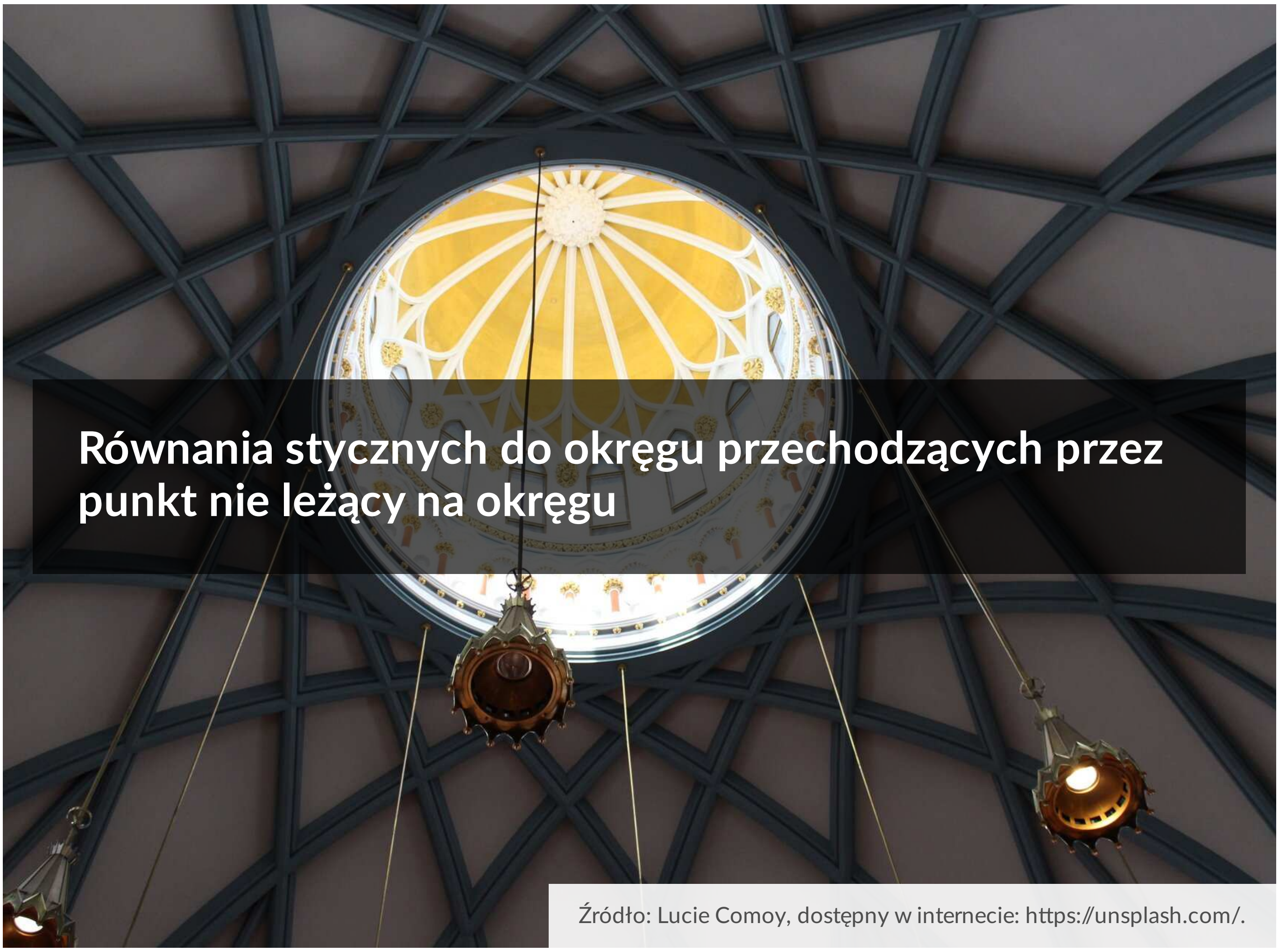
Równania stycznych do okręgu przechodzących przez punkt nie leżący na okręgu

Równania stycznych do okręgu przechodzących przez punkt nie leżący na okręgu



Źródło: Lucie Comoy, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Cyrkiel jest przyrządem kreślarskim do rysowania okręgów. Konstrukcja geometryczna wykonana za pomocą cyrkla i linijki nazywana jest konstrukcją platońską. W 1672 roku Georg Mohr wykazał, że każda konstrukcja stworzona linijką i cyrklem może być wykonana też samym cyrklem. Choć samym cyrklem nie można narysować prostej, to można ją wyznaczyć za pomocą dwóch punktów będących punktami przecięcia dwóch okręgów.

