# Własności czworokąta wpisanego w okrąg

# Własności czworokąta wpisanego w okrąg

Źródło: Gerd Altmann z Pixabay, domena publiczna.

## Wzór Brahmagupty

Niemal każdy maturzysta zetknął się ze wzorem Herona.

Wskazuje on, że pole trójkąta o bokach długości $a$, $b$, $c$ jest równe

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie:

$p$ – jest połową obwodu danego trójkąta.

Nie może istnieć analogiczny wzór dla dowolnego czworokąta, bo łatwo zauważyć, że dla każdego prostokąta istnieje równoległobok o takich samych bokach i innym polu – wystarczy, że jego kąty nie będą proste. Okazuje się jednak, że dla czworokąta cyklicznego, czyli takiego, który można wpisać w okrąg, zachodzi taki analogiczny wzór, znany jako wzór Brahmagupty.

Na jego mocy, pole czworokąta cyklicznego o bokach długości $a$, $b$, $c$, $d$ jest równe

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

gdzie:

$p$ – jest połową jego obwodu.

Na pytanie, czy da się uogólnić ten wzór na wielokąty cykliczne o większej liczbie boków, musi paść odpowiedź przecząca – wynika to w prosty sposób z analizy wymiarowej (pierwiastek kwadratowy z iloczynu pięciu, czy większej liczby czynników, nie da w wyniku jednostki kwadratowej). Między innymi dowód tego ciekawego wzoru będzie przedmiotem niniejszej lekcji.

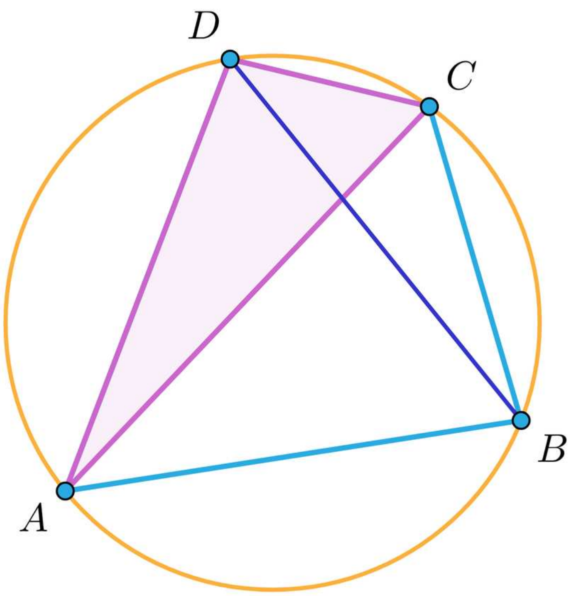
**Twoje cele**

- Zastosujesz twierdzenie podające warunki opisywalności okręgu na czworokącie wypukłym.
- Zastosujesz twierdzenie Ptolemeusza.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

# Przeczytaj

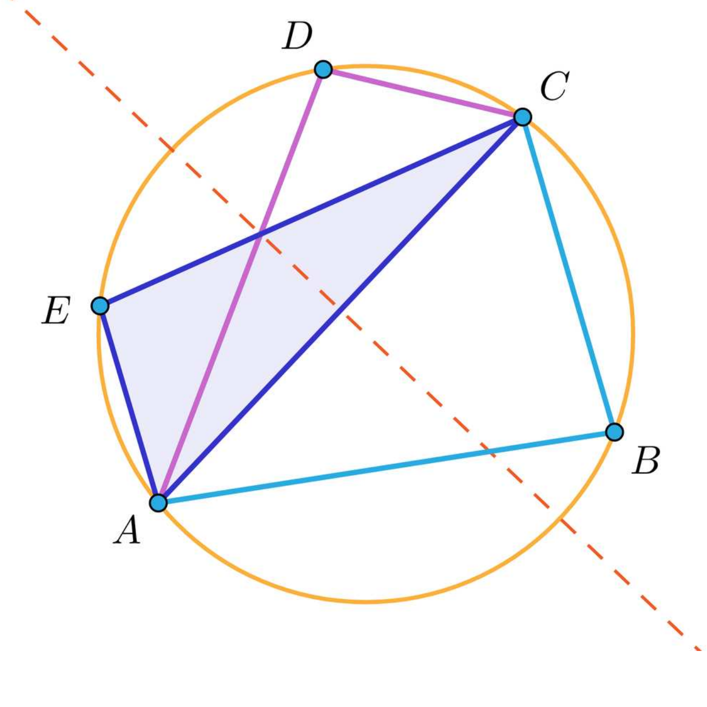
## Czworokąt wpisany w okrąg i trójkąty

Zauważmy na poniższym rysunku, że okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest tym samym okręgiem, który jest opisany na każdym z trójkątów $ACD$ i $ABC$.




