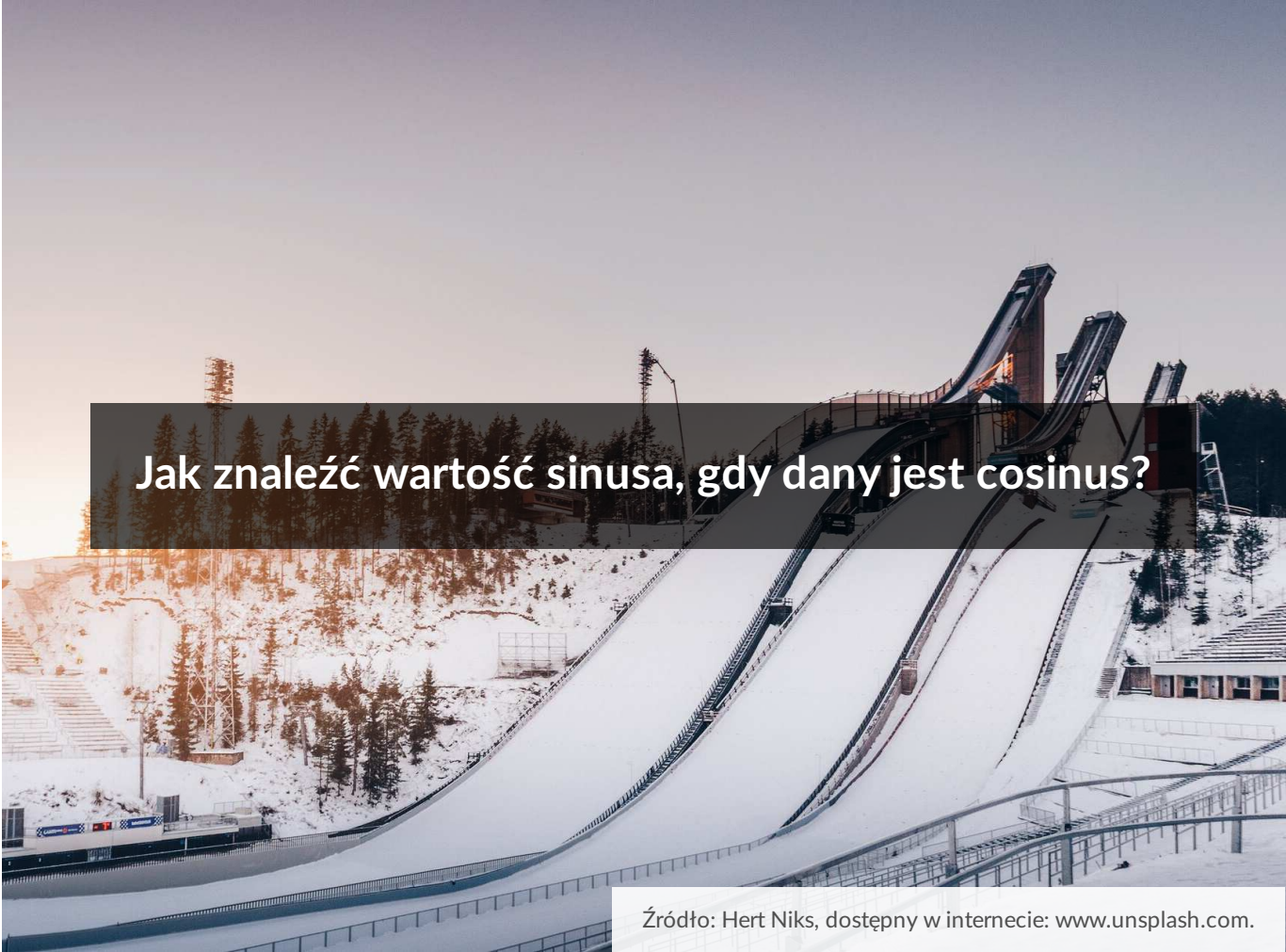




Jak znaleźć wartość sinusa, gdy dany jest cosinus?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



