Własności czworokąta wpisanego w okrąg

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Gerd Altmann z Pixabay, domena publiczna.

Wzór Brahmagupty

Niemal każdy maturzysta zetknął się ze wzorem Herona.

Wskazuje on, że pole trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie:

p – jest połową obwodu danego trójkąta.

Nie może istnieć analogiczny wzór dla dowolnego czworokąta, bo łatwo zauważyć, że dla każdego prostokąta istnieje równoległobok o takich samych bokach i innym polu – wystarczy, że jego kąty nie będą proste. Okazuje się jednak, że dla czworokąta cyklicznego, czyli takiego, który można wpisać w okrąg, zachodzi taki analogiczny wzór, znany jako wzór Brahmagupty.

Na jego mocy, pole czworokąta cyklicznego o bokach długości a, b, c, d jest równe

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

gdzie:

p – jest połową jego obwodu.

Na pytanie, czy da się uogólnić ten wzór na wielokąty cykliczne o większej liczbie boków, musi paść odpowiedź przecząca – wynika to w prosty sposób z analizy wymiarowej (pierwiastek kwadratowy z iloczynu pięciu, czy większej liczby czynników, nie da w wyniku jednostki kwadratowej). Między innymi dowód tego ciekawego wzoru będzie przedmiotem niniejszej lekcji.

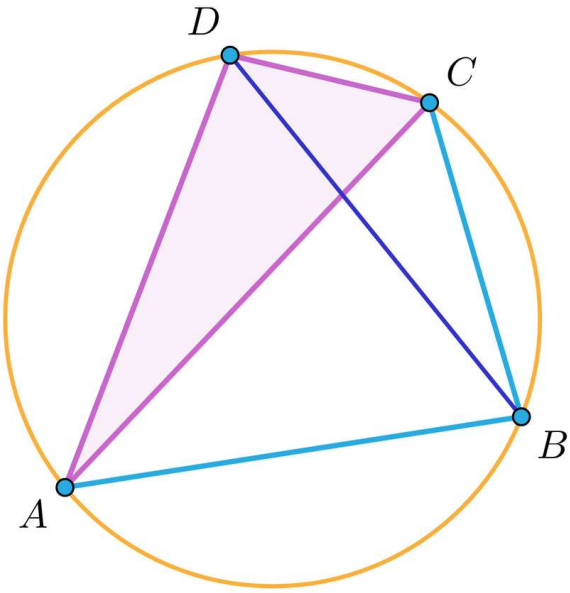
Twoje cele

- Zastosujesz twierdzenie podające warunki opisywalności okręgu na czworokącie wypukłym.
- Zastosujesz twierdzenie Ptolemeusza.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

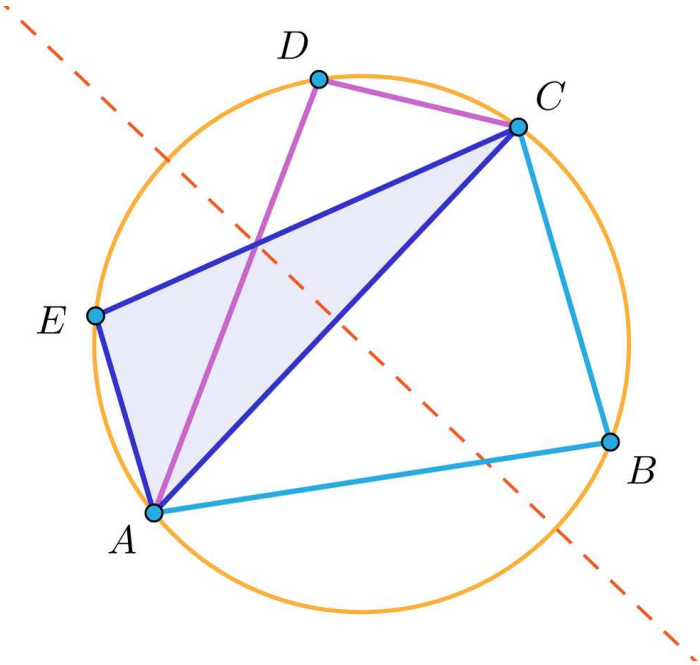
Czworokąt wpisany w okrąg i trójkąty

Zauważmy na poniższym rysunku, że okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest tym samym okręgiem, który jest opisany na każdym z trójkątów ACD i ABC.



