



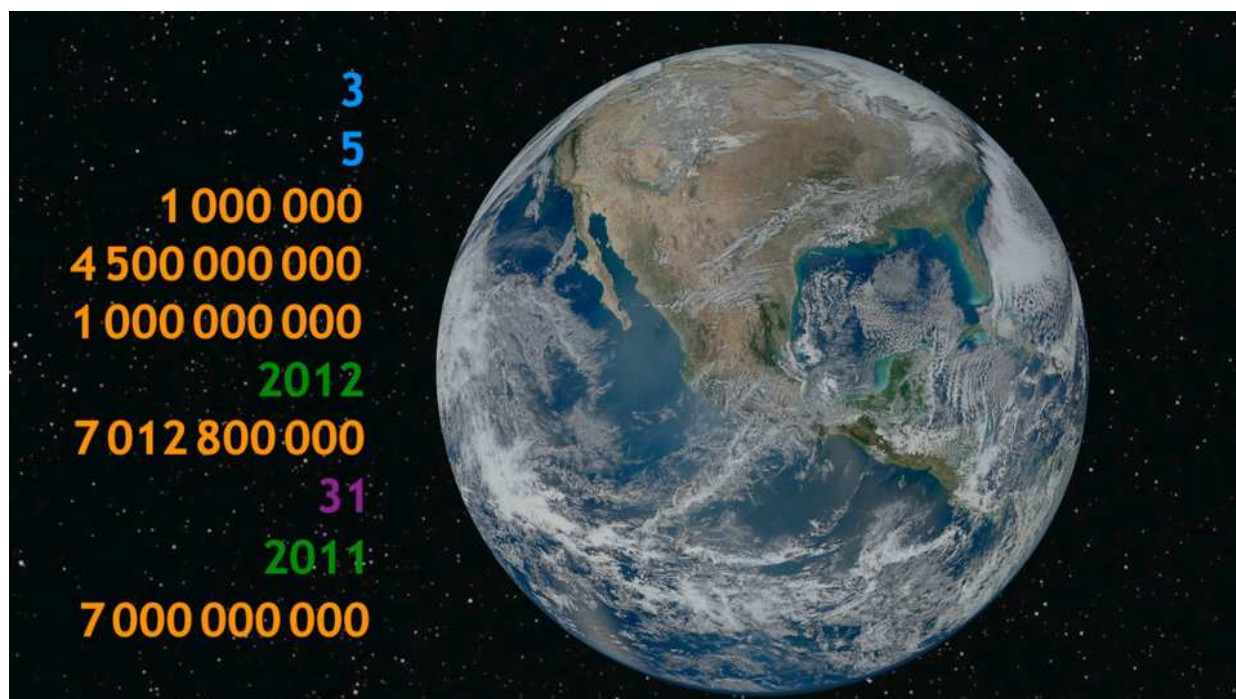
Liczby

Materiał składa się z sekcji: "Liczby naturalne", "Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność".

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), filmy, ćwiczenia interaktywne w tym otwarte..

Animacje i ilustracje: duże liczby, zapisywanie liczb w dziesiętkowym układzie pozycyjnym, liczby pierwsze i złożone, cechy podzielności, NWD, NWD

Liczby



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RHeYQFQw0oShH>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje podstawowe informacje na temat naszej planety, które przedstawione są w postaci liczb.

Życie codzienne w XXI wieku jest zdominowane przez świat liczb. Używamy ich praktycznie codziennie, na przykład gdy zapisujemy datę, numer PESEL, kiedy płacimy rachunki, podajemy wynik meczu, lub pieczemy ciasto według przepisu.

Cyfry w naszym świecie są tak powszechne i oczywiste, że mogłoby się wydawać, iż istnieją od zawsze. Nic bardziej mylnego. Zapis cyfr, z których zbudowane są liczby, zmieniał się na przestrzeni dziejów i różnych kultur.

Już w bardzo dawnych czasach pojawił się problem zapisu liczb. Nie wystarczyła sama umiejętność liczenia, trzeba było prowadzić rejestry upolowanej zwierzyny, broni, wojowników, do czego niezbędne były zapisy liczbowe.