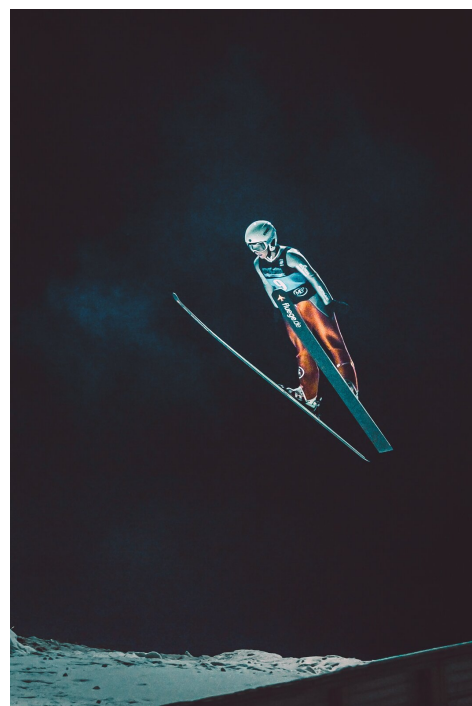
## Jak znaleźć wartość sinusa, gdy dany jest cosinus?

Źródło: Hert Niks, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com).

Zapewne zdarzyło Ci się oglądać Puchar Świata w Skokach Narciarskich lub tylko jego fragment, gdy zmieniana jest belka startowa, ze względu na warunki atmosferyczne, o czym decydują sędziowie.

Być może zastanawiające wydało Ci się to, jak wraz ze zmianą belki zmienia się odległość skoczka od progu, liczona poziomo a nie wzdłuż rozbiegu, oraz wysokość belki, liczona od poziomu ziemi...

Na to pytanie można łatwo odpowiedzieć, jeśli będziemy umieli znaleźć wartość cosinusa nachylenia skoczni, znając sinus tego kąta. I tym zajmiemy się w tej lekcji.



Źródło: Todd Trapani, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/photos/11hnchukldg>.

Twoje cele

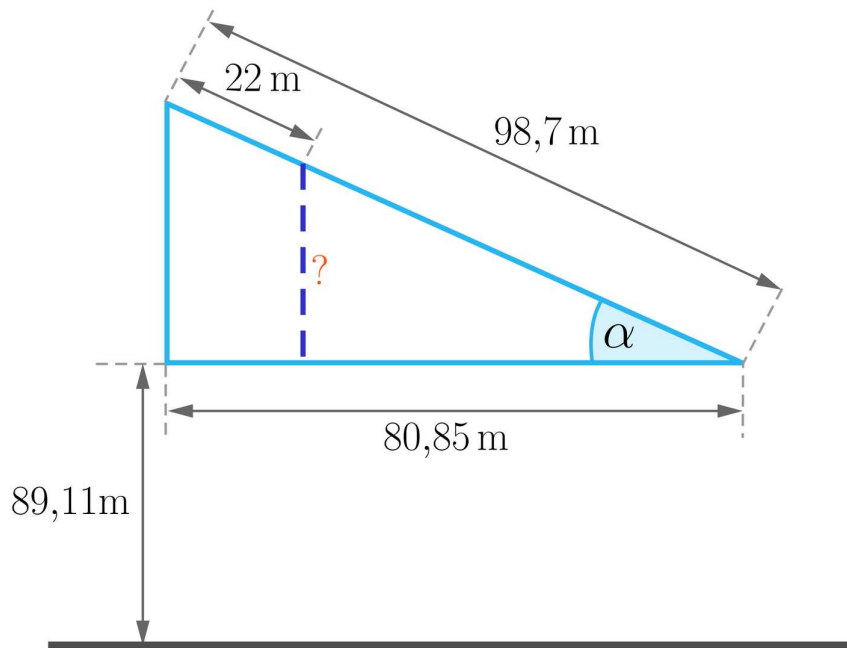
- Obliczysz wartości cosinusa kąta, znając jego sinus.
- Obliczysz wartość sinusa kąta, znając jego cosinus.

# Przeczytaj

Wielka Krokiew, skocznia narciarska w Zakopanem, ma rozbieg o długości 98,7 m – jest to odległość najwyższej belki startowej od progu skoczni, liczona wzdłuż rozbiegu.

