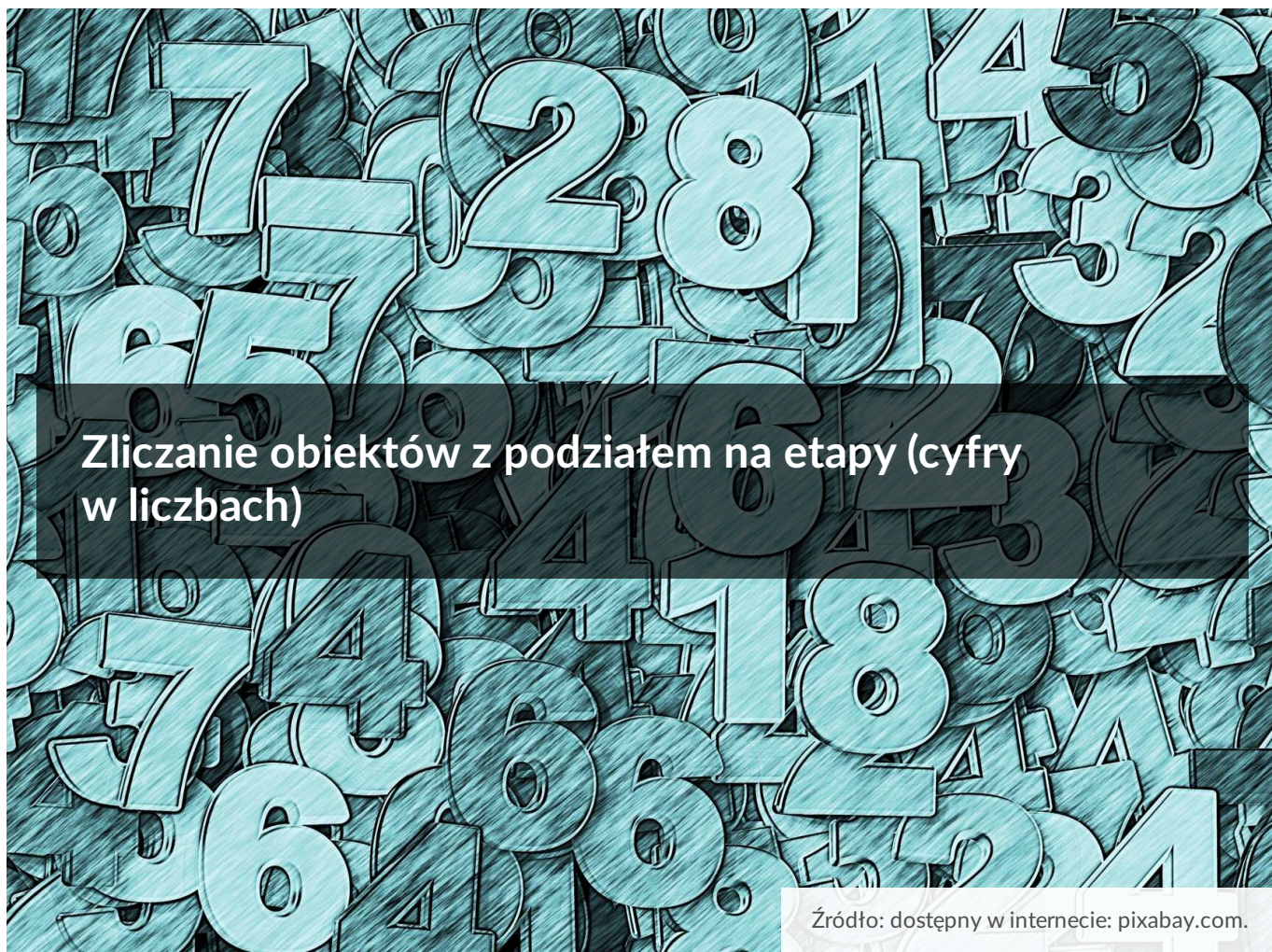




Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (cyfry w liczbach)

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (cyfry w liczbach)

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com.

W tym materiale przedstawimy sposoby, które wydają się pomocne przy redakcji rozwiązań zadań kombinatorycznych wymagających łączenia różnych warunków. Prezentowane przykłady oraz zadania do samodzielnego rozwiązania będą dotyczyły przede wszystkim zapisu dziesiętnego liczb naturalnych.

Twoje cele

- Zastosujesz poznane reguły kombinatoryczne w zadaniach, których rozwiązanie wymaga łączenia różnych warunków.
- Analiza treści zadania pozwoli Ci na rozpoznawanie kolejnych etapów rozwiązania.
- Wyznaczysz ilość liczb spełniających określone (złożone) warunki.

Przeczytaj

W poniższych przykładach omówimy zadania dotyczące zliczania liczb naturalnych, których zapis dziesiętny spełnia kilka określonych w treści warunków.

Analizując te warunki będziemy wyraźnie rozróżniali kolejne etapy rozwiązania. Jeśli ponadto zauważymy potrzebę podzielenia rozwiązania na różne przypadki, to z zasady będziemy je rozważali jako przypadki rozłączne parami.