Zapamiętaj!

- **Cyfra** to umowny znak służący do zapisywania liczb. Słowo cyfra pochodzi z języka arabskiego od słowa sifr, czyli zero. Obecnie używane cyfry nazywane arabskimi tak naprawdę są pochodzenia hinduskiego.
- Cyfry używane współcześnie upowszechniły się dopiero w epoce nowożytnej.
- **Cyfry arabskie** są to znaki: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

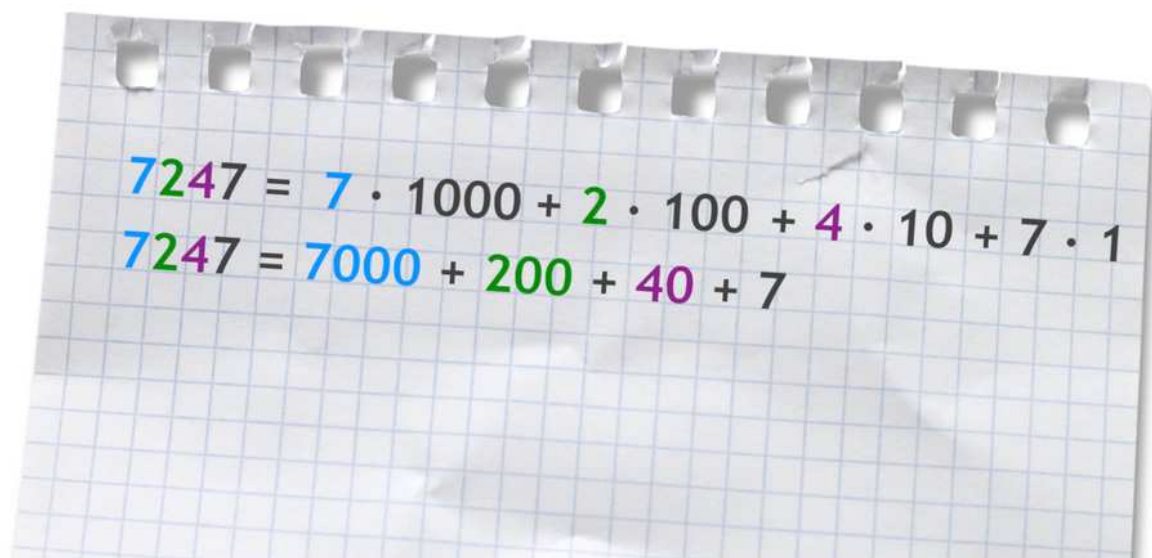
Ciekawostka

Ciekawostką jest bardzo późne pojawienie się symbolu zera, dopiero około V wieku n.e. Wynikało to z trudności uznania zera za liczbę. Liczbę wiązano z konkretną ilością na przykład bloków kamiennych do budowy piramid, natomiast zero oznaczało nic, brak przedmiotów.

Ważne!

- System liczbowy indyjsko-arabski nazywany jest układem dziesiętkowym pozycyjnym. System dziesiętkowy oznacza, że dziesięć jednostek niższego rzędu tworzy jedną jednostkę bezpośrednio wyższego rzędu, np. dziesięć jedności tworzy jedną dziesiątkę, dziesięć dziesiątek tworzy jedną setkę.
- Pozycyjny system oznacza, że znaczenie cyfry jest zależne od pozycji, jaką zajmuje ona w liczbie.