Taką konstrukcję można wykorzystać do wyznaczenia prostych stycznych do okręgu przechodzących przez punkt, który leży poza nim. Z takiej konstrukcji jednak nie zawsze da się zapisać równania tych stycznych. Dlatego w tym materiale wykorzystamy przede wszystkim przekształcenia algebraiczne.

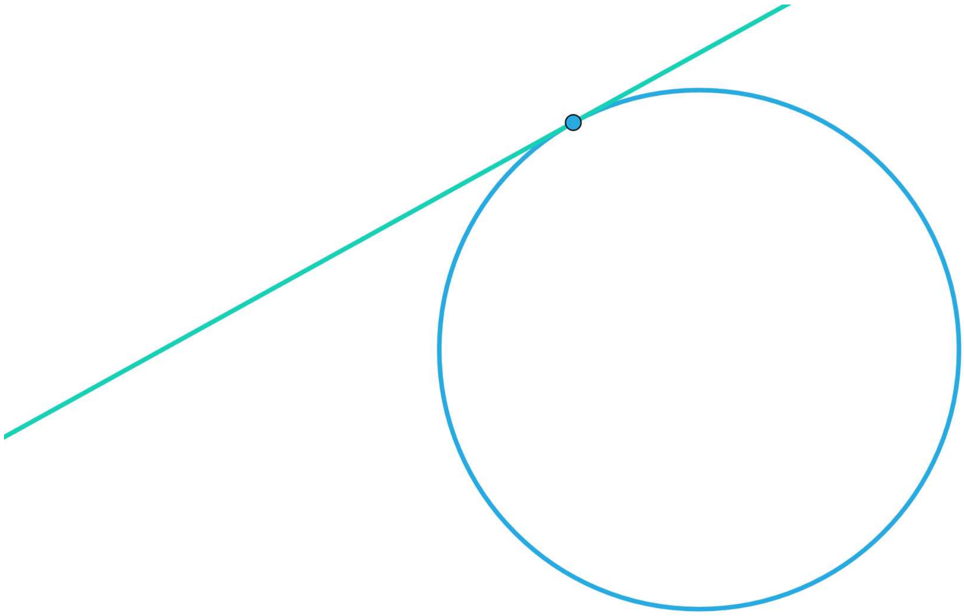
Twoje cele

- Skonstruujesz styczne do okręgu wyprowadzone z punktu nie leżącego na okręgu.
- Poznasz alternatywne metody wyznaczania równań stycznych do okręgu.

