

## Bryły obrotowe

Prezentacja, jak powstają bryły obrotowe. Zasób zawiera prezentację multimedialną ilustrującą tworzenie brył obrotowych i film o powstawaniu naczyń na kole garncarskim. Zasób zawiera wizualizację przestrzenną 3D powstawania brył obrotowych.

Przykłady przekrojów brył obrotowych. Prezentacja multimedialna – przekroje osiowe i poprzeczne. Animacja 3D – wizualizacja przekrojów brył obrotowych.

Ćwiczenia w rysowaniu brył obrotowych. Zadania otwarte.

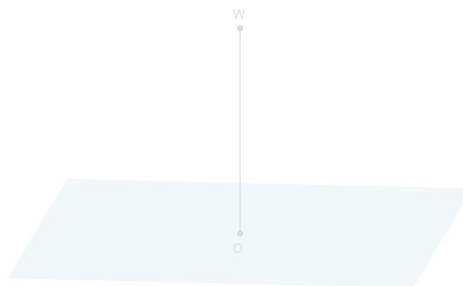
Sposób tworzenia brył obrotowych. Modele brył obrotowych. Rysowanie, rozpoznawanie elementów. Ćwiczenia, w tym również ćwiczenie interaktywne.

# Bryły obrotowe

W tym materiale zawarte są informacje na temat brył obrotowych. Poznasz podstawowe definicje i przykłady brył obrotowych. Dowiesz się jak wyznaczyć przekrój osiowy i przekrój poprzeczny w tego typu bryłach.

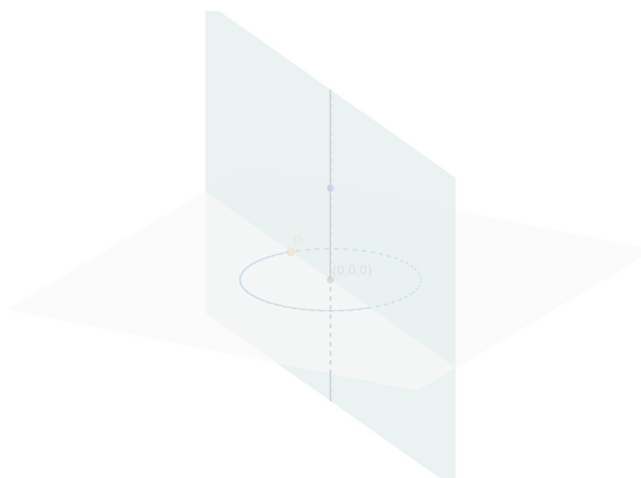
## Definicja: Oś obrotu

Obracając figurę płaską dookoła prostej  $p$ , zawartej w tej samej płaszczyźnie, otrzymujemy powierzchnię, która ogranicza figurę, zwaną bryłą obrotową. Prosta  $p$  nazywamy osią obrotu. Jest ona osią symetrii bryły obrotowej.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P118saiJ0>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P118saiJ0>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Przykład 1



## bryła obrotowa

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RObJFJGe1NDma>

Bryły obrotowe\_4106

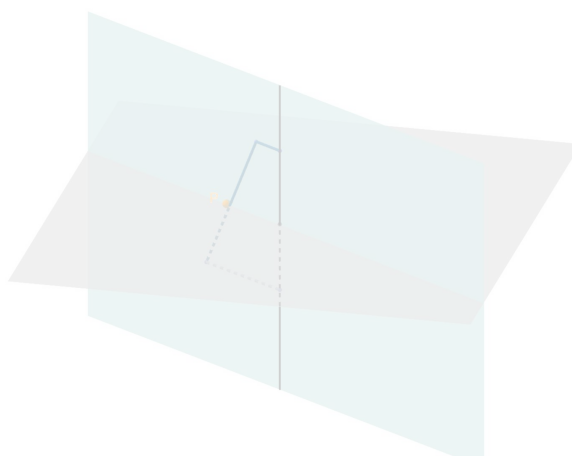
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje w jaki sposób wyrabia się naczynia gliniane i jakie figury tworzą takie naczynia.