Czworokąt i trójkąty wpisane w okrąg

Zauważmy jednak, że obraz trójkąta $ACD$ w symetrii w względem symetralnej odcinka $AC$ także jest wpisany w ten sam okrąg, jak na rysunku.

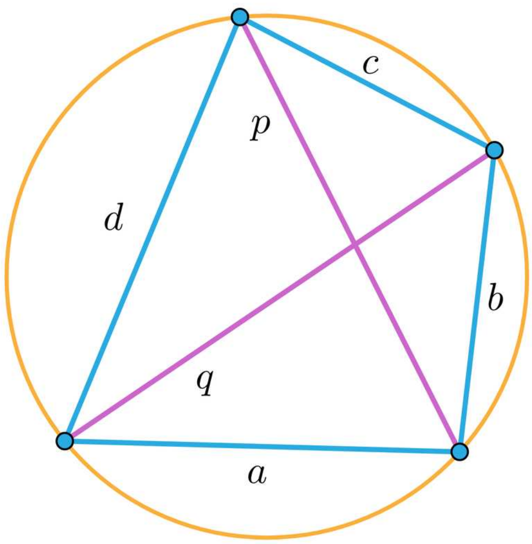


Tym samym otrzymujemy czworokąt cykliczny $ABCE$, którego boki mają te same długości, co wyjściowa figura, ale ich porządek jest inny. Inna jest (może być) dla tych czworokątów miara kątów w wierzchołkach wyznaczonych przez końce przekątnej $AC$. Analogicznie, można przekształcić odpowiednie trójkąty, gdy osią symetrii będzie symetralna odcinka $BD$.

Powyższy fakt wykorzystamy dla dowodu poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie: Twierdzenie o przekątnej czworokąta cyklicznego**

Niech dany będzie czworokąt cykliczny o bokach długości $a$, $b$, $c$, $d$ oraz przekątnych $p$, $q$, jak na rysunku.