Przeczytaj

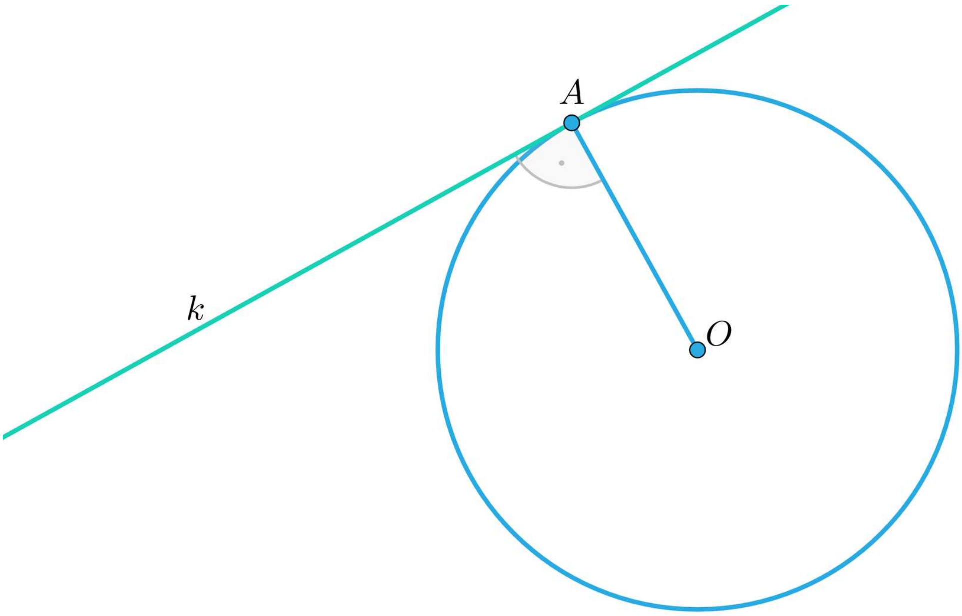
Definicja: styczna do okręgu

Prostą, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem, nazywamy styczną do okręgu. Punkt wspólny nazywamy punktem styczności.



Własność: styczna do okręgu w danym punkcie

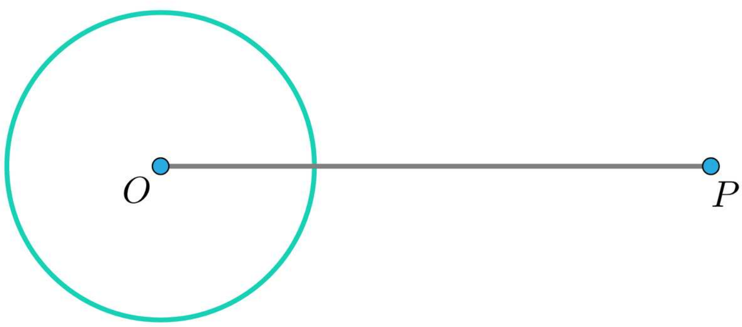
Prosta k jest styczna do okręgu w punkcie A wtedy i tylko wtedy, gdy punkt A jest punktem wspólnym okręgu i prostej k oraz jednocześnie odcinek OA, łączący środek okręgu z tym punktem, jest prostopadły do prostej k.



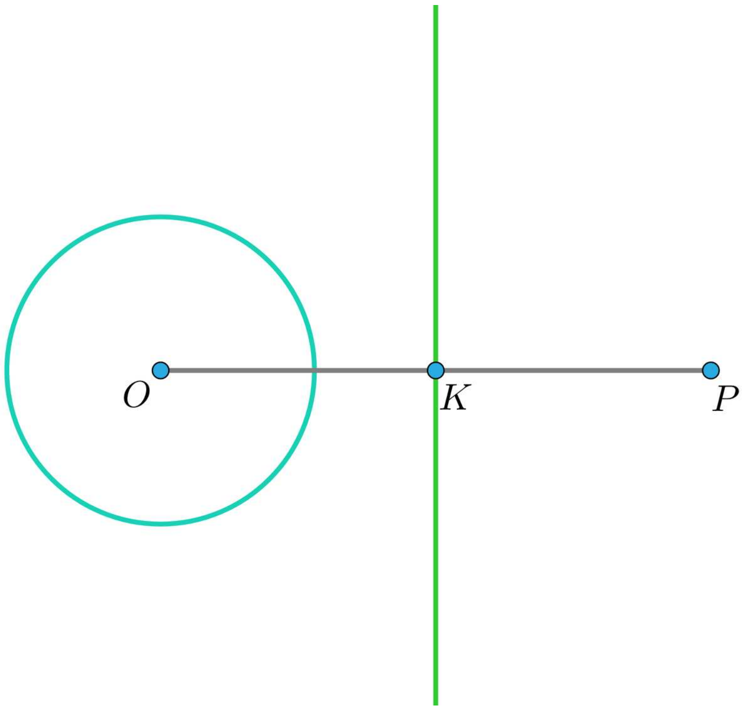
Podamy teraz konstrukcyjny sposób poprowadzenia przez dany punkt, nie należący do okręgu, stycznych do tego okręgu.

