



Równania wymierne z jedną niewiadomą

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równania wymierne z jedną niewiadomą

Źródło: 3D Animation Production Company z Pixabay, domena publiczna.

Aby opisać zjawiska generujące dzisiejszy świat, wygodnie jest dysponować narzędziami, które ułatwiają te opisy. Do nich niewątpliwie należą równania. Dzięki równaniom wymiernym możemy na przykład analizować popularne zadania o pociągach jadących z miasta A do miasta B .

W tym materiale poznasz definicję równania wymiernego i podstawowe metody jego rozwiązania, z uwzględnieniem dziedziny równania wymiernego.

Twoje cele

- Rozpoznasz równania wymierne z jedną niewiadomą.
- Określisz, która z podanych liczb nie należy do dziedziny równania wymiernego.
- Wyznaczysz dziedzinę równania wymiernego.
- Rozwiążesz proste równanie wymierne.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wymierne

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$) to równanie

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0$$

nazywamy równaniem wymiernym z jedną niewiadomą x .

Rozwiązać równanie to znaleźć takie pierwiastki wielomianu $W(x)$, które nie są miejscami zerowymi wielomianu $P(x)$.

Przed przystąpieniem rozwiązywania **równania wymiernego** należy określić dziedzinę równania.

Dziedziną równia wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu $P(x)$.

Przykład 1

Określimy dziedzinę równania $\frac{x+2}{x^3-x} = 0$.

Niech $P(x) = x^3 - x$.

Obliczymy pierwiastki wielomianu $P(x)$.

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = -1$$

Ponieważ dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych, pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu $P(x)$, zatem $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Przykład 2

Określimy, która z liczb $-2, -1, 0, 1, 2, 4$ nie należy do dziedziny równania $\frac{x}{x^2-5x+4} = 0$.

Wyznamy dziedzinę równania.

$$x^2 - 5x + 4 \neq 0$$

$$(x - 1)(x - 4) \neq 0$$

$$x \neq 1 \text{ i } x \neq 4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$$

Czyli:

$$x = 1 \notin D$$

$$x = 4 \notin D$$

Liczby 1 i 4 nie należą do dziedziny równania.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $\frac{x+3}{x(x+2)} = 0$.

Określimy najpierw dziedzinę równania.

$$x(x + 2) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ i } x \neq -2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$$

Wyznamy teraz te wartości x , dla których wielomian $W(x) = x + 3$ przyjmuje wartość zero.

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3 \in D$$

Rozwiązanie równania to liczba (-3) .

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $\frac{x}{x^2-5} = 2$.

Określimy dziedzinę równania.

$$x^2 - 5 \neq 0$$

$$x \neq \sqrt{5} \text{ i } x \neq -\sqrt{5}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

Korzystając w własności proporcji mamy:

$$x = (x^2 - 5) \cdot 2$$

$$x = 2x^2 - 10$$

$$2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 1 + 80 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9$$

$$x_1 = \frac{1-9}{4} = -2 \in D$$

$$x_2 = \frac{1+9}{4} = \frac{5}{2} \in D$$

Rozwiązanie równania to: $x = -2$, $x = \frac{5}{2}$.

Przykład 5

Wykażemy, że równanie $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1} = 0$ jest sprzeczne.

Wyznamy najpierw dziedzinę równania.

$$2x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Przyrównujemy licznik ułamka algebraicznego do zera.

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

Zauważmy, że korzystając ze wzoru skróconego mnożenia mamy:

$$(2x + 1)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Ale $-\frac{1}{2} \notin D$, więc równanie nie ma rozwiązania.

Słownik

równanie wymierne

równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$ z jedną niewiadomą x , gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \not\equiv 0$)

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych i przeanalizuj sposoby rozwiązywania równania wymiernego z uwzględnieniem dziedziny równania.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-16}{x^2+4x} = 0$ na dwa sposoby. Pamiętaj o uwzględnieniu dziedziny równania.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz dziedzinę równania $\frac{x}{x(x^2-6x+5)} = 0$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 5\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 0\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie liczby, które **nie należą** do dziedziny równania $\frac{x^2-9}{x(x^2-3)(x^2-x-6)} = 0$.

☐ $\sqrt{3}$

☐ 2

☐ -2

☐ $-\sqrt{3}$

☐ 3

☐ -3

☐ 0

Ćwiczenie 3



Rozwiąż równanie $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} = 0$. Wybierz liczbę rozwiązań równania. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 1

☐ 3

☐ 0

☐ 2

Ćwiczenie 4



Dane jest równanie $\frac{x(x+1)(2x+4)}{x} = 0$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Dziedziną równania jest $\mathbb{R}$.

☐ Jest to równanie wymierne z jedną niewiadomą.

☐ Rozwiązaniem równania są liczby $x = -2$, $x = -1$.

☐ Jest to równanie wielomianowe.

☐ Rozwiązaniem równania są $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$.

Ćwiczenie 5



Rozwiąż równanie $\frac{x^3-3x-2}{x-2} = 0$. Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

$x =$

Ćwiczenie 6



Przeciagnij odpowiednie wyrażenie.

Równanie $\frac{9x^2-12x+4}{3x-2} = 0$ jest .

tożsamościowe

wielomianowe

sprzeczne

Ćwiczenie 7



Dane jest równanie $\frac{x}{x-1} = 2$ dla $x \neq 1$. Wskaż równanie równoważne do danego.

☐ $\frac{1-x}{x-1} = 0$

☐ $\frac{2}{x-1} = 0$

☐ $\frac{-x}{1-x} = 0$

☐ $\frac{2-x}{x-1} = 0$

Ćwiczenie 8



Dane jest równanie $\frac{x^2-8x+16}{x+m} = 0$, $x \neq -m$ z niewiadomą x . Dla jakiego m równanie jest sprzeczne? Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

$m =$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wymierne z jedną niewiadomą

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) rozwiązuje równania wymierne $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje równania wymierne z jedną niewiadomą
- określa, która z podanych liczb nie należy do dziedziny równania wymiernego
- wyznacza dziedzinę równania wymiernego
- rozwiązuje proste równanie wymierne
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania wymiernego, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają w grupach definicję równania wymiernego, dziedzinę równania i podstawowe metody rozwiązywania równania wymiernego.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów równań wymiernych. Następnie stara się podzielić równania na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Tworzą wspólny schemat ilustrujący rodzaje równań.
3. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 8. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują Przykład 2 umieszczony pod galerią zdjęć interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w galerii zdjęć interaktywnych uczniowie mogą przeanalizować przed sprawdzianem. Galerię zdjęć można również wykorzystać jako wstęp do zgadnień poświęconych rozwiązywaniu nierówności wymiernych.