Przykład 1

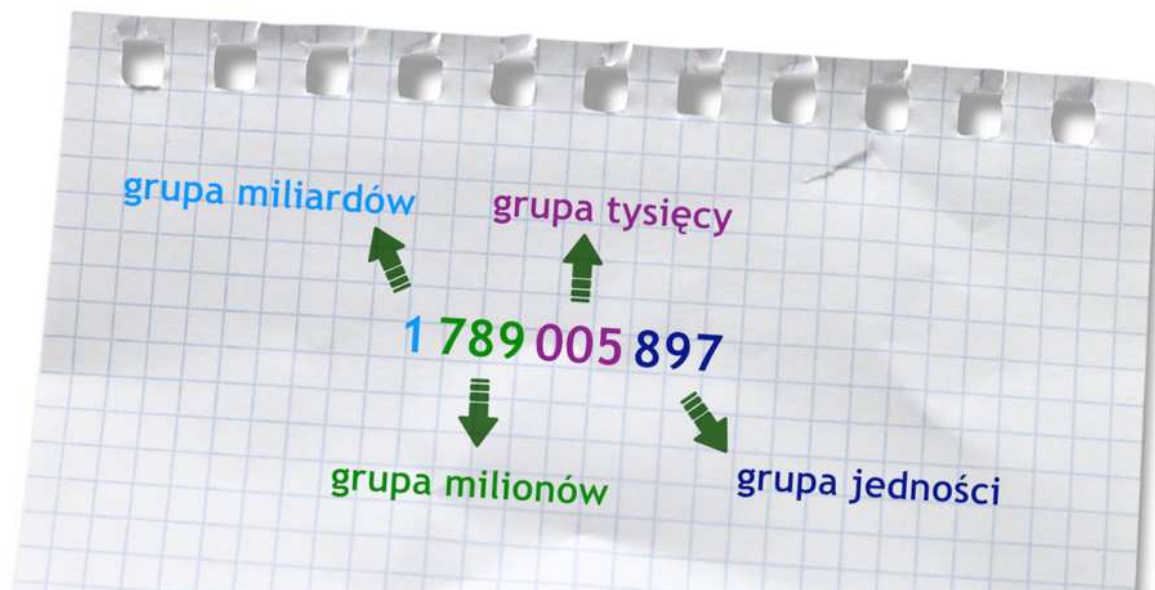

$$\begin{aligned} 7247 &= 7 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1 \\ 7247 &= 7000 + 200 + 40 + 7 \end{aligned}$$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RQAQnuKpy2wWr>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia które cyfry w liczbie określają poszczególne rzędy wielkości.

Przykład 2

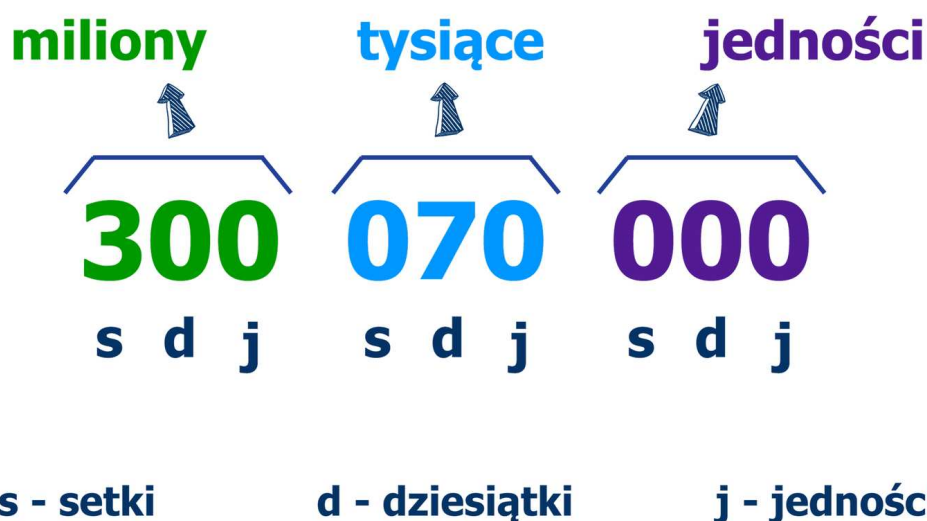


Film dostępny pod adresem </preview/resource/R12mGXzF1dAD7>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje w jaki sposób możemy zapisywać duże liczby.

Przykład 3



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapamiętaj!

Oto kilka nazw dużych liczb:

- 1 000 000 – milion
- 1 000 000 000 – miliard
- 1 000 000 000 000 – bilion

- 1 000 000 000 000 000 – biliard
- 1 000 000 000 000 000 000 – trylion
- 1 000 000 000 000 000 000 000 – tryliard

Liczby naturalne

Zapamiętaj!