Konstrukcja

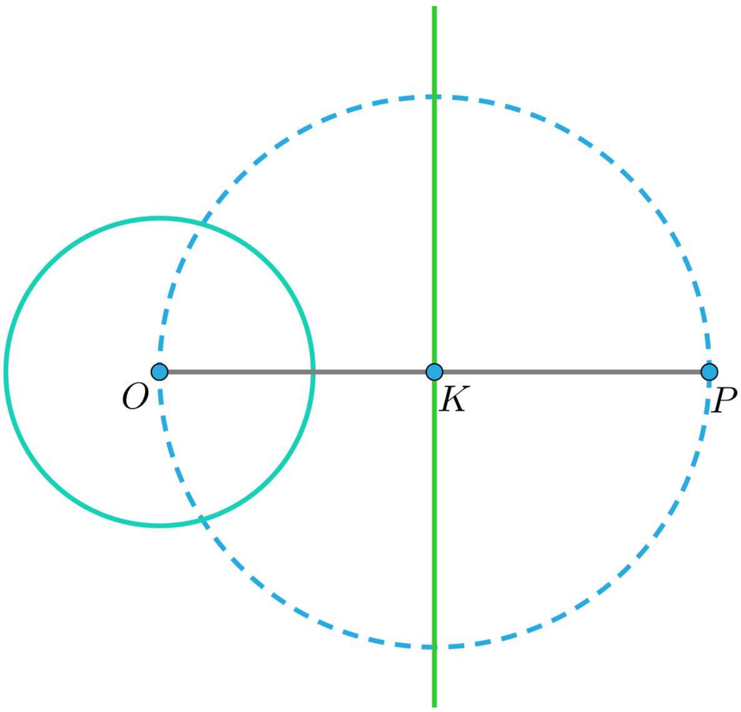
1. Rysujemy okrąg i zaznaczamy punkt P. Następnie rysujemy odcinek OP.



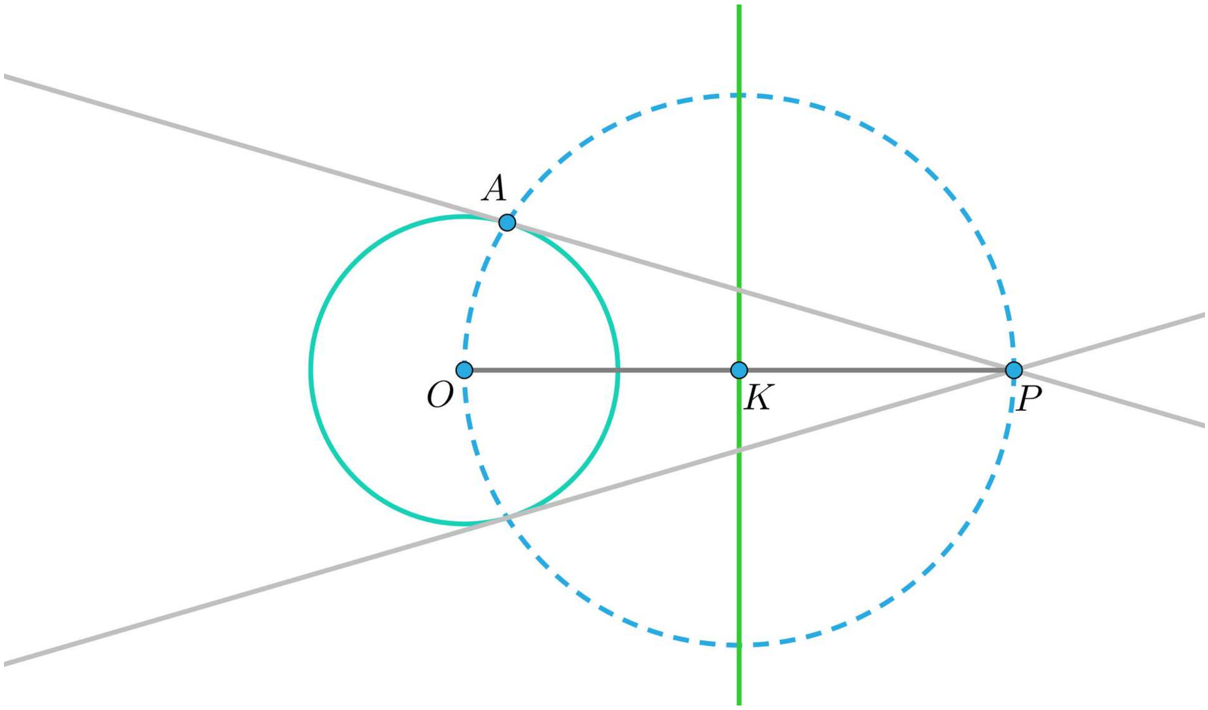
2. Prowadzimy symetralną odcinka OP, która przechodzi przez jego środek w punkcie K.