Czworokąt i trójkąty wpisane w okrąg

Zauważmy jednak, że obraz trójkąta ACD w symetrii w względem symetralnej odcinka AC także jest wpisany w ten sam okrąg, jak na rysunku.

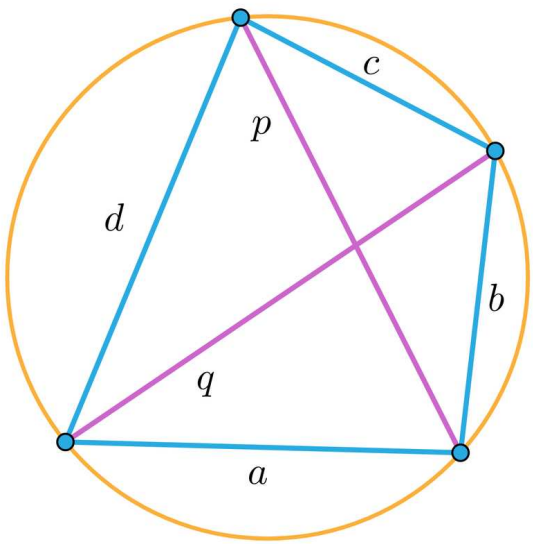


Tym samym otrzymujemy czworokąt cykliczny $ABCE$, którego boki mają te same długości, co wyjściowa figura, ale ich porządek jest inny. Inna jest (może być) dla tych czworokątów miara kątów w wierzchołkach wyznaczonych przez końce przekątnej AC. Analogicznie, można przekształcić odpowiednie trójkąty, gdy osią symetrii będzie symetralna odcinka BD.

Powyższy fakt wykorzystamy dla dowodu poniższego twierdzenia.

Twierdzenie: Twierdzenie o przekątnej czworokąta cyklicznego

Niech dany będzie czworokąt cykliczny o bokach długości a, b, c, d oraz przekątnych p, q, jak na rysunku.



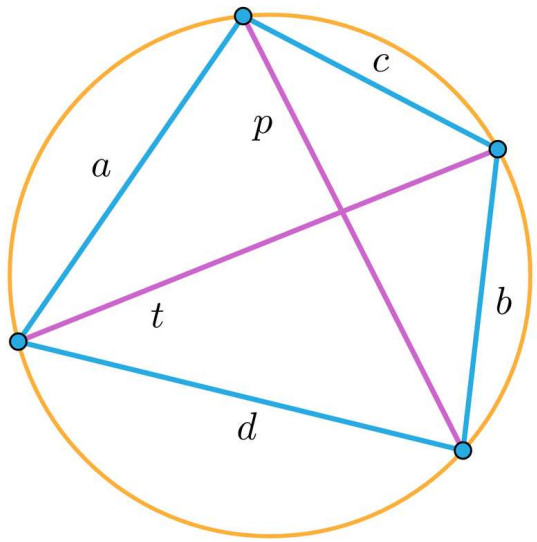
Twierdzenie o przekątnej czworokąta cyklicznego

