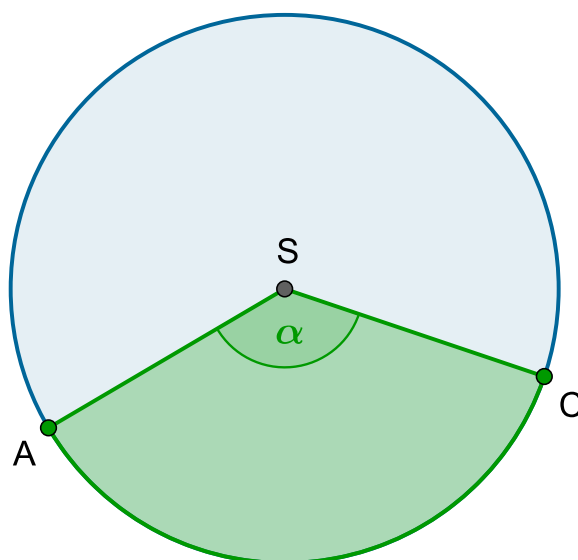
Przy oznaczeniach takich jak na rysunku

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Koło

Definicja: Wycinek koła

Wycinkiem koła nazywamy każdą z dwóch części tego koła, wyznaczonych przez dwa promienie tego koła wraz z tymi promieniami. Kąt pomiędzy tymi promieniami nazywamy kątem wycinka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Pole wycinka

Pole wycinka koła o promieniu r i kącie α jest równe

$$P_{\text{wycinka}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Trapez

Twierdzenie: o linii środkowej w trapezie

Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw tego trapezu, a jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw trapezu.

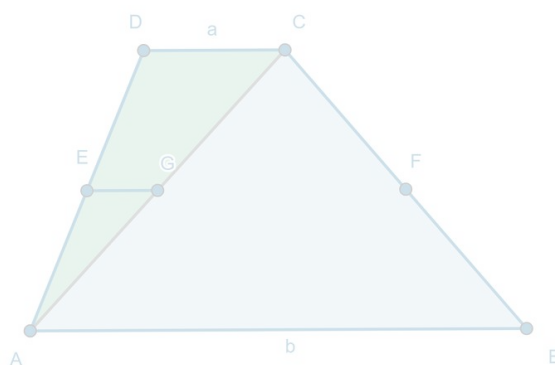
Linia środkowa w trapezie

etap 3 z 5



Odcinek EG jest linią środkową w trójkącie ACD, czyli jest równoległy do podstawy DC i jest równy $0,5a$.

$$\frac{|EG|}{|DC|} = \frac{1}{2}$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P110B07ZQ>

Funkcje

Definicja: Funkcja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y .

Symbolicznie piszemy $f : X \rightarrow Y$. Czytamy „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y ”.

- Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy – argumentami funkcji f .
- Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji. Każdy element y zbioru Y , który został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi x nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x , co zapisujemy symbolicznie $y = f(x)$. Zbiór tych elementów y nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Definicja: Dziedzina

Zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens liczbowy nazywamy dziedziną funkcji.

Definicja: Miejsce zerowe funkcji

Każdy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0 nazywamy miejscem zerowym tej funkcji.

Definicja: Funkcja malejąca

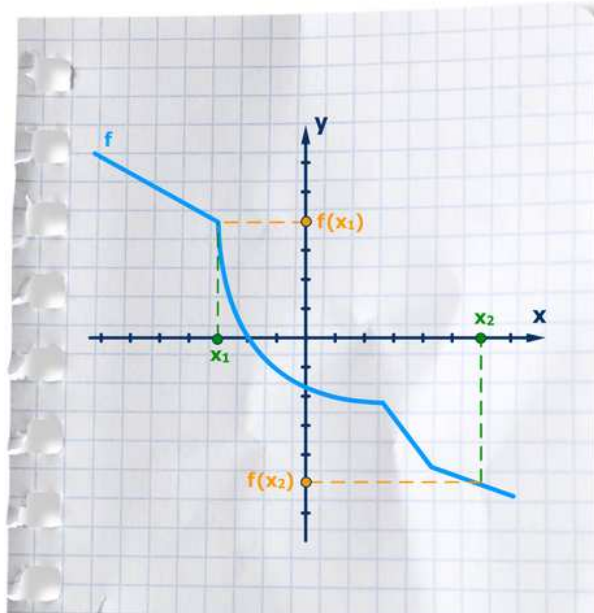
Funkcja f jest określona w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) > f(x_2),$$

to mówimy, że funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Funkcja malejąca