Przykład 1

Obliczymy, ile jest:

- a) wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie trzech miejscach znajdują się cyfry parzyste,
- b) wszystkich liczb naturalnych siedmiocyfrowych, w zapisie których na dokładnie czterech miejscach stoją cyfry parzyste.

Rozwiązanie:

a) Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

(1) wybór trzech miejsc dla cyfr parzystych, z ośmiu dostępnych w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby naturalnej oraz zapisanie takich cyfr na wybranych miejscach; ponieważ każdy wybór trzech miejsc z ośmiu to trzelementowa **kombinacja** zbioru 8-elementowego, więc na podstawie **twierdzenia o liczbie kombinacji** stwierdzamy, że takie trzy miejsca z ośmiu możemy wybrać na $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ sposobów.

Wtedy wszystkich możliwości rozmieszczenia cyfr parzystych na ustalonych miejscach jest tyle, ile jest 3-elementowych **wariacji z powtórzeniami** czteroelementowego zbioru cyfr parzystych, czyli $4^3 = 64$.

Korzystając z **reguły mnożenia** stwierdzamy, że w tym etapie jest

$$\binom{8}{3} \cdot 4^3 = 56 \cdot 64 = 3584 \text{ możliwości;}$$

(2) zapisanie na pozostałych miejscach pięciu cyfr nieparzystych; ponieważ wszystkich możliwości rozmieszczenia cyfr nieparzystych na pięciu pozostałych miejscach jest tyle, ile jest 5-elementowych **wariacji z powtórzeniami** pięcioelementowego zbioru cyfr nieparzystych, więc w tym etapie mamy $5^5 = 3125$ możliwości.

Korzystając jeszcze raz z **reguły mnożenia**, obliczamy ostatecznie, że wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie trzech

miejscach znajdują się cyfry parzyste jest $\binom{8}{3} \cdot 4^3 \cdot 5^5 = 3584 \cdot 3125 = 11200000$.

b)

I sposób:

Rozróżniamy dwa rozłączne przypadki:

- (1) na pierwszym miejscu zapisana jest cyfra parzysta,
- (2) na pierwszym miejscu jest cyfra nieparzysta.

W pierwszym przypadku zliczanie rozkładamy na trzy etapy:

- (1. 1) wybór pierwszej cyfry – po odrzuceniu zera pozostają nam 4 możliwości,
(1. 2) wybór 3 miejsc z pozostałych 6 w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby naturalnej, na których zapiszemy kolejne 3 cyfry parzyste (można to zrobić na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów) oraz zapisanie takich cyfr na ustalonych miejscach (co można zrobić na $5^3 = 125$ sposobów),
(1. 3) zapisanie cyfr nieparzystych na pozostałych 3 miejscach – można to zrobić na $5^3 = 125$ sposobów.

Wynika stąd, że w tym przypadku jest $4 \cdot \binom{6}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 4 \cdot 20 \cdot 125 \cdot 125 = 1250000$ liczb spełniających warunki zadania.

W drugim przypadku zliczanie rozkładamy również na trzy etapy:

- (2. 1) wybór pierwszej cyfry – ponieważ możemy tu zapisać dowolną cyfrę nieparzystą, więc mamy 5 możliwości,
(2. 2) wybór 4 miejsc z pozostałych 6 w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby naturalnej, na których zapiszemy 4 cyfry parzyste (można to zrobić na $\binom{6}{4} = 15$ sposobów) oraz zapisanie takich cyfr na ustalonych miejscach (co można zrobić na $5^4 = 625$ sposobów),
(2. 3) zapisanie cyfr nieparzystych na pozostałych 2 miejscach – można to zrobić na $5^2 = 25$ sposobów.

Oznacza to, że w tym przypadku jest $5 \cdot \binom{6}{4} \cdot 5^4 \cdot 5^2 = 5 \cdot 15 \cdot 625 \cdot 25 = 1171875$ liczb spełniających warunki zadania.

Korzystając z reguły dodawania obliczamy ostatecznie, że wszystkich liczb naturalnych siedmiocyfrowych, w zapisie których na dokładnie czterech miejscach stoją cyfry parzyste jest $1250000 + 1171875 = 2421875$.

II sposób:

Wypisujemy kolejno jedna za drugą siedem cyfr, wybierając każdą spośród 10 możliwych (dopuszczamy 0 na pierwszym miejscu), przy czym na dokładnie 4 miejscach zapisujemy cyfrę parzystą. W trzech etapach obliczamy, ile jest tak określonych ciągów 7-elementowych.

Mamy $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ możliwości wyboru 4 miejsc dla cyfr parzystych, cyfry te na ustalonych miejscach możemy zapisać na $5^4 = 625$ sposobów, a na pozostałych 3 miejscach cyfry nieparzyste zapiszemy na $5^3 = 125$ sposobów. Takich ciągów o 7 cyfrach jest zatem $\binom{7}{4} \cdot 5^4 \cdot 5^3 = 35 \cdot 625 \cdot 125 = 2734375$.