Liczby naturalne to:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...

Najmniejszą liczbą naturalną jest zero.

W zbiorze liczb naturalnych nie ma liczby największej.

Ćwiczenie 1



Połącz w pary liczbę z jej opisem słownym.

5 000 002 010 900

Trzysta miliardów dwadzieścia milionów
sześć tysięcy sto

40 001 002

Czterdzieści milionów tysiąc dwa

2 400 050

Pięć bilionów dwa miliony dziesięć
tysięcy dziewięćset

22 200 000 002

Dwadzieścia dwa miliardy dwieście
milionów dwa

300 020 006 100

Dwa miliony czterysta tysięcy
pięćdziesiąt

3 700 002

Trzy miliony siedemset tysięcy dwa

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Podane słownie liczby zapisz za pomocą cyfr w lukach.

- Dwadzieścia milionów pięć to .
- Trzy miliardy trzy miliony trzydzieści tysięcy to .
- Pięćdziesiąt bilionów miliard sto to .
- Trzy tryliony dwadzieścia bilionów sto jeden to .
- Jeden tryliard jeden miliard to .
- Dwanaście tryliardów dwanaście bilionów sto dwadzieścia milionów dwanaście to .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Uzupełnij luki w zdaniach podanymi wyrażeniami. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz poprawną odpowiedź w każdym przypadku.

1. Do zapisania liczby dwa miliardy pięćset milionów użyto .
2. Do zapisania liczby cztery biliony trzysta trzy miliardy użyto .
3. Do zapisania liczby biliard sto trzy biliony sto użyto .
4. Do zapisania liczby siedemnaście trylionów miliard cztery tysiące dwanaście użyto .

16 zer

6 zer

14 zer

10 zer

8 zer

7 zer

5 zer

12 zer

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Odpowiedz na pytanie. Połącz w pary pytanie z odpowiedzią.

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, których suma cyfr jest równa 5?

90

Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych?

6 liczb: 114, 141, 411, 122, 212, 221

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 4?

40

Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych parzystych?

15 liczb: 104, 113, 122, 131, 140, 203, 212, 221, 230, 302, 311, 320, 401, 410, 500

Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych zaczynających się od cyfry parzystej?

45

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe czy fałszywe. Zaznacz odpowiednie pole.

Zdanie	Prawda	Fałsz
W zapisie liczby trylion występuje 18 zer.	☐	☐
Wszystkich liczb dwucyfrowych o niepowtarzających się cyfrach jest 89.	☐	☐
Najmniejszą liczbą czterocyfrową, w której suma cyfr wynosi 2, jest 2 000.	☐	☐
Największą liczbą trzycyfrową, w której cyfra setek jest o dwa mniejsza od cyfry jedności, jest 789.	☐	☐

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Już wiesz

Oto kilka własności działań w zbiorze liczb naturalnych. Niech a , b , c będą liczbami naturalnymi.

- Dodawanie jest działaniem przemienne, czyli $a + b = b + a$.
- Dodawanie jest działaniem łącznym, czyli $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Mnożenie jest działaniem przemienne, czyli $a \cdot b = b \cdot a$.

- Mnożenie jest działaniem łącznym, czyli $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- W zbiorze liczb naturalnych wykonalne są działania dodawania i mnożenia, tzn. wyniki tych działań są liczbami naturalnymi.
- Dzielenie nie jest działaniem wykonalnym w zbiorze liczb naturalnych, ponieważ wynik dzielenia może nie być liczbą naturalną.
- Odejmowanie nie jest działaniem wykonalnym w zbiorze liczb naturalnych, ponieważ wynik odejmowania może nie być liczbą naturalną.
- Nie można wykonać dzielenia przez liczbę 0.