Funkcja f jest malejąca



jeżeli dla dwóch dowolnych argumentów

x_1 oraz x_2 takich, że

$x_1 < x_2$, zachodzi warunek $f(x_1) > f(x_2)$.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RBkmLRSBoMbOm>

Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu czyli atrapa animacja_260

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje wykres funkcji malejącej.

Definicja: Funkcja rosnąca

Funkcja f jest określona w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

to mówimy, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$.

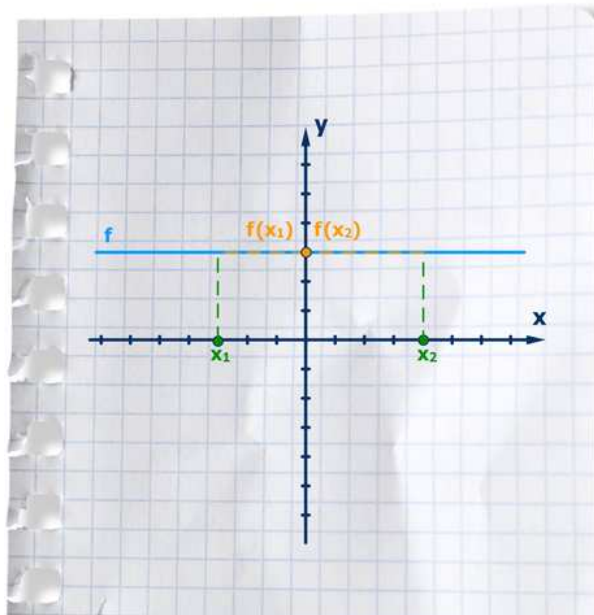
Definicja: Funkcja stała

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) = f(x_2),$$

to funkcję f nazywamy stałą w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Funkcja stała



Funkcja f jest stała



jeżeli dla dwóch dowolnych argumentów

x_1 oraz x_2 takich, że

$x_1 < x_2$, zachodzi warunek $f(x_1) = f(x_2)$.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RT0fkAbJhJRZK>

Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu czII_atrapa_animacja_261

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje wykres funkcji stałej.

Definicja: Funkcja monotoniczna przedziałami

Jeśli dziedzinę danej funkcji można podzielić na rozłączne przedziały tak, aby w każdym z nich funkcja ta była monotoniczna, to powiemy, że jest ona monotoniczna przedziałami.

Definicja: Funkcja niemalejąca

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

to mówimy, że funkcja f jest niemalejąca w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Definicja: Funkcja nierosnąca

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) \geq f(x_2),$$

To mówimy, że funkcja f jest nierosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Proporcjonalność

Definicja: Wielkości wprost proporcjonalne

Dwie zmienne wielkości dodatnie nazywamy wprost proporcjonalnymi, jeżeli iloraz tych wielkości jest stały.

Definicja: Proporcjonalność prosta

Funkcja f , opisująca zależność między dodatnimi wielkościami wprost proporcjonalnymi x i $f(x)$ nazywana jest proporcjonalnością prostą, a iloraz $\frac{f(x)}{x}$ nazywamy współczynnikiem tej proporcjonalności. Oznaczając ten współczynnik przez a , zapisujemy funkcję f wzorem

$$f(x) = ax.$$

Uwaga: Wprost z definicji wynika, że $a > 0$.

Twierdzenie: Wykres funkcji $f(x) = ax$

Wykresem funkcji $f(x) = ax$, gdzie a to ustalona liczba rzeczywista, jest prosta o równaniu $y = ax$.