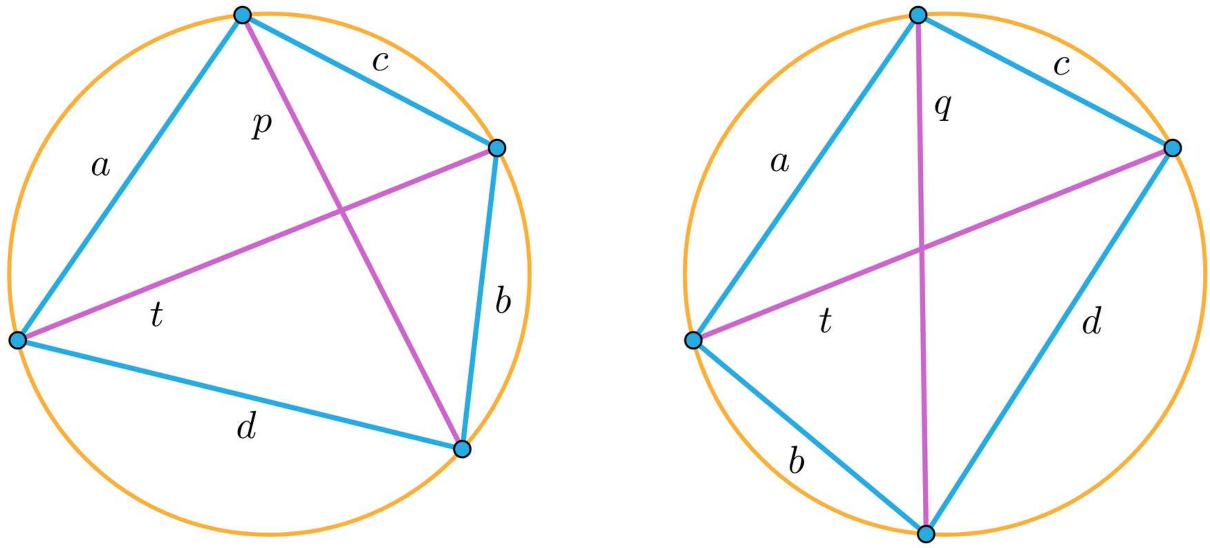

Twierdzenie o przekątnej czworokąta cyklicznego

Wtedy $p = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$.

**Dowód**

Punktem wyjścia będzie dla nas twierdzenie Ptolemeusza, które orzeka, że w czworokącie cyklicznym iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości odpowiednich boków, co przy powyższych oznaczeniach można zapisać, jako: $p \cdot q = ac + bd$.

Zauważmy, że wspomniana wyżej symetria osiowa prowadzi do otrzymania jeszcze dwóch czworokątów cyklicznych o bokach tej samej długości, istotnie różnych, w szczególności o różnych przekątnych, jak na rysunku.




Twierdzenie Ptolemeusza, zapisane dla każdego z tych czworokątów, pozwala zapisać odpowiednio równości:

$p \cdot t = ab + cd$ oraz $q \cdot t = ad + bc$.

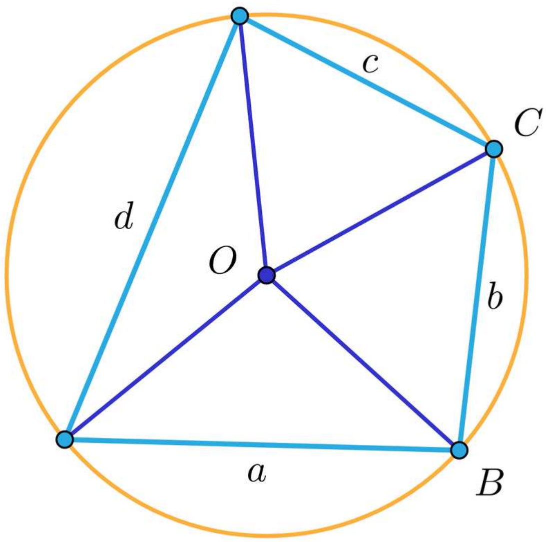
Wyznaczając z pierwszej równości zmienną $t = \frac{ab+cd}{p}$ i wstawiając ją do drugiego z równań otrzymujemy: $q \cdot \frac{ab+cd}{p} = ad + bc$.

Stąd $q = \frac{ad+bc}{ab+cd} \cdot p$.

Zatem $p \cdot \frac{ad+bc}{ab+cd} \cdot p = ac + bd$, czyli $p^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$. Stąd wynika teza twierdzenia.

Analogicznie można wykazać, że $q = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$.

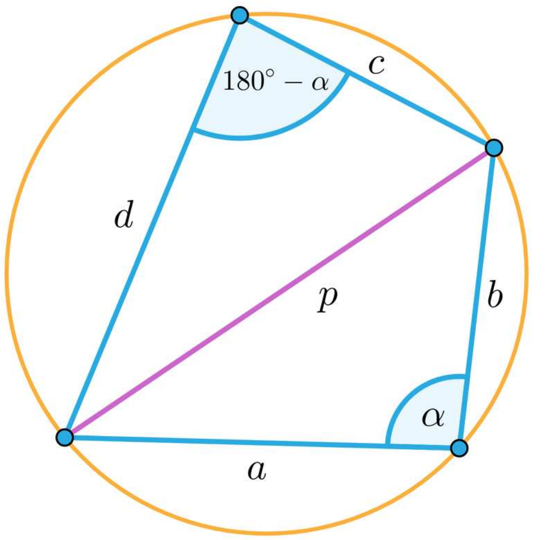
Warto podkreślić, że mówiąc o symetrii odpowiednich trójkątów, na jakie przekątne podzieliły dany czworokąt, nie od razu widać równość długości przekątnej $t$, jaka pojawia się w dowodzie, na pomocniczych rysunkach. Dlatego, zamiast o symetrii, wygodniej byłoby mówić o rozcinaniu czworokąta na trójkąty, których bokami są odpowiedni bok czworokąta oraz promienie poprowadzone do wierzchołków, jak na rysunku.