Przykład 4

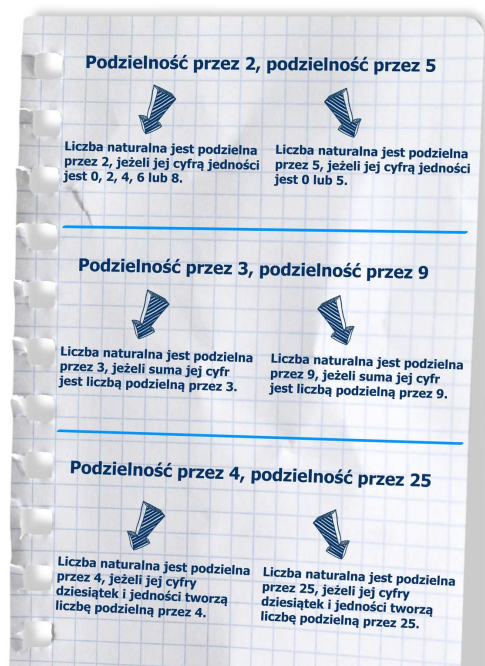
- Liczba 16 jest podzielna przez 4, ponieważ $4 \cdot 4 = 16$. Mówimy, że liczba 4 jest dzielnikiem liczby 16.
- Nie każdą liczbę naturalną możemy podzielić przez liczbę naturalną dodatnią bez reszty. Na przykład $16 : 5 = 3$, reszta 1 ponieważ $3 \cdot 5 = 15$ i $15 + 1 = 16$. Zatem liczba 16 nie dzieli się przez liczbę 5 bez reszty.
- Liczba 0 jest podzielna przez każdą liczbę naturalną z wyjątkiem 0.

Definicja: Liczby pierwsze, liczby złożone

Liczbę naturalną n większą od 1 nazywamy liczbą pierwszą, jeżeli jej jedynymi dzielnikami są liczby 1 i n . Liczby naturalne większe od 1, które nie są liczbami pierwszymi nazywamy liczbami złożonymi. Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

Ważne!

Cechy podzielności:



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ciekawostka

- Liczba jest podzielna przez 6, jeżeli jest podzielna przez 2 i 3.

- Liczba jest podzielna przez 7, jeżeli od liczby powstałej przez skreślenie trzech ostatnich cyfr odejmiemy liczbę skreśloną i otrzymana liczba jest podzielna przez 7.
- Liczba jest podzielna przez 8, jeżeli jej trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 8 lub są zerami.
- Liczba jest podzielna przez 10, jeżeli w jej rzędzie jedności jest cyfra 0.

Ćwiczenie 6



Skorzystaj ze znanych ci już cech podzielności i dopasuj podane liczby do odpowiedniej grupy, przeciągając je lub wybierz poprawne odpowiedzi z listy rozwijalnej.

Liczby podzielne przez 3:

2166

208

5553

351

1355

126

184

3243

712

6505

170

Liczby podzielne przez 4:

Liczby podzielne przez 5:

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Jaka to liczba? Uzupełnij lukę w zdaniu, wpisując poprawną wartość.

1. Najmniejsza liczba czterocyfrowa podzielna przez 3.

Odpowiedź: Jest to liczba .

2. Największa liczba trzycyfrowa podzielna przez 8.

Odpowiedź: Jest to liczba .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Zosia ponumerowała strony swego 16-kartkowego pamiętnika. Ile razy napisała cyfrę 1?
Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 8 razy.

☐ 9 razy.

☐ 13 razy.

☐ 14 razy.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Jaką cyfrę należy wpisać w miejsce kropek, aby liczba $2754 \dots 4$ była podzielna przez 2 i 9?
Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 0

☐ 2

☐ 1

☐ 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



W wyniku dzielenia pewnej liczby naturalnej przez 7 otrzymujemy 4 i resztę 2. Jaka to liczba? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 30

☐ 16

☐ 9

☐ 28

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe czy fałszywe. Zaznacz odpowiednie pole.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Liczba 5 jest wielokrotnością liczby 125.	☐	☐
Najmniejszą liczbą pierwszą jest 1.	☐	☐
Jedyną liczbą pierwszą parzystą jest liczba 2.	☐	☐
Jeżeli liczba 3 jest dzielnikiem pewnej liczby x , to jest też dzielnikiem $2x$.	☐	☐

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



W pewnym sklepie jest 127 metrów bieżących czerwonej wstążki. Pierwsza klientka chce kupić kawałki wstążki o długości 4 metry każdy, a druga kawałki wstążki o długości 5 metrów każdy. Uzupełnij luki w zdaniach, wpisując odpowiednie liczby. Przyjmij, że sprzedawca może sprzedać wstążkę tylko jednej klientce.