Licząc w poziomie – odległość najwyższej belki od progu to 80,85 m.

Belkę startową można obniżyć maksymalnie o 22 m, licząc wzdłuż rozbiegu – na tej długości można ustalić próg startowy w jednym z 35 miejsc.



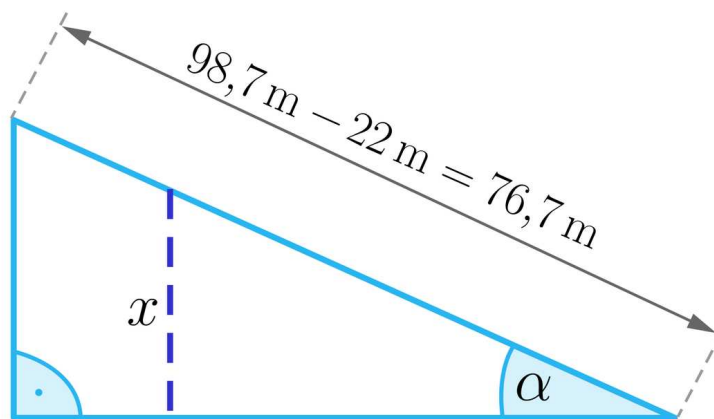
## Przykład 1

Zastanówmy się, jak wysoko znajduje się skoczek narciarski, siedząc na najniższej możliwej belce startowej.

Oczywiście, możemy poradzić sobie z problemem, korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz [podobieństwa trójkątów](#). Jest to jednak okrężna droga. Wykorzystamy zatem trygonometrię, aby uprościć problem.

Możemy łatwo policzyć cosinus kąta  $\alpha$  – kąta nachylenia skoczni:

$$\cos \alpha = \frac{80,85}{98,7} \approx 0,82.$$



Rozważmy teraz trójkąt prostokątny, którego przyprostokątną jest szukana wysokość. Znamy przeciwprostokątną tego trójkąta oraz  $\cos \alpha$ . Pamiętajmy, że  $x$  jest przyprostokątną leżącą na przeciw kąta  $\alpha$ , więc powinniśmy korzystać z wartości  $\sin \alpha$ .

Jak ją znaleźć?

Przypomnijmy sobie [tożsamości trygonometryczne](#), a konkretnie [jedynek trygonometryczną](#):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Stąd  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \approx 1 - (0,82)^2 = 0,3276$ ,  
więc  $\sin \alpha \approx 0,57$  lub  $\sin \alpha \approx -0,57$ .

Wiemy jednak, że kąt  $\alpha$  jest ostry, więc wybieramy dodatnią wartość funkcji sinus.

Zatem  $\frac{x}{76,7} \approx 0,57$ , stąd  $x \approx 43,61$  m.

Na jakiej wysokości znajduje się skoczek siedząc na najniższej belce? To

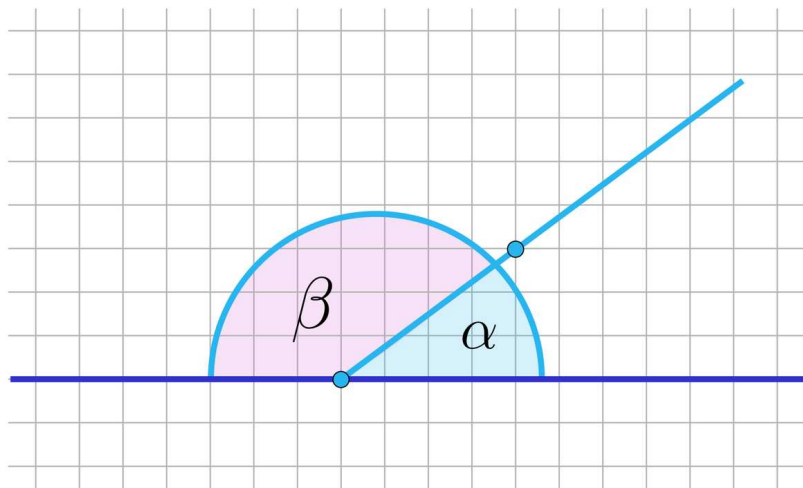
$$43,61 \text{ m} + 89,11 \text{ m} = 132,72 \text{ m}.$$

Znając  $\sin \alpha$ , możemy łatwo policzyć na jakiej wysokości znajduje się skoczek siedząc na każdej z 35 belek startowych.