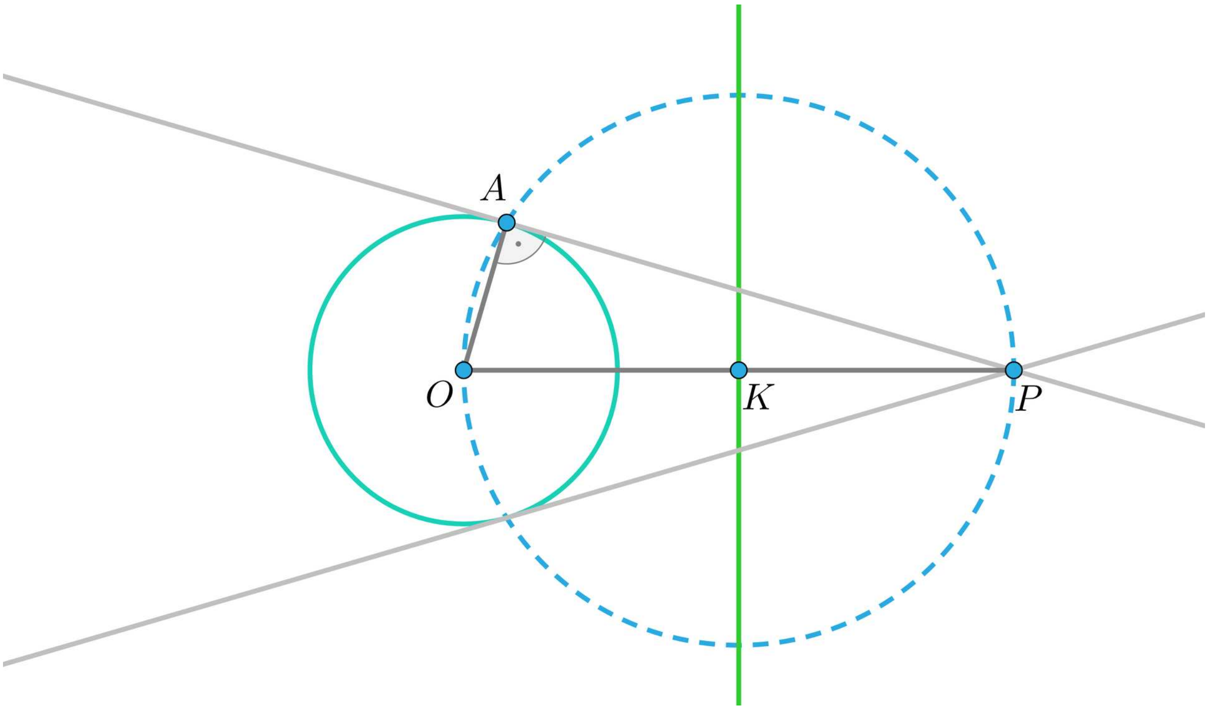
3. Zakreślamy okrąg o środku w punkcie K i promieniu KO.



4. Wyznaczamy punkty wspólne tego okręgu i okręgu danego. Przez każdy z tych punktów i punkt P prowadzimy prostą.



Prosta AP jest styczna do okręgu, ponieważ kąt wpisany OAP jest oparty na średnicy OP, więc ma miarę 90°. Prosta AP jest prostopadła do odcinka OA, zatem odległość punktu O od tej prostej w punkcie A jest równa promieniowi danego okręgu.



Opisana konstrukcja pozwala wyznaczyć dwie styczne dla każdego punktu P leżącego poza danym okręgiem.

Ważne!

Z danego punktu leżącego poza okręgiem, można poprowadzić dwie styczne do tego okręgu.

Wykorzystamy powyższą metodę do wyznaczenia równań stycznych do okręgu.

Przykład 1

Napiszemy równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 13$ poprowadzonych z punktu $P = (5, 1)$.

Rozwiązanie:

Równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (x_p, y_p)$ jest postaci $y = a(x - x_p) + y_p$.