1. Ile kawałków wstążki może kupić każda klientka?

Odpowiedź: Pierwsza klientka może kupić kawałków, druga klientka kawałków.

2. Której klientce sklep powinien sprzedać wstążkę, aby w sklepie pozostało jak najmniej metrów wstążki?

Odpowiedź: Sklep powinien sprzedać wstążkę tylko klientce.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Na zegarze jest godzina 12 : 20. Którą godzinę będzie wskazywał zegar za 550 minut? Uzupełnij poniższą lukę. Kliknij w nią, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną odpowiedź.

Odpowiedź: Zegar będzie wskazywał godzinę .

22 : 30

21 : 30

22 : 20

21 : 50

20 : 45

23 : 05

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność

Definicja: Największy wspólny dzielnik

Największym wspólnym dzielnikiem dodatnich liczb naturalnych a i b (oznaczamy $\text{NWD}(a, b)$) nazywamy największą liczbę naturalną, która jest jednocześnie dzielnikiem liczby a i liczby b .



Iloczyn wspólnych czynników pierwszych liczb 72 i 60 jest ich największym wspólnym dzielnikiem.

$$\text{NWD}(72, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

72	2	60	2
36	2	30	2
18	2	15	3
9	3	5	5
3	3	1	
1			

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RH8MTCe1zKdKn>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób wyznaczyć największy wspólny dzielnik dwóch liczb.

Definicja: Najmniejsza wspólna wielokrotność

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb naturalnych dodatnich a i b (oznaczamy $\text{NWW}(a, b)$) nazywamy najmniejszą liczbę naturalną dodatnią, która jest podzielna przez liczbę a i liczbę b .



Iloczyn wszystkich nieskreślonych czynników pierwszych jest najmniejszą wspólną wielokrotnością tych liczb.

$$\text{NWW}(72, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$$

72	2	60	2
36	2	30	2
18	2	15	3
9	3	5	5
3	3	1	
1			

Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1asXsAJ2nXUj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób wyznaczyć najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb.

Ćwiczenie 14



Oblicz, stosując metodę rozkładu na czynniki pierwsze.

Uzupełnij poniższe luki. Kliknij w nie, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną odpowiedź.

- $\text{NWD}(60, 90)$ i $\text{NWW}(60, 90)$

Odpowiedź:

- $\text{NWD}(630, 42)$ i $\text{NWW}(630, 42)$

Odpowiedź:

- $\text{NWD}(490, 385)$ i $\text{NWW}(490, 385)$

Odpowiedź:

35 i 5390

32 i 5310

35 i 160

42 i 630

30 i 180

46 i 620

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Zuzia planuje przyjęcie urodzinowe. Spodziewa się na urodzinach czterech lub pięciu koleżanek, a każdą koleżankę pragnie poczęstować taką samą liczbą ciastek. Jaką najmniejszą liczbę ciastek musi upiec Zuzia?

Uzupełnij lukę w zdaniu, wpisując poprawną wartość.

Odpowiedź: Zuzia musi upiec co najmniej ciastek.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Wychowawczynie klasy I gimnazjum otrzymała 60 długopisów i 40 notesów dla uczniów swojej klasy. Chciałaby rozdać uczniom wszystkie otrzymane przedmioty. Ilu uczniów otrzyma podarunki, jeżeli każdy uczeń ma dostać od wychowawczynie taką samą liczbę długopisów i taką samą liczbę notesów?

Uzupełnij lukę w zdaniu, wpisując poprawną wartość.