Przykłady brył obrotowych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P118saiJ0>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Przykład 2

Przez całą noc padał deszcz i beczka na deszczówkę została napełniona w połowie. Beczka ma wysokość 1,4 m. Jej średnica w najszerszym miejscu wynosi 1 m, a w najwęższym 80 cm.

Ile litrów wody znajduje się w beczce? Przyjmij, że  $\pi = \frac{22}{7}$ . Skorzystaj z podanego wzoru na pojemność beczki.

Wzór na pojemność beczki:

$$V = \frac{1}{12}\pi H(2d_1^2 + d_2^2)$$

- $V$  – pojemność,
- $H$  – wysokość beczki,
- $d_1$  – średnica w najszerszym miejscu,
- $d_2$  – średnica w najwęższym miejscu.

Mamy podać pojemność beczki w litrach.

Jeden litr to jeden decymetr sześcienny. Zapisujemy więc wymiary beczki w decymetrach.

$$H = 1,4 \text{ m} = 14 \text{ dm}$$

$$d_1 = 1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

$$d_2 = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}.$$

Beczka napełniona jest w połowie, zatem obliczamy połowę jej pojemności.

$$\frac{1}{2}V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}\pi H(2d_1^2 + d_2^2)$$

$$\frac{1}{2}V = \frac{1}{24} \cdot \frac{22}{7} \cdot 14(2 \cdot 10^2 + 8^2)$$

$$\frac{1}{2}V = \frac{44}{24} \cdot 264$$

$$\frac{1}{2}V = 484.$$

W beczce jest 484 l wody.

### Przykład 3

Bryła  $G$  powstaje w wyniku obrotu figury  $F$  wokół prostej  $p$ .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/ROByJb6HnwYFD>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3d pokazuje, że poprzez obrót prostokąta wzdłuż jego krawędzi otrzymamy walec.

### Przykład 4

Zaobserwuj, jaka bryła powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z przyprostokątnych,



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RSzO5zNjzr4Q2](#)

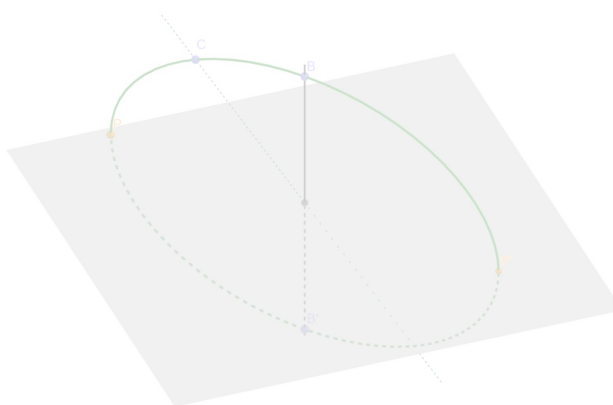
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3d pokazuje, że poprzez obrót trójkąta prostokątnego wzdłuż jego przyprostokątnej otrzymamy stożek.

### Ciekawostka

Nasza planeta nie ma kształtu idealnej kuli. Na skutek ruchu wirowego (czyli ruchu wokół własnej osi) Ziemia uległa spłaszczeniu przy biegunach. W wyniku tego powstała bryła zwana geoidą (z greckiego: gea – Ziemia, eidos – kształt).

Bryłą najbardziej zbliżoną kształtem do Ziemi jest elipsoida obrotowa.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P118saiJ0>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Przekroje brył obrotowych

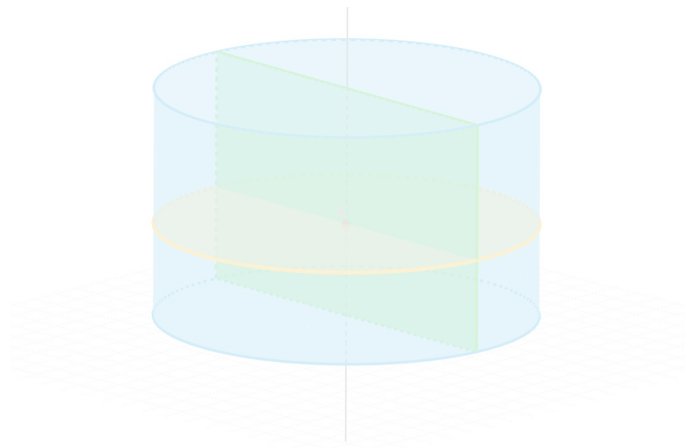
Figurę płaską, która powstanie po przecięciu bryły płaszczyzną, nazywamy przekrojem tej bryły.