Dla danego punktu $P = (5, 1)$ otrzymujemy zatem równanie prostej w postaci $y = a(x - 5) + 1$.

Z równania danego okręgu wiemy, że ma środek w punkcie $O = (0, 0)$.

Opierając się na przedstawionej konstrukcji, wyznaczymy równanie okręgu o środku w punkcie K, będącym środkiem odcinka OP.

Wyznaczymy współrzędne punktu K korzystając ze wzoru na środek odcinka.
$K = \left(\frac{0+5}{2}, \frac{0+1}{2}\right)$, czyli $K = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Promień okręgu o środku w punkcie K wynosi
$r_1 = |KP| = |OK| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Równanie okręgu o środku w punkcie K ma zatem postać $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{26}{4}$.

Punkty przecięcia okręgów $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{26}{4}$ i $x^2 + y^2 = 13$ są punktami styczności prostych przechodzących przez punkt P.

Po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia, równanie okręgu $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{26}{4}$, przyjmuje postać $x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{26}{4}$, a po redukcji wyrażeń podobnych: $x^2 + y^2 - 5x - y = 0$.

Szukamy punktów przecięcia obu okręgów, w tym celu rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

Odejmując stronami równanie pierwsze od drugiego, otrzymujemy: $5x + y = 13$, stąd $y = 13 - 5x$.

W równaniu $x^2 + y^2 = 13$ podstawiamy $y = 13 - 5x$ i otrzymujemy równanie $x^2 + (13 - 5x)^2 = 13$.
Poprzez przekształcenia otrzymujemy $x^2 + 169 - 130x + 25x^2 = 13$, a następnie

$26x^2 - 130x + 156 = 0$, dochodzimy do równania kwadratowego postaci $13x^2 - 65x + 78 = 0$. Wyróżnik tego trójmianu wynosi $\Delta = 65^2 - 4 \cdot 13 \cdot 78 = 169 > 0$, czyli równanie ma dwa rozwiązania:

$x_1 = \frac{65-13}{2 \cdot 13} = 2$ i $x_2 = \frac{65+13}{2 \cdot 13} = 3$.

Ponieważ $y = 13 - 5x$, więc $y_1 = 3$, a $y_2 = -2$.

Otrzymaliśmy punkty styczności $A = (2, 3)$ i $B = (3, -2)$, możemy przejść do wyznaczenia równań stycznych.

Równanie stycznej AP zapiszemy jako:

$y = a(x - 5) + 1$.

Wiedząc, że przechodzi przez punkt A, otrzymujemy $3 = -3a + 1$, $a = -\frac{2}{3}$

Równanie stycznej przyjmuje więc postać:

$y = -\frac{2}{3}(x - 5) + 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} + 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

Równanie stycznej BP zapiszemy jako:

$y = a(x - 5) + 1$.

Wiedząc, że przechodzi przez punkt B, otrzymujemy$-2 = -2a + 1$, $a = \frac{3}{2}$.

Równanie stycznej przyjmuje więc postać:

$y = \frac{3}{2}(x - 5) + 1 = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} + 1 = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

W ten sposób otrzymaliśmy równania prostych $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$ oraz $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$ przechodzących przez punkt $P = (5, 1)$ i stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 13$.

Wzajemne położenie prostej $y = mx + n$ i okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ możemy określić poprzez analizę liczby rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Po podstawieniu $y = mx + n$ do drugiego równania, otrzymujemy równanie kwadratowe.

Możliwe są trzy przypadki:

1. $\Delta > 0$ – prosta ma z okręgiem dwa (różne) punkty wspólne – jest sieczną okręgu,
2. $\Delta < 0$ – prosta nie ma punktu wspólnego z okręgiem,
3. $\Delta = 0$ – prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny (podwójny), czyli jest styczną do okręgu.

Ważne!

Prosta $y = mx + n$ jest styczną do okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, gdy równanie kwadratowe wynikające z układu równań:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie.

Przykład 2

Napiszemy równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$ przechodzących przez początek układu współrzędnych. .