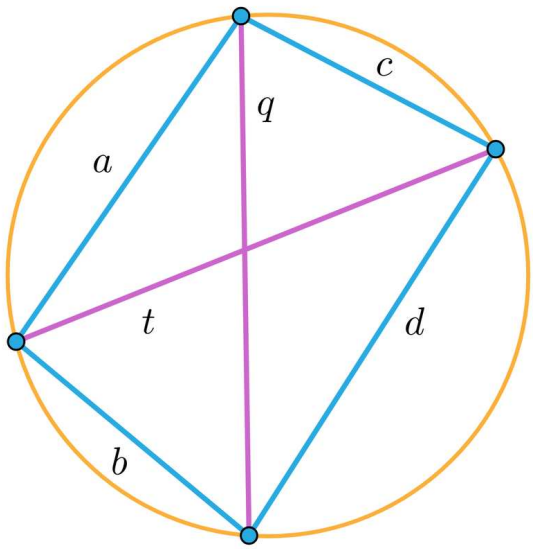
Wtedy $p = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$.

Dowód

Punktem wyjścia będzie dla nas twierdzenie Ptolemeusza, które orzeka, że w czworokącie cyklicznym iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości odpowiednich boków, co przy powyższych oznaczeniach można zapisać, jako: $p \cdot q = ac + bd$.

Zauważmy, że wspomniana wyżej symetria osiowa prowadzi do otrzymania jeszcze dwóch czworokątów cyklicznych o bokach tej samej długości, istotnie różnych, w szczególności o różnych przekątnych, jak na rysunku.





Twierdzenie Ptolemeusza, zapisane dla każdego z tych czworokątów, pozwala zapisać odpowiednio równości:

$p \cdot t = ab + cd$ oraz $q \cdot t = ad + bc$.

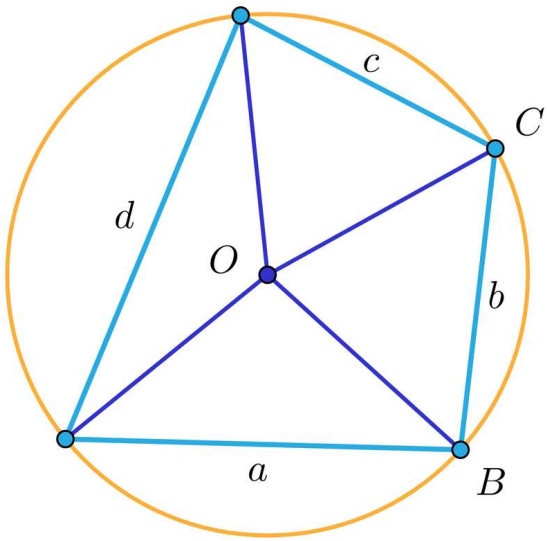
Wyznaczając z pierwszej równości zmienną $t = \frac{ab+cd}{p}$ i wstawiając ją do drugiego z równań otrzymujemy: $q \cdot \frac{ab+cd}{p} = ad + bc$.

Stąd $q = \frac{ad+bc}{ab+cd} \cdot p$.

Zatem $p \cdot \frac{ad+bc}{ab+cd} \cdot p = ac + bd$, czyli $p^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$. Stąd wynika teza twierdzenia.

Analogicznie można wykazać, że $q = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$.

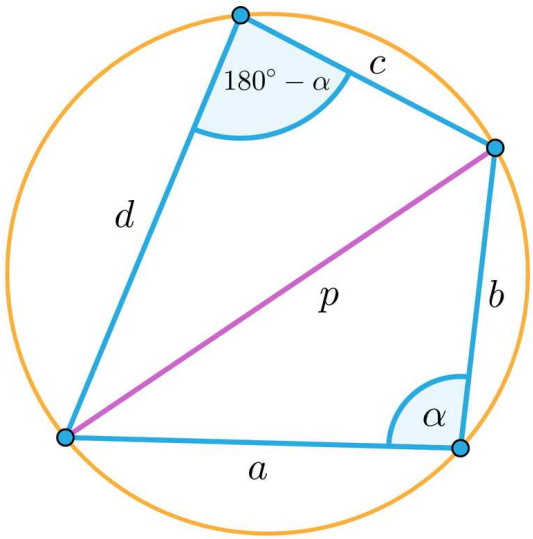
Warto podkreślić, że mówiąc o symetrii odpowiednich trójkątów, na jakie przekątne podzieliły dany czworokąt, nie od razu widać równość długości przekątnej t, jaka pojawia się w dowodzie, na pomocniczych rysunkach. Dlatego, zamiast o symetrii, wygodniej byłoby mówić o rozcinaniu czworokąta na trójkąty, których bokami są odpowiedni bok czworokąta oraz promienie poprowadzone do wierzchołków, jak na rysunku.



