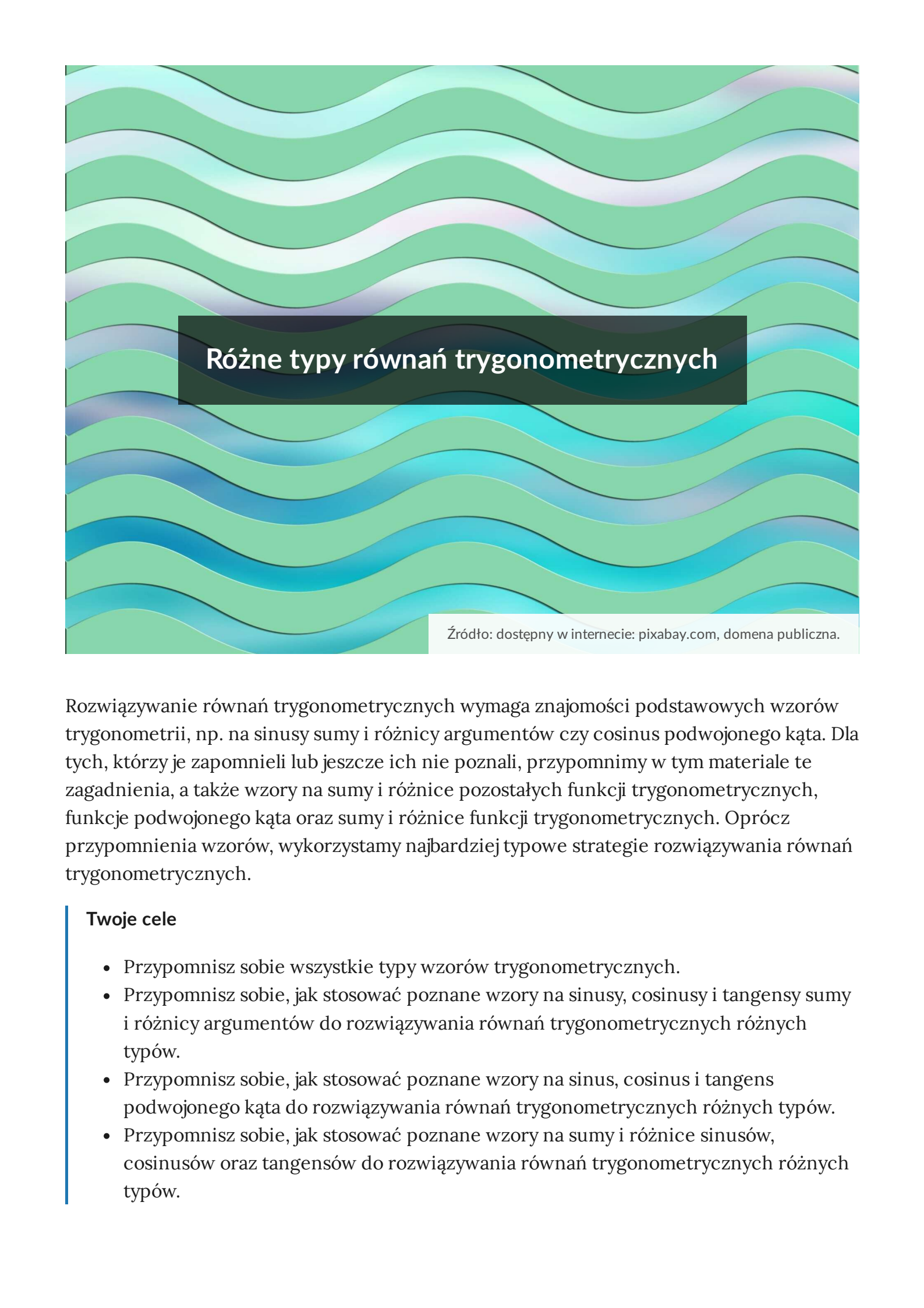




## Różne typy równań trygonometrycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Różne typy równań trygonometrycznych

Źródło: dostępny w internecie: [pixabay.com](https://pixabay.com), domena publiczna.

Rozwiązywanie równań trygonometrycznych wymaga znajomości podstawowych wzorów trygonometrii, np. na sinusy sumy i różnicy argumentów czy cosinus podwojonego kąta. Dla tych, którzy je zapomnieli lub jeszcze ich nie poznali, przypomnimy w tym materiale te zagadnienia, a także wzory na sumy i różnice pozostałych funkcji trygonometrycznych, funkcje podwojonego kąta oraz sumy i różnice funkcji trygonometrycznych. Oprócz przypomnienia wzorów, wykorzystamy najbardziej typowe strategie rozwiązywania równań trygonometrycznych.