**Ważne!**

**Przekrój osiowy bryły obrotowej** to część wspólna tej bryły z płaszczyzną zawierającą oś obrotu.

**Przekrój poprzeczny bryły obrotowej** to część wspólna tej bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu.

Przykład 5



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P118saiJ0>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Przykład 6

Określ, jaki kształt mają przekroje narysowanych brył. Jeśli nie wiesz, jak nazywa się dana figura, sprawdź w internecie jej nazwę.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RTHF5m3TyZpNt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje baterię elektryczną. Kreślone są krawędzie – powstaje walec. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą walec na dwie bryły.

### Przykład 7

Arbuz przekrojono na pół. Otrzymany przekrój jest w kształcie koła o polu  $452,16 \text{ cm}^2$ . Oblicz średnicę tego koła. Przyjmij  $\pi = 3,14$ .

Korzystamy ze wzoru na pole koła o promieniu  $r$ .

$$P = \pi r^2$$

$$452,16 = 3,14 \cdot r^2$$

$$r^2 = 144$$

$$r = \sqrt{144} = 12$$

bo

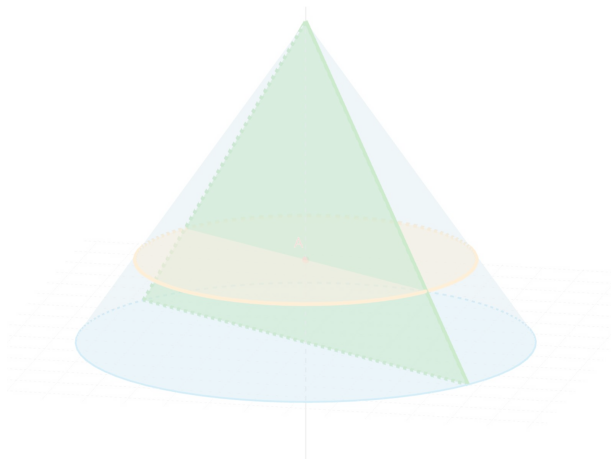
$$r > 0.$$

Obliczamy średnicę koła.

$$2 \cdot 12 \text{ cm} = 24 \text{ cm.}$$

Średnica koła, będąca przekrojem arbuza, jest równa 24 cm.

#### Przykład 8



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P118saiJ0>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 1



Narysuj bryłę, która powstanie w wyniku obrotu danej figury wokół prostej  $p$ .