Odpowiedź: Podarunki otrzyma uczniów.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



W domu państwa Nowaków, zbudowanym w 2014 roku, postanowiono średnio co 4 lata wymieniać dywan w salonie, a co 3 lata odświeżać ściany, malując je na nowy kolor. Uzupełnij luki w zdaniach, wpisując poprawne wartości.

1. W którym najbliższym roku czeka państwa Nowaków wymiana dywanu i malowanie ścian jednocześnie?

Odpowiedź: Tym rokiem jest .

2. Ile razy do 2055 roku może się to jeszcze wydarzyć? Kiedy to będzie?

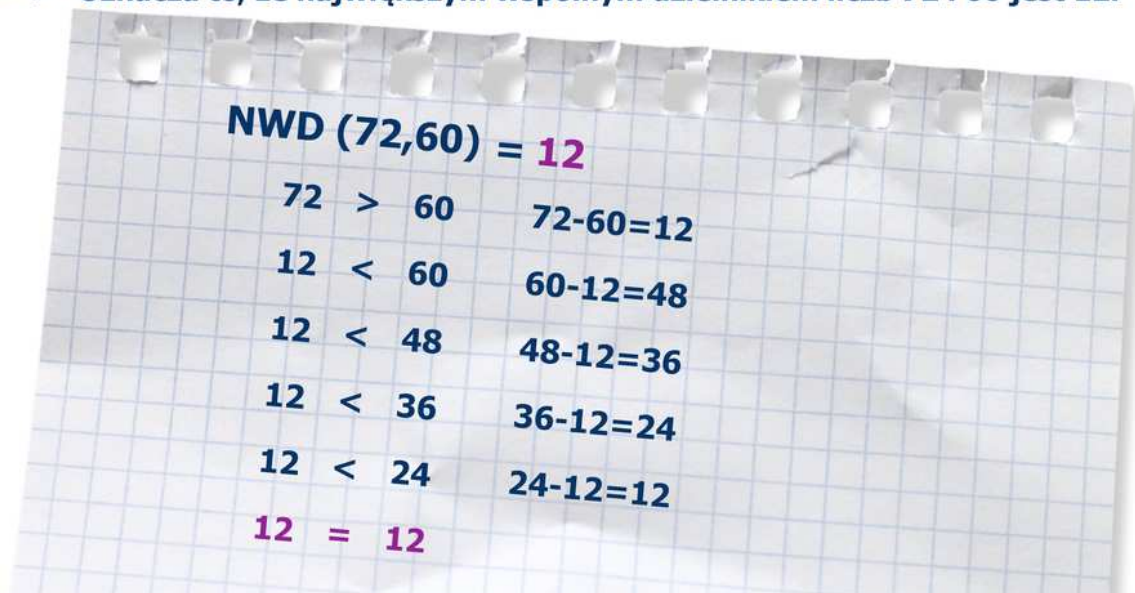
Odpowiedź: Może to się jeszcze wydarzyć w roku oraz

.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Ponieważ obie liczby są sobie równe, kolejne odejmowanie da nam zero. Oznacza to, że największym wspólnym dzielnikiem liczb 72 i 60 jest 12.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1HtTCcd7rby8>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak wyznaczyć największy wspólny dzielnik wykorzystując algorytm Euklidesa.

Ćwiczenie 18



Skorzystaj z algorytmu Euklidesa i oblicz NWD liczb: 4290, 1210.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Poszukaj w dostępnych źródłach informacji o liczbach doskonałych.

Ważne!

Zapoznaj się z cechą podzielności liczb przez: 7, 11 oraz 13.

Liczba jest podzielna przez 7, 11 albo 13, jeśli różnica liczby złożonej z trzech ostatnich cyfr i liczby złożonej z pozostałych cyfr jest podzielna odpowiednio przez 7, 11 albo 13.

Ćwiczenie 20



Poszukaj w dostępnych źródłach informacji, na czym polega schemat wyznaczania liczb pierwszych nazywany sitem Eratostenesa. Wypisz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 60.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Poszukaj w dostępnych źródłach informacji, co to są liczby względnie pierwsze. Sprawdź, czy liczby 15 i 16 są względnie pierwsze.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.