Rozcinanie czworokąta

Zmieniając kolejność ułożenia poszczególnych trójkątów otrzymamy różne czworokąty o takich samych bokach, wpisane w dany okrąg. Analizując w szczególności odpowiednie kąty łatwo dostrzec przystawanie odpowiednich figur.

Przejdźmy teraz do udowodnienia wzoru Brahmagupty. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.




Dowód wzoru Brahmagupty

Wtedy pole $P$ da się wyrazić jako sumę pól odpowiednich dwóch trójkątów:

$P = \frac{ab\sin\alpha}{2} + \frac{cd\sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{(ab+cd)\sin\alpha}{2}$.

Stosując twierdzenie cosinusów do wyrażenia kwadratu długości przekątnej $p$ otrzymujemy zależność $p^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \alpha)$, z której, po zastosowaniu wzoru redukcyjnego, wyznaczymy wartość $\cos\alpha$:

$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy, że $\sin^2\alpha = 1 - \left[\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right]^2 = \frac{[2(ab+cd)]^2 - [a^2+b^2-c^2-d^2]^2}{4(ab+cd)^2}$.

Kolejne przekształcenia licznika otrzymanego ułamka będą opierały się na zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia, w szczególności wzoru na różnicę kwadratów. Wtedy otrzymujemy kolejno:

$$[2(ab+cd)]^2 - \left[a^2+b^2-c^2-d^2\right]^2 =$$

$$= \left[2(ab+cd) - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right] \cdot \left[2(ab+cd) + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right] =$$

$$= \left[\left(c^2+d^2+2cd\right) - \left(a^2+b^2-2ab\right)\right] \cdot \left[\left(a^2+b^2+2ab\right) - \left(c^2+d^2-2cd\right)\right] =$$

$$= \left[(c+d)^2 - (a-b)^2\right] \cdot \left[(a+b)^2 - (c-d)^2\right] =$$

$$= (b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)$$

Podstawiając standardowe oznaczenie $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ otrzymany iloczyn można zapisać w postaci

$$(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d) =$$

$$= (a+b+c+d-2a)(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2d) =$$

$$= (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d) = 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Zatem

$$P = \frac{(ab+cd)\sin\alpha}{2} = \frac{(ab+cd)}{2}\sqrt{\frac{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{4(ab+cd)^2}} =$$

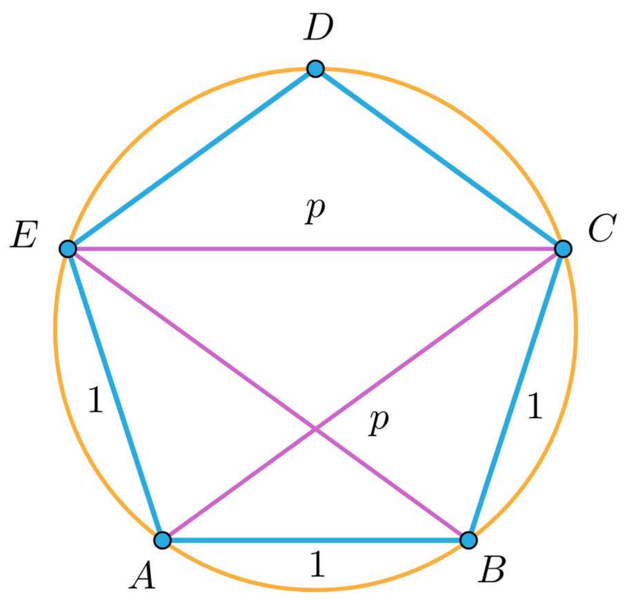
$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Co należało wykazać.

**Przykład 1**

Okazuje się, że własności czworokąta cyklicznego można wykorzystać do badania własności pięciokąta foremnego.

Rozważmy pięciokąt foremny o boku długości 1, a jego przekątną oznaczmy przez $p$, jak na rysunku.