1



2



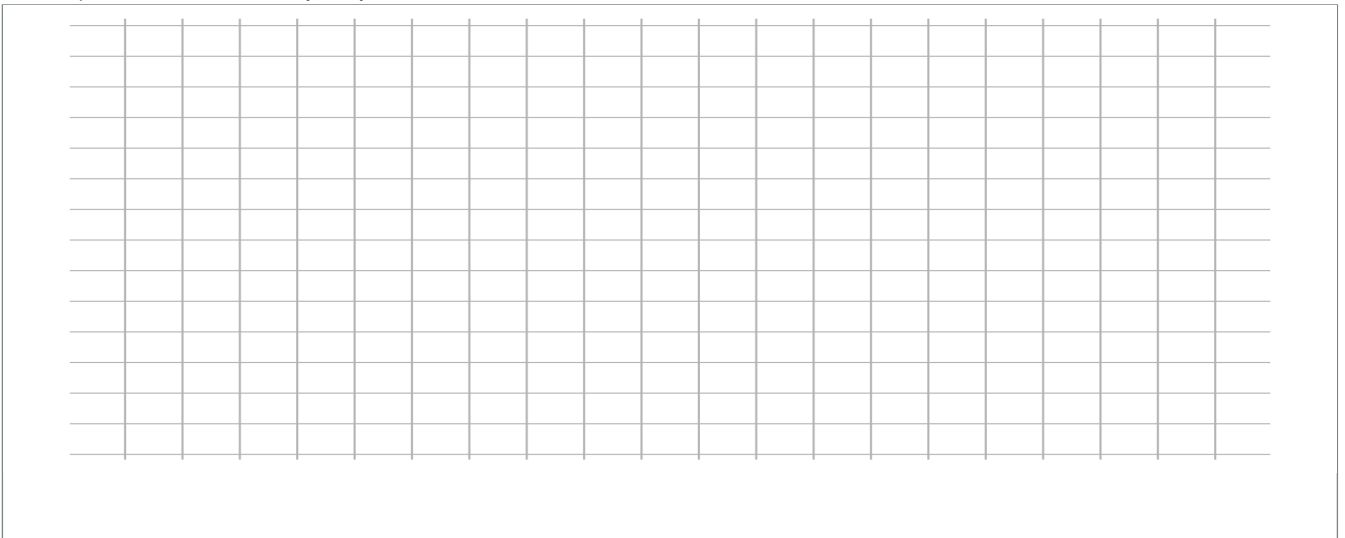
3



4



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



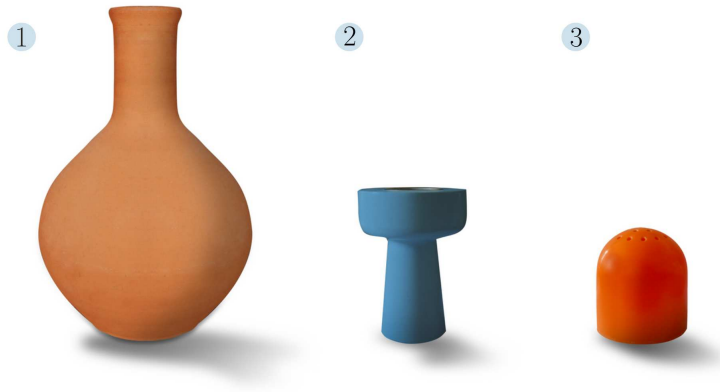
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2

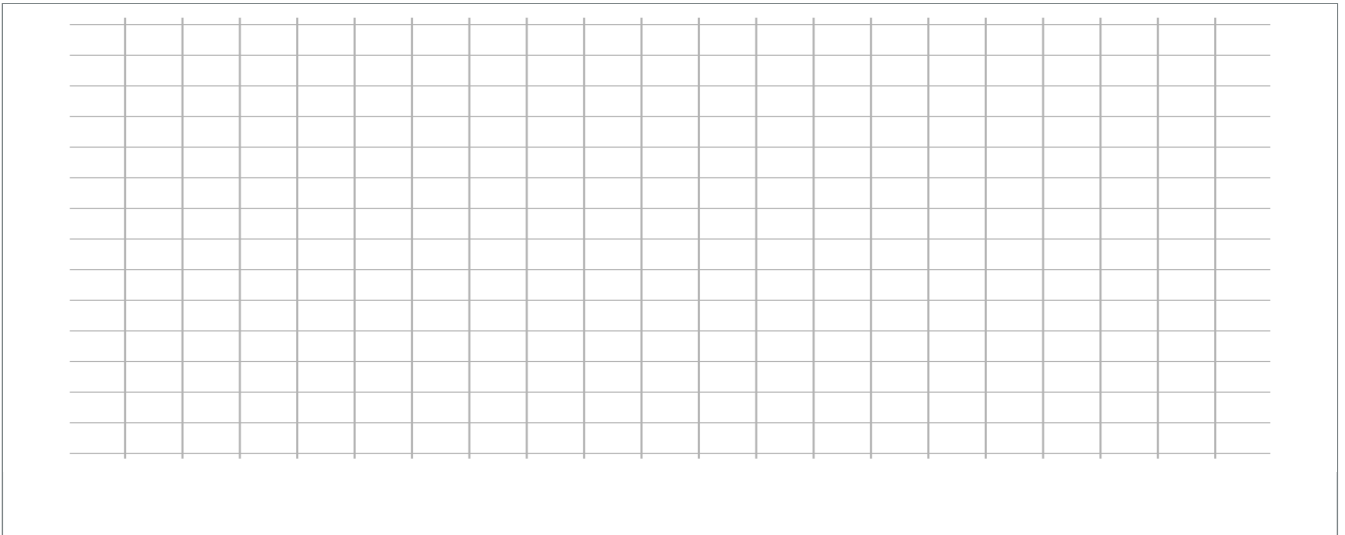


Bryła na rysunku powstała w wyniku obrotu pewnej figury płaskiej dookoła prostej.