### Twoje cele

- Przypomnisz sobie wszystkie typy wzorów trygonometrycznych.
- Przypomnisz sobie, jak stosować poznane wzory na sinusy, cosinusy i tangensy sumy i różnicy argumentów do rozwiązywania równań trygonometrycznych różnych typów.
- Przypomnisz sobie, jak stosować poznane wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego kąta do rozwiązywania równań trygonometrycznych różnych typów.
- Przypomnisz sobie, jak stosować poznane wzory na sumy i różnice sinusów, cosinusów oraz tangensów do rozwiązywania równań trygonometrycznych różnych typów.

# Przeczytaj

---

Na lekcji pokażemy całą kolekcję równań trygonometrycznych, do rozwiązywania których będziemy wykorzystywać wszystkie poznane dotychczas wzory i metody.

Przypomnijmy najpierw najbardziej typowe strategie rozwiązywania równań trygonometrycznych:

1. Zawsze na początku piszemy, co jest dziedziną równania, czyli jaki jest zbiór elementów, dla których równanie ma sens.
2. Każde równanie staramy się sprowadzić do postaci:  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$  lub  $\operatorname{tg} x = a$ , gdzie  $a$  jest pewną liczbą rzeczywistą.
3. Bardzo wygodną postacią równania, która ułatwia rozwiązanie równań, jest taka postać, aby po jednej stronie równania znajdował się iloczyn wyrażeń trygonometrycznych, a po drugiej liczba 0.
4. Częstym motywem dla bardziej złożonych równań jest wprowadzenie podstawienia, które sprowadza równanie trygonometryczne do postaci równanie kwadratowego, wielomianowego lub wymiernego.
5. W bardziej złożonych zadaniach musimy skorzystać z poznanych wzorów na: funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów, funkcje trygonometryczne podwojonego argumentu, sumy i różnicy funkcji trygonometrycznych.

## Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów

### sinus sumy argumentów

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

### sinus różnicy argumentów

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

### cosinus sumy argumentów

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

### cosinus różnicy argumentów

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

## tangens sumy argumentów

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

gdy  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

## tangens różnicy argumentów

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

gdy  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x-y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

# Funkcje trygonometryczne podwojonego argumentu

## sinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna:  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$

## cosinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna:  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$

## tangens podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna:  $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$  prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$  i  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

# Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

## suma oraz różnica sinusów

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$

## suma oraz różnica cosinusów

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$

## suma oraz różnica tangensów

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$  spełniających warunki:  $\cos x \neq 0$  i  $\cos y \neq 0$

### Przykład 1

Zapoznaj się z poniższym filmem. Zwróć uwagę w przykładach 2 i 3 na zapisanie założeń. W przykładzie 2 zastosowano charakterystyczne podstawienie prowadzące do równania kwadratowego. W przykładzie 3 zwróć ponadto uwagę na zastosowanie wzoru na różnicę sinusów do przekształcenia równania.

# Trwa wczytywanie danych..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCOv7sROI>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący rozwiązywania równań z funkcją sinus.

### Przykład 2

Rozwiążemy równanie  $\sin 3x \cdot \sin 5x = \cos 4x \cdot \cos 2x$ .

### Rozwiązanie

Zauważmy, że problemem w tym zadaniu są iloczyny funkcji trygonometrycznych, które znajdują się po obu stronach równania. Nie spotkaliśmy się dotąd ze wzorem, który zamieniałby tego typu iloczyn na inne wyrażenie.

Ale we wzorze na różnicę cosinusów mamy:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\text{Stąd mamy } \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \beta - \cos \alpha).$$

$$\text{Jeżeli zapiszemy, że } x = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ i } y = \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ to } \alpha = x + y \text{ i } \beta = x - y.$$

$$\text{Zatem } \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)).$$

$$\text{Analogicznie możemy wyprowadzić wzór: } \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)).$$

Wykorzystajmy te zależności do rozwiązania zadania:

$$\frac{1}{2} (\cos(5x - 3x) - \cos(5x + 3x)) = \frac{1}{2} (\cos(4x + 2x) + \cos(4x - 2x)),$$

$$\cos 2x - \cos 8x = \cos 6x + \cos 2x,$$

$$\cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Stosujemy [wzór na sumę cosinusów](#):

$$2 \cos \frac{6x + 8x}{2} \cdot \cos \frac{8x - 6x}{2} = 0,$$

$$\cos 7x \cdot \cos x = 0.$$

Zatem otrzymujemy:

$$\cos 7x = 0 \text{ lub } \cos x = 0.$$

$$7x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Odpowiedź: } x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7} \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

### Przykład 3

Zapoznaj się z filmem. Zwróć uwagę na metodę podstawiania zastosowaną w przykładzie 2. W przykładzie 3 został wykorzystany wzór, który pojawił się w zadaniu 2.