Rozcinanie czworokąta

Zmieniając kolejność ułożenia poszczególnych trójkątów otrzymamy różne czworokąty o takich samych bokach, wpisane w dany okrąg. Analizując w szczególności odpowiednie kąty łatwo dostrzec przystawanie odpowiednich figur.

Przejdźmy teraz do udowodnienia wzoru Brahmagupty. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Dowód wzoru Brahmagupty

Wtedy pole P da się wyrazić jako sumę pól odpowiednich dwóch trójkątów:

$$P = \frac{ab\sin\alpha}{2} + \frac{cd\sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{(ab+cd)\sin\alpha}{2}.$$

Stosując twierdzenie cosinusów do wyrażenia kwadratu długości przekątnej p otrzymujemy zależność $p^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \alpha)$, z której, po zastosowaniu wzoru redukcyjnego, wyznaczymy wartość $\cos\alpha$:

$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy, że
$\sin^2\alpha = 1 - \left[\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right]^2 = \frac{[2(ab+cd)]^2-\left[a^2+b^2-c^2-d^2\right]^2}{4(ab+cd)^2}$.

Kolejne przekształcenia licznika otrzymanego ułamka będą opierały się na zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia, w szczególności wzoru na różnicę kwadratów. Wtedy otrzymujemy kolejno:

$$[2(ab+cd)]^2 - \left[a^2+b^2-c^2-d^2\right]^2 =$$

$$= \left[2(ab+cd) - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right] \cdot \left[2(ab+cd) + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right] =$$

$$= \left[\left(c^2+d^2+2cd\right) - \left(a^2+b^2-2ab\right)\right] \cdot \left[\left(a^2+b^2+2ab\right) - \left(c^2+d^2-2cd\right)\right] =$$

$$= \left[(c+d)^2 - (a-b)^2\right] \cdot \left[(a+b)^2 - (c-d)^2\right] =$$

$$= (b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)$$

Podstawiając standardowe oznaczenie $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ otrzymany iloczyn można zapisać w postaci

$$(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d) =$$

$$= (a+b+c+d-2a)(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2d) =$$

$$= (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d) = 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Zatem

$$P = \frac{(ab+cd)\sin\alpha}{2} = \frac{(ab+cd)}{2}\sqrt{\frac{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{4(ab+cd)^2}} =$$

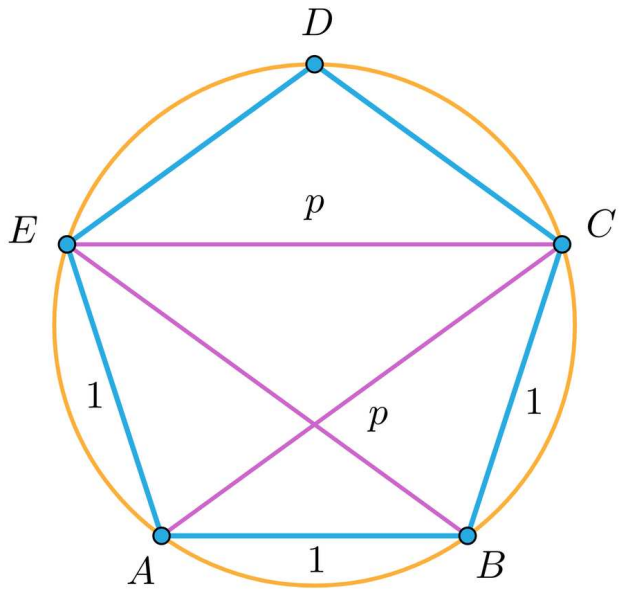
$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Co należało wykazać.