Narysuj tę figurę i tę prostą.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

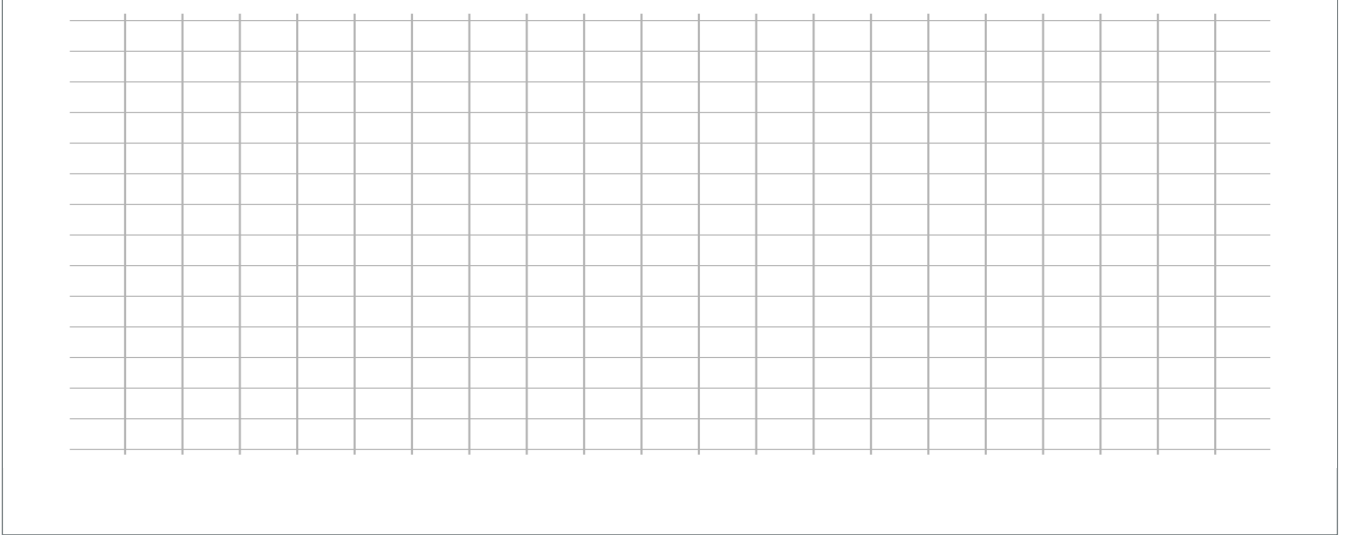


#### Ćwiczenie 4



Narysuj bryłę obrotową, której przekrój osiowy jest

- a. trójkątem równoramiennym.
- b. trójkątem równobocznym.



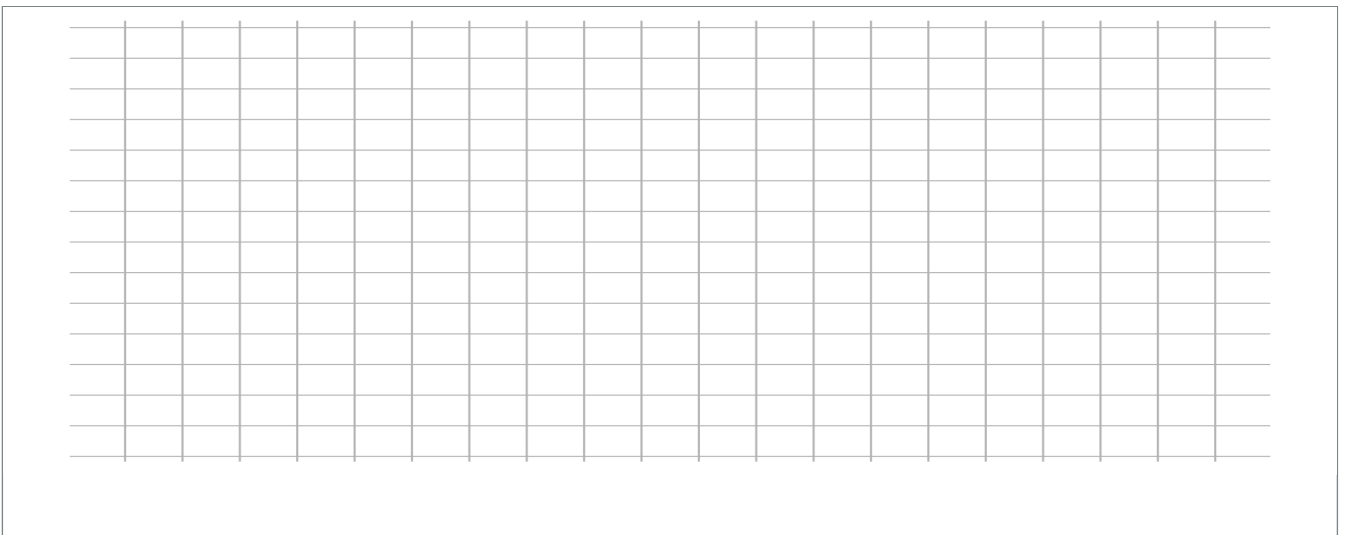
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