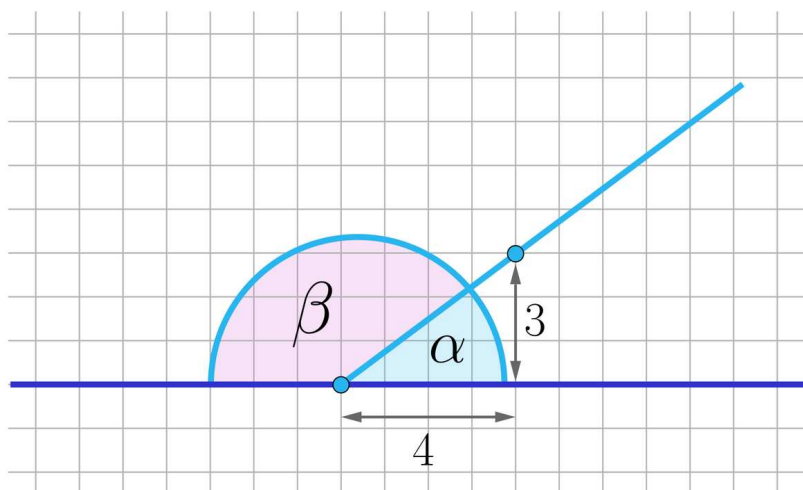
W powyższym przykładzie obliczyliśmy sinus kąta, znając jego cosinus. Rozważmy teraz następujący przykład.

### Przykład 2

Korzystając z poniższego rysunku, obliczymy  $\sin \beta$  i  $\cos \beta$ .



**Rozwiązanie:** Zaczniemy od policzenia wartości  $\sin \alpha$ . Widzimy, że kąt  $\alpha$  jest kątem trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 3 i 4.



Z twierdzenia Pitagorasa długość przeciwprostokątnej to 5. Zatem  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  to kąty przyległe, więc  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , zatem  $\sin \alpha = \sin \beta$ .

Znamy już  $\sin \beta = \frac{3}{5}$ . Pozostaje wyliczyć  $\cos \beta$ . Znow skorzystamy z jedynej trygonometrycznej:

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Zatem  $\cos \beta = \frac{4}{5}$  lub  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ . Widzimy jednak, że  $\beta$  jest kątem rozwartym, więc  $\cos \beta < 0$ .

Otrzymujemy więc odpowiedzi:  $\sin \beta = \frac{3}{5}$  i  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ .

Przypomnijmy, kiedy wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  są dodatnie, a kiedy ujemne.

$\alpha \in$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
--------------	----------------------	------------------------	-------------------------	--------------------------

$\alpha \in$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

### Przykład 3

Wiedząc, że  $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$  oraz  $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$  obliczmy  $\sin \alpha$ .

**Rozwiązanie:** Na mocy jedynki trygonometrycznej otrzymujemy, że  $\sin^2 \alpha = 1 - (\frac{3}{7})^2 = \frac{40}{49}$ . Zatem  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$  lub  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ . Korzystając z powyższej tabeli możemy ustalić, że  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ .

### Przykład 4

Wiedząc, że  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$  oraz  $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$  obliczmy  $\sin \alpha$ .