Pięciokąt foremny

Czworokąt $ABCE$, którego wierzchołkami są wierzchołki danego pięciokąta jest cykliczny, można zatem zastosować do niego twierdzenie Ptolemeusza.

Mamy wtedy: $p^2 = 1 \cdot p + 1 \cdot 1$.

Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego równania jest tzw. złota liczba: $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Skądinąd wiadomo, że kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma miarę $108^\circ$.

Stosując twierdzenie cosinusów moglibyśmy zapisać, że $p^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos 108^\circ$.

Wynik jest oczywiście poprawny, ale nieco „uwikłany".

Można go jednak wykorzystać, uwzględniając wcześniejszy rezultat, do obliczenia dokładnej wartości sinusa $18^\circ$.

Mamy bowiem
$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{2 - 2\cos 108^\circ} = \sqrt{2 - 2\cos(90^\circ + 18^\circ)} = \sqrt{2 + 2\sin 18^\circ}$.

Stąd $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 + 2\sin 18^\circ$, czyli $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

## Słownik

**wielokąt cykliczny**

wielokątem cyklicznym nazywamy wielokąt wypukły, który da się wpisać w okrąg

**twierdzenie Ptolemeusza**

twierdzenie, które orzeka, że czworokąt o kolejnych bokach długości $a$, $b$, $c$, $d$ i przekątnych $p$, $q$ jest cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$pq = ac + bd$$

# Aplet

**Polecenie 1**

Uruchom aplet. Ustal położenie wierzchołków czworokąta wpisanego w okrąg, a następnie wybierz polecenie „Rozcinanie czworokąta”. Odczytaj miary kątów wewnętrznych trójkątów powstałych w wyniku triangulacji. Sprawdź, że spełnione są warunki twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfD0okMv3

**Polecenie 2**

Miary kątów wewnętrznych trójkątów, na jakie rozcięto czworokąt wpisany w okrąg, a którego bokami są promienie okręgu opisanego na tym czworokącie, poprowadzone do jego wierzchołków, mają miary odpowiednio równe: $\{84^\circ,\ 48^\circ,\ 48^\circ\}$, $\{66^\circ,\ 57^\circ,\ 57^\circ\}$, $\{132^\circ,\ 24^\circ,\ 24^\circ\}$, $\{78^\circ,\ 51^\circ,\ 51^\circ\}$. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta, przy różnych położeniach tych trójkątów.

**Polecenie 3**

Boki czworokąta wpisanego w okrąg mają długości $|AB| = 4$, $|BC| = 4$, $|CD| = 8$, $|AD| = 6$. Oblicz długości przekątnych tego czworokąta i czworokąta wpisanego w ten sam okrąg, którego boki mają długości $|PQ| = 4$, $|QR| = 8$, $|RS| = 4$, $|SP| = 6$.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

**Ćwiczenie 1**

Podstawa $AB$ trapezu $ABCD$ jest średnicą okręgu o promieniu $5$, na nim opisanego. Wysokość tego trapezu jest równa $3$. Oblicz pole trapezu.

**Ćwiczenie 2**

W okrąg wpisano deltoid $ABCD$ o bokach długości $5$ i $4$. Oblicz pole tego deltoidu.

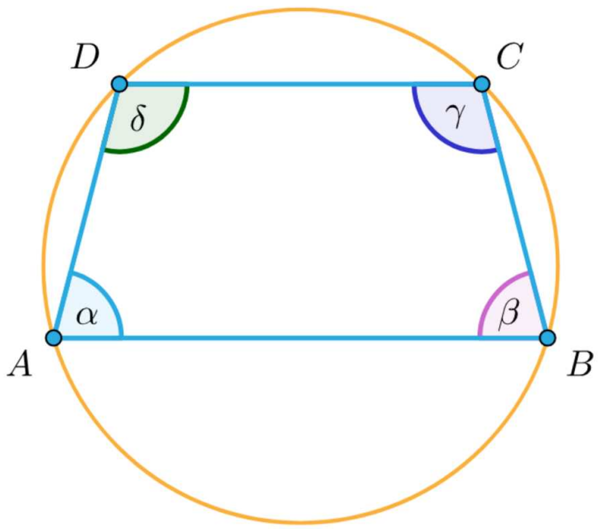
**Ćwiczenie 3**

**Ćwiczenie 4**

W okrąg o promieniu $5$ wpisano deltoid o polu równym $40$. Oblicz obwód tego deltoidu.