#### Ćwiczenie 5



Narysuj bryłę obrotową, której przekrój osiowy jest

- a. prostokątem,
- b. kwadratem.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 6



Narysuj bryłę obrotową, której przekrój poprzeczny jest kołem.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 7



Bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu prostokąta  $P$  wokół jednego z jego boków. Przekątna prostokąta  $P$  ma długość 5 i jest nachylona do jego boku pod kątem  $60^\circ$ . Jaką długość ma promień  $r$  podstawy tej bryły? Zaznacz poprawną odpowiedź.

$r = \frac{3}{2}$  lub  $r = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{5}{2}$  lub  $r = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{3}{2}$  lub  $r = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

$r = \frac{5}{2}$  lub  $r = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 8



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

Sześcian jest bryłą obrotową.

Istnieje bryła obrotowa, której przekrój osiowy jest inny niż przekrój poprzeczny.

Bryła, której każdy przekrój poprzeczny jest kołem, jest bryłą obrotową.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 9



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie słowa lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Część wspólna bryły obrotowej z płaszczyzną zawierającą oś obrotu to przekrój  bryły.
- Przekrój poprzeczny bryły obrotowej to część wspólna tej bryły z płaszczyzną  do osi obrotu.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 10



Arbuz przekrojono na pół. Pole tak otrzymanego przekroju jest w kształcie koła o polu  $530,66 \text{ cm}^2$ . Skóra arbuza ma grubość  $2 \text{ cm}$ . Oblicz, ile procent pola przekroju stanowi pole powierzchni miąższu arbuza. Przyjmij  $\pi = 3,14$ . Wynik zaokrąglaj do jednej cyfry po przecinku. Zaznacz poprawną odpowiedź.