**Rozwiązanie:** Rozwiążemy powyższe zadanie na dwa sposoby.

#### Sposób I

Zacniemy od wyznaczenia wartości funkcji  $\cos \alpha$ . Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy równanie  $(\cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2})(\cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$ . Stąd  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$  lub  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ponieważ  $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ , więc  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Postępując analogicznie jak w Przykładzie 3 otrzymujemy, że  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$ . Dla rozważanego kąta  $\alpha$  zachodzi nierówność  $\sin \alpha < 0$ , więc  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

#### Sposób II

W omawianym przykładzie znalezienie dokładnej wartości funkcji  $\cos \alpha$  nie jest konieczne. Wystarczy rozwiązać układ równań  $\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$  aby otrzymać, że  $\sin^2 \alpha + \frac{1}{2} = 1$  i tym samym, skoro  $\sin \alpha < 0$ , to  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Przykład 5

Wiedząc, że  $\cos \alpha = 2 - \sqrt{2}$  oraz że kąt  $\alpha$  jest kątem ostrym obliczmy wartość wyrażenie  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

**Rozwiązanie:** Korzystając z jedynki trygonometrycznej, mamy, że  $\sin^2 \alpha = 1 - (2 - \sqrt{2})^2 = 1 - (4 - 4\sqrt{2} + 2) = 1 - (6 - 4\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 5$ . Stąd

$\sin \alpha = \sqrt{4\sqrt{2} - 5}$  lub  $\sin \alpha = -\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$ . Wszystkie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie, więc  $\sin \alpha = \sqrt{4\sqrt{2} - 5}$ .

$$\text{Zatem } \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4\sqrt{2}-5}} = \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{4\sqrt{2}-5} = \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{4\sqrt{2}-5} \cdot \frac{4\sqrt{2}+5}{4\sqrt{2}+5} = \frac{(3\sqrt{2}+2)\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{7}$$

## Słownik

### tożsamości trygonometryczne

zależności między funkcjami trygonometrycznymi, będące prawdziwe, bez względu na wartość kąta

### jedynka trygonometryczna

jedna z tożsamości trygonometrycznych: dla dowolnego kąta  $\alpha$  spełniona jest równość  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

### podobieństwo trójkątów

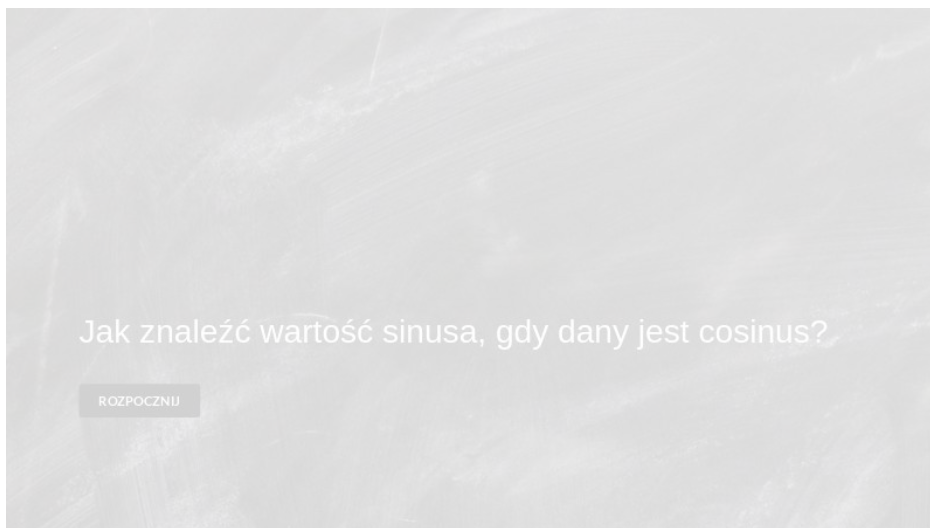
trójkąty podobne to trójkąty, które mają pary kątów tej samej miary

# Gra edukacyjna

---

## Polecenie 1

Ułóż matematyczne puzzle, a następnie rozwiąż polecenie 2 i 3.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3iGnK5i4>

## Polecenie 2

Znajdź wartości  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$  wiedząc, że spełnione jest równanie  $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ .

## Polecenie 3

Wiedząc, że  $\sin \alpha = (\sqrt{3} - \sqrt{2})$  i kąt  $\alpha$  jest rozwarty, oblicz  $\cos \alpha$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Wiedząc, że  $0 < \sin \alpha < \frac{1}{2}$  wskaż możliwą wartość  $\cos \alpha$ .