Przykład 1

Okazuje się, że własności czworokąta cyklicznego można wykorzystać do badania własności pięciokąta foremnego.

Rozważmy pięciokąt foremny o boku długości 1, a jego przekątną oznaczmy przez p, jak na rysunku.



Pięciokąt foremny

Czworokąt $ABCE$, którego wierzchołkami są wierzchołki danego pięciokąta jest cykliczny, można zatem zastosować do niego twierdzenie Ptolemeusza.

Mamy wtedy: $p^2 = 1 \cdot p + 1 \cdot 1$.

Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego równania jest tzw. złota liczba: $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Skądinąd wiadomo, że kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma miarę 108°.

Stosując twierdzenie cosinusów moglibyśmy zapisać, że $p^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos 108^\circ$.

Wynik jest oczywiście poprawny, ale nieco „uwikłany”.

Można go jednak wykorzystać, uwzględniając wcześniejszy rezultat, do obliczenia dokładnej wartości sinusa 18°.

Mamy bowiem
$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{2 - 2\cos 108^\circ} = \sqrt{2 - 2\cos(90^\circ + 18^\circ)} = \sqrt{2 + 2\sin 18^\circ}$.

Stąd $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 + 2\sin 18^\circ$, czyli $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Słownik

wielokąt cykliczny

wielokątem cyklicznym nazywamy wielokąt wypukły, który da się wpisać w okrąg

twierdzenie Ptolemeusza

twierdzenie, które orzeka, że czworokąt o kolejnych bokach długości a, b, c, d i przekątnych p, q jest cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$pq = ac + bd$$

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet. Ustal położenie wierzchołków czworokąta wpisanego w okrąg, a następnie wybierz polecenie „Rozcinanie czworokąta”. Odczytaj miary kątów wewnętrznych trójkątów powstałych w wyniku triangulacji. Sprawdź, że spełnione są warunki twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfD0okMv3

Polecenie 2

Miary kątów wewnętrznych trójkątów, na jakie rozcięto czworokąt wpisany w okrąg, a którego bokami są promienie okręgu opisanego na tym czworokącie, poprowadzone do jego wierzchołków, mają miary odpowiednio równe: $\{84^\circ,\ 48^\circ,\ 48^\circ\}$, $\{66^\circ,\ 57^\circ,\ 57^\circ\}$, $\{132^\circ,\ 24^\circ,\ 24^\circ\}$, $\{78^\circ,\ 51^\circ,\ 51^\circ\}$. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta, przy różnych położeniach tych trójkątów.

Polecenie 3

Boki czworokąta wpisanego w okrąg mają długości $|AB| = 4$, $|BC| = 4$, $|CD| = 8$, $|AD| = 6$. Oblicz długości przekątnych tego czworokąta i czworokąta wpisanego w ten sam okrąg, którego boki mają długości $|PQ| = 4$, $|QR| = 8$, $|RS| = 4$, $|SP| = 6$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest średnicą okręgu o promieniu 5, na nim opisanego. Wysokość tego trapezu jest równa 3. Oblicz pole trapezu.

Ćwiczenie 2

W okrąg wpisano deltoid $ABCD$ o bokach długości 5 i 4. Oblicz pole tego deltoidu.