74%

78%

72%

76%

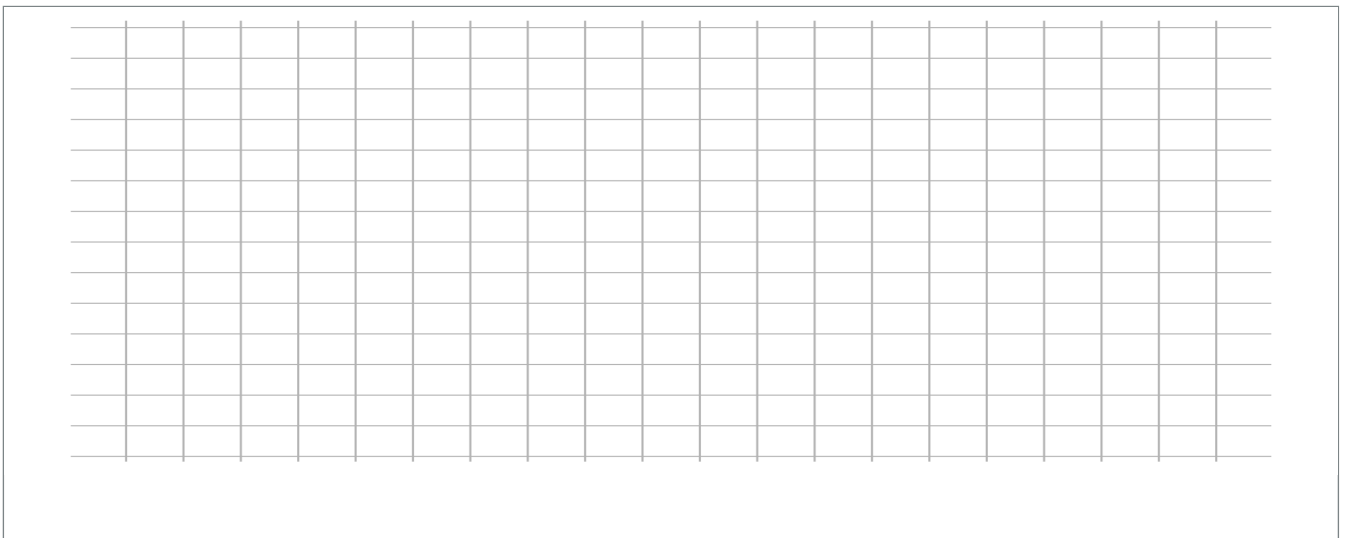
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 11



Narysuj bryłę obrotową powstałą w wyniku obrotu

- trapezu prostokątnego wokół krótszego ramienia,
- trapezu równoramiennego wokół dłuższej podstawy.



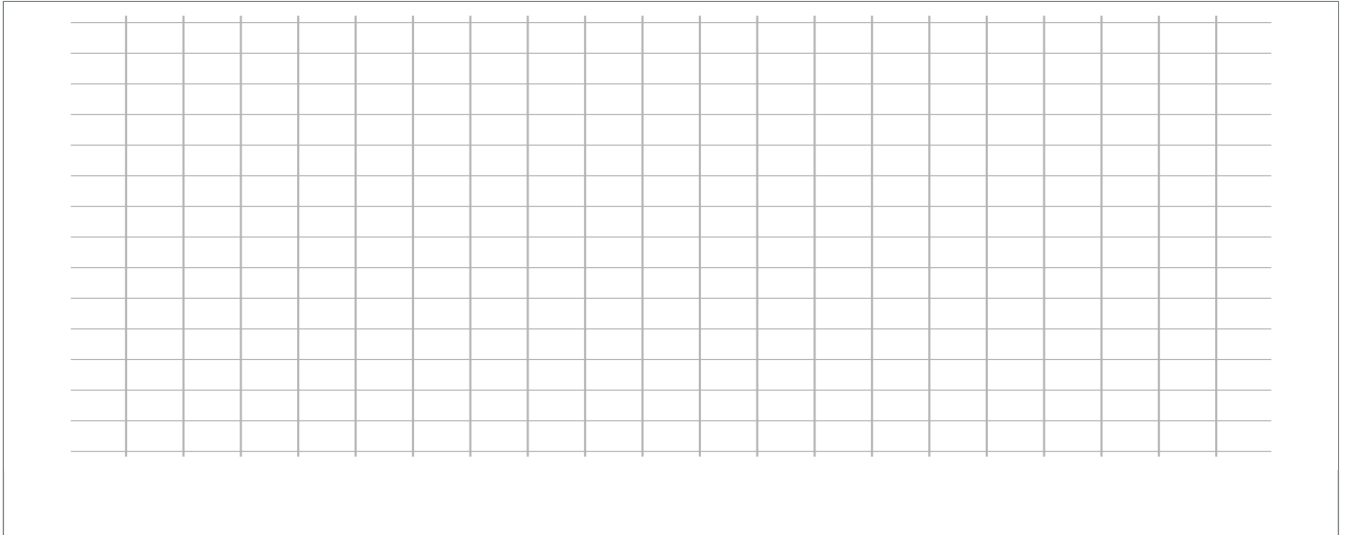
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 12



Narysuj bryłę, która powstała w wyniku obrotu prostokąta wokół prostej

- a. na której leży jeden z boków,
- b. równoległej do dłuższego boku, która leży poza tym bokiem,
- c. równoległej do krótszego boku, która leży poza tym bokiem.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.