# Trwa wczytywanie danych..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCOv7sROl>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący rozwiązywania równań z funkcją cosinus.

#### Przykład 4

Rozwiążemy równanie:  $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$ .

#### Rozwiązanie

Skorzystamy z przekształconego [wzoru na cosinus podwojonego kąta](#):

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Otrzymamy wówczas:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2}.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x.$$

Korzystamy dwukrotnie ze [wzoru na sumę cosinusów](#):

$$2 \cos 3x \cdot \cos x - 2 \cos 7x \cdot \cos x = 0.$$

Wyciągamy wspólny czynnik przed nawias i korzystamy ze [wzoru na różnicę cosinusów](#):

$$2 \cos x \cdot (\cos 3x - \cos 7x) = 0,$$

$$2 \cos x \cdot (-2 \sin 5x \cdot \sin (-2x)) = 0.$$

Korzystając z postaci iloczynowej, otrzymujemy:

$$\cos x = 0 \text{ lub } \sin 5x = 0 \text{ lub } \sin 2x = 0.$$

Stąd mamy:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = \frac{k\pi}{5} \text{ lub } x = \frac{k\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Otrzymujemy zatem odpowiedź:  $x = \frac{k\pi}{5}$  lub  $x = \frac{k\pi}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Słownik

### cosinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna:  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$

### wzory na sumę oraz różnicę sinusów

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$

### wzory na sumę oraz różnicę cosinusów

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z animacją. Zwróć uwagę na wzory, jakie wykorzystano do przekształcenia postaci wyrażeń występujących w równaniach.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DPOEl2tu4>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej różnych typów równań trygonometrycznych.

---

## Polecenie 2

Rozwiąż równanie:  $\cos 2x + \cos x = \sin 3x$ .

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Wszystkie liczby spełniające równanie  $\sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{4}$  są postaci:

☐  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = \frac{k\pi}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

## Ćwiczenie 2



Wszystkie liczby spełniające równanie  $\cos 3x + \cos x = \cos x \cos 2x$  są postaci:

☐  $x = \frac{k\pi}{4}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

### Ćwiczenie 3



Połącz w pary równania z równymi zbiorami rozwiązań.

$$\cos 4x = \sin 2x$$

$$2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$$

$$3 \sin^2 2x + 5 \cos 2x - 3 = 0$$

$$2 \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 4x$$

$$\sin 3x \cos x = 2 \sin 3x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{8}{9}$$

$$\sin^2 2x = \frac{2}{9}$$

### Ćwiczenie 4



Wstaw takie wyrażenie, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

$(1 + \cos 2x) \cdot \sin x = \cos^2 x$  wtedy i tylko wtedy, gdy  lub  lub ,  
gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

### Ćwiczenie 5



Wstaw takie wyrażenie, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

$1 - \cos x = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  wtedy i tylko wtedy, gdy , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2}$$

$$x = 2k\pi$$

$$x = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

### Ćwiczenie 6



Wszystkie rozwiązania równania  $\cos\left(\frac{\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{9} - x\right) = \frac{1}{2}$  mają postać:

☐  $x = \frac{2\pi}{9} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{7\pi}{9} + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = -\frac{\pi}{9} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{13\pi}{9} + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = -\frac{\pi}{9} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{5\pi}{9} + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

☐  $x = \frac{\pi}{9} + 2k\pi$  lub  $x = -\frac{13\pi}{9} + 2k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

### Ćwiczenie 7



Rozwiąż równanie  $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$ .

### Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie:  $\sin 2x \cdot \cos 6x = \sin 3x \cdot \cos 5x$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jacek Dymel

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Różne typy równań trygonometrycznych

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach:  $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$ ,  $2 \sin^2 x \leq 1$ .

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne (językiem ucznia):**

Uczeń:

- przypomni sobie wszystkie typy wzorów trygonometrycznych, które poznaliśmy na poprzedniej lekcji;
- przypomni sobie, jak stosować poznane wzory do rozwiązywania równań trygonometrycznych różnych typów.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Różne typy równań trygonometrycznych” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja” – „Obejrzyj uważnie animację. Zwróć uwagę na wzory, jakie wykorzystano do przekształcenia postaci wyrażeń występujących w równaniach.” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Różne typy równań trygonometrycznych” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

#### **Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

#### **Materiały pomocnicze:**

[Równania i nierówności trygonometryczne](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Różne typy równań trygonometrycznych”.