Ćwiczenie 3

Zaznacz poprawną odpowiedź. Pole czworokąta wpisanego w okrąg, którego boki mają długości $|AB| = 4$, $|BC| = 4$, $|CD| = 8$, $|AD| = 6$ jest równe:

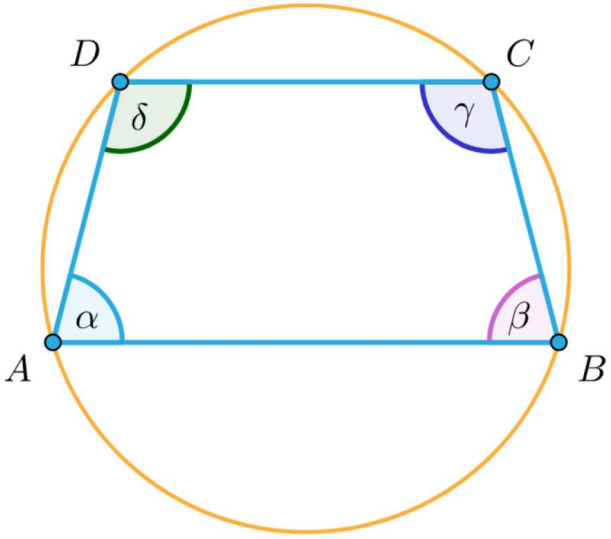
- $16\sqrt{3}$
- $72\sqrt{14}$
- $\sqrt{22}$
- $7\sqrt{15}$

Ćwiczenie 4

W okrąg o promieniu 5 wpisano deltoid o polu równym 40. Oblicz obwód tego deltoidu.

Ćwiczenie 5

Na danym trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, można opisać okrąg. Kąty α, β, γ, δ są w podanej kolejności kątami wewnętrznymi tego trapezu, jak na rysunku.



Korzystając z zapisanych zależności, wyznacz miary kątów danego trapezu.

Dopasuj zależności do miar kątów trapezu.

$\gamma = 3\alpha$	$\alpha = 75^\circ,\ \beta = 75^\circ,$ $\gamma = 105^\circ,\ \delta = 105^\circ$
$\gamma - \alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ,$ $\gamma = 120^\circ,\ \delta = 120^\circ$
$\alpha + 2\beta = \frac{3}{2}\delta$	$\alpha = 45^\circ,\ \beta = 45^\circ,$ $\gamma = 135^\circ,\ \delta = 135^\circ$

Ćwiczenie 6

W czworokąt cykliczny $ABCD$, o bokach długości a, b, c, d, można wpisać okrąg.
Udowodnij, że pole tego czworokąta można wyrazić wzorem $P = \sqrt{abcd}$.
Ułóż w kolejności etapy dowodu.
Dowód:

$p - b = \frac{a+b+c+d}{2} - b = \frac{a+c+d-b}{2} = \frac{(a+c)+d-b}{2} = \frac{b+d+d-b}{2} = d$

W czworokąt o danych bokach można wpisać okręg tylko wtedy, gdy $a + c = b + d$.

$p - c = \frac{a+b+c+d}{2} - c = \frac{a+b+d-c}{2} = \frac{(b+d)+a-c}{2} = \frac{a+c+a-c}{2} = a$

$p - d = \frac{a+b+c+d}{2} - d = \frac{a+b+c-d}{2} = \frac{(a+c)+b-d}{2} = \frac{b+d+b-d}{2} = b$

Ponieważ $2p = a + b + c + d$, więc każdy z czynników $(p - a)$, $(p - b)$, $(p - c)$, $(p - d)$ możemy przekształcić, otrzymując kolejno:

Zatem iloczyn $(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$ jest równy $a \cdot b \cdot c \cdot d$. Co kończy dowód.

Przyjmijmy, że a, b, c, d są długościami kolejnych boków czworokąta.

Pole czworokąta cyklicznego opisuje wzór Brahmagupty:
$P = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$.

$p - a = \frac{a+b+c+d}{2} - a = \frac{b+c+d-a}{2} = \frac{(b+d)+c-a}{2} = \frac{a+c+c-a}{2} = c$

Ćwiczenie 7

Kolejne boki czworokąta wpisanego w okrąg mają długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 4$, $|CD| = 3 + \sqrt{21}$, $|AD| = 6$. Wyznacz miarę kąta ABC.