Rozwiązanie:

Równanie prostej, na której leży punkt będący początkiem układu współrzędnych, ma postać $y = mx$. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy $y = mx$ do równania $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$ i otrzymujemy:

$x^2 + (mx)^2 - 10x + 4mx + 25 = 0$, które zapisujemy w postaci $\left(1 + m^2\right)x^2 - 2(-2m + 5)x + 25 = 0$.

Wyróżnik tego trójmianu musi być równy zeru, ponieważ wtedy prosta ma jeden punkt wspólny z okręgiem, czyli:$\Delta = [-2(-2m+5)]^2 - 4\left(1 + m^2\right) \cdot 25 = 0$

$16m^2 - 80m + 100 - 100 - 100m^2 = 0$

$-84m^2 - 80m = 0$

$-4m(21m + 20) = 0$

Stąd otrzymujemy dwie wartości m: $m_1 = 0$, $m_2 = -\frac{20}{21}$.

Podstawiając uzyskane wartości do równania prostej $y = mx$, otrzymujemy równania dwóch stycznych $y = 0$, $y = -\frac{20}{21}x$.

Wzajemne położenie okręgu i prostej na płaszczyźnie można również określić badając odległość prostej od środka okręgu.

Jeżeli odległość środka okręgu od prostej jest:

1. większa od długości promienia okręgu, to prosta i okrąg nie mają punktu wspólnego,

2. mniejsza od długości promienia okręgu, to prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne – prostą nazywamy wtedy sieczną okręgu,
3. równa długości promienia okręgu, to prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny – prostą nazywamy wtedy styczną do okręgu.

Prosta $Ax + By + C = 0$ jest styczną do okręgu, jeżeli jej odległość od środka okręgu jest równa długości promienia okręgu.

Odległość punktu $A = (x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ opisuje wzór $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. W naszym przypadku odległość środka okręgu od prostej będącej styczną jest równa promieniowi, czyli:

$r = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, gdzie $O = (a, b)$ jest środkiem okręgu.

Przykład 3

Wyznaczymy równania stycznych do okręgu o równaniu: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ poprowadzonych z punktu $P = \left(-\frac{9}{4}; 3\right)$.

Rozwiązanie

Proste styczne do okręgu mają równania postaci: $y = ax + b$. Skoro przechodzą przez punkt P, to: $3 = -\frac{9}{4}a + b$, stąd: $b = 3 + \frac{9}{4}a$ i: $y = ax + \frac{9}{4}a + 3$.

Zapiszemy równanie stycznej w postaci ogólnej: $ax - y + \frac{9}{4}a + 3 = 0$.

Odległość środka okręgu od stycznej jest równa długości promienia. Środek okręgu to punkt $S = (4; 3)$ a promień ma długość 5.

Zatem:

$\frac{\left|a \cdot 4 - 3 + \frac{9}{4}a + 3\right|}{\sqrt{a^2+1}} = 5$

$\left|\frac{25}{4}a\right| = 5\sqrt{a^2+1}$

$\frac{625}{16}a^2 = 25\left(a^2+1\right)$

$\frac{225}{16}a^2 = 25$

$a^2 = \frac{16}{9}$

$a = -\frac{4}{3}$ lub $a = \frac{4}{3}$

Mamy więc odpowiednio: $b = 0$ lub $b = 6$.

Styczne do okręgu o równaniu: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ poprowadzone z punktu $P=\left(-\frac{9}{4};3\right)$ mają równania: $y=-\frac{4}{3}x$ lub $y=\frac{4}{3}x+6$.

Przykład 4

Wyznaczymy równania stycznych do okręgu o równaniu: $(x+1)^2+(y+2)^2=16$ równoległych do prostej o równaniu $y=2x-5$.

Rozwiązanie

Proste styczne do okręgu i równoległe do prostej $y=2x-5$ mają równania postaci: $y=2x+b$.

Odległość środka okręgu $S=(-1;-2)$ od stycznej jest równa długości promienia, czyli 4.

Równanie stycznej zapiszemy w postaci ogólnej: $2x-y+b=0$ i skorzystamy ze wzoru dla odległość punktu od prostej:

$\frac{|2\cdot(-1)-(-2)+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=4$

$|b|=4\sqrt{5}$

$b=-4\sqrt{5}$ lub $b=4\sqrt{5}$.