**Ćwiczenie 5**

Na danym trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, można opisać okrąg. Kąty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ są w podanej kolejności kątami wewnętrznymi tego trapezu, jak na rysunku.




Korzystając z zapisanych zależności, wyznacz miary kątów danego trapezu.

## Ćwiczenie 6

## Ćwiczenie 7

Kolejne boki czworokąta wpisanego w okrąg mają długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 4$, $|CD| = 3 + \sqrt{21}$, $|AD| = 6$. Wyznacz miarę kąta $ABC$.

## Ćwiczenie 8

# Dla nauczyciela

**Autor:** Jacek Człapiński

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Własności czworokąta wpisanego w okrąg**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- stosuje pojęcie wielokąta wpisanego w okrąg
- stosuje twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg
- stosuje twierdzenie Ptolemeusza
- przeprowadza dowody geometryczne

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

**Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prosi o obliczanie pola trójkąta o zadanych bokach – tak kieruje rozmową, by uczniowie przywołali wzór Herona, którego sformułowanie zapisuje na tablicy i który uczniowie stosują do rozwiązania prostego problemu. Następnie nauczyciel formułuje problem dotyczący istnienia analogicznego wzoru dla wielokątów o większej liczbie boków i rozstrzyga, że dla $n > 4$ taki wzór nie istnieje.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

**Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenia Ptolemeusza. Następnie prezentuje przygotowany wcześniej rysunek czworokąta wpisanego w okrąg, w którym przekątna rozcina go na dwa trójkąty, które nie są równoramienne. Następnie prosi o znalezienie obrazów tych trójkątów w symetrii względem symetralnej przekątnej i prosi o rozstrzygnięcie dotyczące cykliczności tak otrzymanych figur oraz długości przekątnych wyjściowego czworokąta i czworokątów otrzymanych po zastosowaniu symetrii. Następnie poleca uruchomić dołączony Aplet i wykonać zamieszczone w nim polecenia.
2. Nauczyciel formułuje twierdzenie o przekątnej czworokąta wpisanego w okrąg. Prezentuje rysunek ilustrujący twierdzenie i rysunki czworokątów powstałych z innego ułożenia trójkątów, na jakie można rozciąć dany czworokąt. Następnie prosi uczniów o zapisanie twierdzenia Ptolemeusza dla każdego z czworokątów i prosi ich o rozwiązanie powstałego układu równań. Pod kierunkiem nauczyciela jeden z uczniów przeprowadza dowód na tablicy. Następnie nauczyciel zapisuje analogiczny wzór dla drugiej przekątnj.
3. Nauczyciel zapisuje wzór Brahmagupty dla danego czworokąta. Prosi uczniów o zapisanie pola tego czworokąta jako sumy pól trójkątów wyznaczonych przez jedną z przekątnych, w zależności od sinusa kąta. Następnie prosi o wyznaczenie cosinusa

kąta, w zależności od długości boków czworokąta. Wybrany uczeń przeprowadza stosowne przekształcenia na tablicy. Następnie nauczyciel korzystając z jedynki trygonometrycznej i wzorów skróconego mnożenia odpowiednio przekształca wyrażenie algebraiczny tak, by w każdym czynniku pojawiła się suma długości wszystkich boków czworokąta. Następnie prosi wybranego ucznia o dokończenie dowodu.

4. Nauczyciel prezentuje problem opisany w Przykładzie, który pokazuje zastosowanie własności czworokątów cyklicznych do badania pięciokąta formnego. Uczniowie rozwiązują problem w parach i wybrani uczniowie przedstawiają na forum klasy efekty pracy.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

**Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

**Praca domowa:**

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Zachęca uczniów do samodzielnego wyznaczenia długości drugiej przekątnej (patrz twierdzenie o przekątnej czworokąta cyklicznego).

**Materiały pomocnicze:**

Okrąg opisany na trójkącie

**Wskazówki metodyczne:**

Aplet można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można go wykorzystać przy realizacji tematu „Okrąg opisany na czworokącie”.