Ćwiczenie 8

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Każdy trapez równoramienny jest czworokątem cyklicznym.	○	○
Każdy romb jest czworokątem cyklicznym.	○	○
Istnieje czworokąt cykliczny, w którym miary każdych dwóch sąsiednich kątów różnią się o 40°.	○	○
Każdy czworokąt, którego dwa kąty są kątami prostymi jest wielokątem cyklicznym.	○	○
Każdy deltoid, w którym dwa kąty są kątami prostymi jest wielokątem cyklicznym.	○	○

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności czworokąta wpisanego w okrąg

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje pojęcie wielokąta wpisanego w okrąg
- stosuje twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg
- stosuje twierdzenie Ptolemeusza
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o obliczanie pola trójkąta o zadanych bokach – tak kieruje rozmową, by uczniowie przywołali wzór Herona, którego sformułowanie zapisuje na tablicy i który uczniowie stosują do rozwiązania prostego problemu. Następnie nauczyciel formułuje problem dotyczący istnienia analogicznego wzoru dla wielokątów o większej liczbie boków i rozstrzyga, że dla $n > 4$ taki wzór nie istnieje.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenia Ptolemeusza. Następnie prezentuje przygotowany wcześniej rysunek czworokąta wpisanego w okrąg, w którym przekątna rozcina go na dwa trójkąty, które nie są równoramienne. Następnie prosi o znalezienie obrazów tych trójkątów w symetrii względem symetralnej przekątnej i prosi o rozstrzygnięcie dotyczące cykliczności tak otrzymanych figur oraz długości przekątnych wyjściowego czworokąta i czworokątów otrzymanych po zastosowaniu symetrii. Następnie poleca uruchomić dołączony Aplet i wykonać zamieszczone w nim polecenia.
2. Nauczyciel formułuje twierdzenie o przekątnej czworokąta wpisanego w okrąg. Prezentuje rysunek ilustrujący twierdzenie i rysunki czworokątów powstałych z innego ułożenia trójkątów, na jakie można rozciąć dany czworokąt. Następnie prosi uczniów o zapisanie twierdzenia Ptolemeusza dla każdego z czworokątów i prosi ich o rozwiązanie powstałego układu równań. Pod kierunkiem nauczyciela jeden z uczniów przeprowadza dowód na tablicy. Następnie nauczyciel zapisuje analogiczny wzór dla drugiej przekątnj.
3. Nauczyciel zapisuje wzór Brahmagupty dla danego czworokąta. Prosi uczniów o zapisanie pola tego czworokąta jako sumy pól trójkątów wyznaczonych przez jedną z przekątnych, w zależności od sinusa kąta. Następnie prosi o wyznaczenie cosinusa

kąta, w zależności od długości boków czworokąta. Wybrany uczeń przeprowadza stosowne przekształcenia na tablicy. Następnie nauczyciel korzystając z jedynki trygonometrycznej i wzorów skróconego mnożenia odpowiednio przekształca wyrażenie algebraiczny tak, by w każdym czynniku pojawiła się suma długości wszystkich boków czworokąta. Następnie prosi wybranego ucznia o dokończenie dowodu.

4. Nauczyciel prezentuje problem opisany w Przykładzie, który pokazuje zastosowanie własności czworokątów cyklicznych do badania pięciokąta formnego. Uczniowie rozwiązują problem w parach i wybrani uczniowie przedstawiają na forum klasy efekty pracy.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Zachęca uczniów do samodzielnego wyznaczenia długości drugiej przekątnej (patrz twierdzenie o przekątnej czworokąta cyklicznego).

Materiały pomocnicze:

Okrąg opisany na trójkącie

Wskazówki metodyczne:

Aplet można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można go wykorzystać przy realizacji tematu „Okrąg opisany na czworokącie”.