Ostatecznie równania stycznych mają postać: $y=2x-4\sqrt{5}$ lub $y=2x+4\sqrt{5}$

Przykład 5

Wyznaczymy równania stycznych do okręgu o równaniu: $(x-3)^2+(y+3)^2=4$ prostopadłych do prostej o równaniu $y=x+1$.

Rozwiązanie

Proste styczne do okręgu i prostopadłe do prostej $y=x+1$ mają równania postaci: $y=-x+b$.

Odległość środka okręgu $S=(3;-3)$ od stycznej jest równa długości promienia, czyli 2.

Równanie stycznej zapiszemy w postaci ogólnej: $x+y-b=0$ i skorzystamy ze wzoru dla odległość punktu od prostej:

$\frac{|3-3-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$

$|b|=2\sqrt{2}$

$b=-2\sqrt{2}$ lub $b=2\sqrt{2}$.

Ostatecznie równania stycznych mają postać: $y = -x - 2\sqrt{2}$ lub $y = -x + 2\sqrt{2}$

Słownik

okrąg o środku O i promieniu r

zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r

styczna do okręgu

prosta, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem; punkt wspólny nazywamy punktem styczności

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą równania stycznych do okręgu poprowadzonych przez punkt nie leżący na okręgu, a następnie rozwiąż zadania.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DZ7xkJ3Sg

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej równań stycznych do okręgu przechozących przez punkt nie leżący na okręgu.

Polecenie 2

Przez punkt $A = (0, 2)$ poprowadź styczne do okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

Polecenie 3

Styczna do okręgu $(x-3)^2 + y^2 = 5$, przechodząca przez punkt $P = (-1, 3)$ jest równoległa do prostej $y = -2x - 10$. Podaj współrzędne punktu styczności.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie stycznych do okręgu poprowadzonych przez punkt nie leżący na okręgu.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy:

VIII. Planimetria

Uczeń:

1) Wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Uczeń:

1) Rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje.

2) Posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu.

3) Oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

4) Posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$

5) Oblicza odległość punktu od prostej.

6) Znajduje punkty wspólne prostej i okręgu raz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rysuje proste styczne do okręgu,
- znajduje punkty styczności prostej i okręgu,
- wyznacza równanie prostej spełniającej dane warunki,
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia tycznych do okręgu,
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej,
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami,
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji i ćwiczeń interaktywnych,
- pokaz multimedialny,
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny
- e-podręcznik.

Nauczyciel na poprzednich zajęciach prosi uczniów o przyniesienie przyrządów geometrycznych – cyrkli, linijek oraz arkuszy papieru.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

- uczniowie przypominają równanie okręgu,
- uczniowie określają ile puntów wspólnych może mieć prosta z okręgiem – wykonują odpowiednie rysunki na tablicy,
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- uczniowie określają ile stycznych można wyprowadzić z punktu nie leżącego na okręgu,
- nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się materiałem zawartym w sekcji Przeczytaj dotyczącym konstrukcji stycznych do okręgów poprowadzonych z punktu nie należącego do okręgu,
- uczniowie na arkuszach wykonują konstrukcję, nauczyciel kontroluje pracę uczniów, zwracając uwagę na staranność i poprawność wykonywanych rysunków,
- uczniowie, w parach rozwiązują zadanie zaproponowane przez nauczyciela opierając się na metodach przedstawionych w przykładach 1 i 2 w sekcji przeczytaj,
- chętny uczeń rozwiązuje zadanie na tablicy,
- nauczyciel prezentuje animację,
- uczniowie przedyskutowują metodę zaproponowaną w animacji, analizują rozwiązanie zadania do samodzielnego rozwiązania z animacji,
- nauczyciel wyjaśnia wątpliwości,
- nauczyciel prosi uczniów o rozwiązanie wskazanych ćwiczeń interaktywnych,
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udziela im wskazówek, wyjaśnia wątpliwości.

Faza podsumowująca:

- wskazani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych,
- uczniowie formułują wnioski do zapamiętania,
- uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień,
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Styczna do okręgu

Wzajemne położenie prostej i okręgu

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może poprosić uczniów aby przed lekcją przeanalizowali rozwiązanie zadania przeznaczonego do samodzielnego rozwiązania, które jest zawarte w animacji – usprawni to pracę na lekcji.