- $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \alpha = 0,9$
- $\cos \alpha = -0,85$
- $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

## Ćwiczenie 2



Wiedząc, że  $|\cos \alpha| < \frac{2}{7}$  wskaż wszystkie możliwe wartości  $\sin \alpha$ .

- $\sin \alpha = \sqrt{13} - \sqrt{7}$
- $\sin \alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$
- $\sin \alpha = \sqrt{101} - \sqrt{82}$
- $\sin \alpha = \sqrt{11} - \sqrt{6}$

## Ćwiczenie 3



## Ćwiczenie 4



## Ćwiczenie 5



Do danej wartości  $\sin \alpha$  przyporządkuj wszystkie możliwe wartości  $\cos \alpha$ .

$\cos \alpha = \sqrt{3}$ ,  $\cos \alpha = -2$ ,  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{7} - \sqrt{12}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \alpha = \cos 45^\circ$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{-4} + \sqrt{7}$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ,  $\cos \alpha = \supset \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \supset 2$

kwadratowy z siedemnaście, minus, dwanaście pierwiastek kwadratowy z dwa"

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{17} - \sqrt{12}}{\sqrt{2}}$$

, <span aria-label="kosinus alfa, równa się, minus, pierwiastek kwadratowy z początek ułamka, dwadzieścia cztery, mianownik, dwadzieścia pięć,

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{24} - \sqrt{25}}{25}$$

<span aria-label="kosinus alfa, równa się, minus, początek ułamka, pierwiastek kwadratowy z dwa, mianownik, dwa, koniec ułamka" role="math"><math>

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\sin \alpha = \frac{1}{5}$	
$\sin \alpha = 2\sqrt{3\sqrt{2} - 4}$	
$\sin \alpha = \sqrt[4]{3}(\sqrt{3} - 1)$	

## Ćwiczenie 6



## Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



W poniższym tekście opisano trzy metody znajdowania wartości  $\cos \alpha$  znając wartość  $\sin \alpha$ . Przeczytaj uważnie tekst. Uzupełnij luki przeciągając właściwe odpowiedzi.

0, 8,  $36^\circ$ , 0, 7986,  $53^\circ$ , -0, 8, 10, 0, 8090, 5, 8, jedynki trygonometrycznej, 0, 8, 64, twierdzenia sinusów,  $37^\circ$ , 100,  $54^\circ$

Założmy, że  $\sin \alpha = 0,6$ . Jeśli  $\alpha$  jest kątem ostrym, to  $\cos \alpha =$   
..... natomiast, gdy  $\alpha$  jest kątem rozwartym, to  $\cos \alpha =$   
..... Aby znaleźć te wartości zapewne skorzystałeś z tożsamości trygonometrycznej a konkretnie z ..... Jak inaczej znaleźć te wartości? Możemy narysować trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 6 i przeciwprostokątnej ..... Z twierdzenia Pitagorasa wyliczamy, że druga przyprostokątna ma długość ..... Zatem cosinus kąta leżącego przy tej przyprostokątnej wynosi ..... Oczywiście, rysując trójkąt prostokątny założyliśmy, że kąt  $\alpha$  jest ostry, dlatego dostaliśmy jedynie dodatnią wartość cosinusa.

Trzeci sposób bazuje na przybliżeniach wartości funkcji trygonometrycznych dostępnych w tablicach. Kąt ostry, dla którego  $\sin \alpha = 0,6$  ma miarę pomiędzy ..... a .....  
 $\cos 36^\circ \approx$  ..... a  $\cos 37^\circ \approx$  ....., więc  $\cos \alpha \approx 0,8$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Julia Wódka

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Jak znaleźć wartość sinusa, gdy dany jest cosinus?

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ;
- 2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- oblicza wartości cosinusa kąta, znając jego sinus,
- oblicza wartość sinusa kąta, znając jego cosinus,
- korzysta z wartości funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania zadań praktycznych,

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- praca z ekspertem;

- liga zadaniowa.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

#### **Faza realizacyjna:**

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

**Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Materiały pomocnicze:**

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Jak znaleźć wartość sinusa, gdy dany jest cosinus?”.