Wśród tych ciągów są takie, w których cyfra 0 zapisana jest na pierwszym miejscu. W każdym z nich na 3 spośród kolejnych 6 miejsc znajdują się cyfry parzyste. Miejsce dla nich można wybrać na $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ sposobów, zapisać cyfry parzyste na tych ustalonych 3 miejscach można na $5^3 = 125$ sposobów, a zapisać cyfry nieparzyste na pozostałych 3 miejscach można również na $5^3 = 125$ sposobów. Oznacza to, że ciągów z cyfrą 0 na pierwszym miejscu jest $\binom{6}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 20 \cdot 125 \cdot 125 = 312500$.

Stąd wynika, że jest $2734375 - 312500 = 2421875$ takich ciągów 7-elementowych, w których pierwszą cyfrą nie jest 0. Ponieważ każdy taki ciąg odpowiada wzajemnie jednoznacznie liczbie 7-cyfrowej spełniającej warunki zadania, więc szukanych liczb 7-cyfrowych jest 2421875.

Przykład 2

Obliczymy, ile jest dziewięciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym nie występuje zero, natomiast występują trzy cyfry 7 i dwie cyfry 5.

Rozwiązanie:

Zliczanie rozkładamy na trzy etapy:

(1) wybór 3 miejsc spośród 9 dostępnych w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby naturalnej dla trzech cyfr 7 i zapisanie tych cyfr na wybranych miejscach – można to

zrobić na $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$ sposoby,

(2) wybór 2 miejsc spośród pozostałych 6 dla dwóch cyfr 5 i zapisanie tych cyfr na wybranych miejscach – można to zrobić na $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ sposobów,

(3) uzupełnienie każdego z pozostałych 4 miejsc cyfrą wybraną za każdym razem spośród 7 dostępnych cyfr: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 – można to zrobić na $7^4 = 2401$ sposobów.

Korzystając z **reguły mnożenia**, obliczamy, że wszystkich dziewięciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym nie występuje zero, natomiast występują trzy cyfry 7 i dwie cyfry 5 jest $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot 7^4 = 84 \cdot 15 \cdot 2401 = 3025260$.

Przykład 3

Obliczymy, ile jest dziewięciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują trzy cyfry 7 i dwie cyfry 5.

Rozwiązanie:

I sposób:

Rozpatrujemy trzy rozłączne przypadki ze względu na pierwszą cyfrę zapisu dziesiętnego liczby naturalnej spełniającej warunki zadania:

- jeśli jest to cyfra 7, to zliczanie rozkładamy na trzy następujące etapy:
 - (1) wybór 2 miejsc spośród 8 dostępnych w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby naturalnej dla dwóch cyfr 7 i zapisanie tych cyfr na wybranych miejscach – można to zrobić na $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ sposobów,
 - (2) wybór 2 miejsc spośród pozostałych 6 dla dwóch cyfr 5 i zapisanie tych cyfr na wybranych miejscach – można to zrobić na $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ sposobów,
 - (3) uzupełnienie każdego z pozostałych 4 miejsc cyfrą wybieraną za każdym razem spośród 8 dostępnych cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 – można to zrobić na $8^4 = 4096$ sposobów,

Zatem w tym przypadku jest $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot 8^4 = 28 \cdot 15 \cdot 4096 = 1720320$ liczb spełniających warunki zadania;

- jeśli jest to cyfra 5, to zliczanie rozkładamy na trzy następujące etapy:
 - (1) wybór 3 miejsc spośród 8 dostępnych w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby naturalnej dla trzech cyfr 7 i zapisanie tych cyfr na wybranych miejscach – można to zrobić na $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ sposobów,
 - (2) wybór 1 miejsca spośród pozostałych 5 dla jednej cyfry 5 i zapisanie tej cyfry na wybranym miejscu – można to zrobić na 5 sposobów,
 - (3) uzupełnienie każdego z pozostałych 4 miejsc cyfrą wybieraną za każdym razem spośród 8 dostępnych cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 – można to zrobić na $8^4 = 4096$ sposobów.

Oznacza to, że w tym przypadku jest $\binom{8}{3} \cdot 5 \cdot 8^4 = 56 \cdot 5 \cdot 4096 = 1146880$ liczb spełniających warunki zadania;

- jeśli jest to cyfra niezerowa, różna od 5 i różna od 7, to zliczanie rozkładamy na cztery następujące etapy:
 - (1) wybór jednej cyfry spośród dostępnych na pierwsze miejsce zapisu dziesiętnego – można to zrobić na 7 sposobów,
 - (2) wybór 3 miejsc spośród 8 dostępnych w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby naturalnej dla trzech cyfr 7 i zapisanie tych cyfr na wybranych miejscach – można to zrobić na $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ sposobów,
 - (3) wybór 2 miejsc spośród pozostałych 5 dla dwóch cyfr 5 i zapisanie tych cyfr na wybranych miejscach – można to zrobić na $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ sposobów,
 - (4) uzupełnienie każdego z pozostałych 3 miejsc cyfrą wybieraną za każdym razem spośród 8 dostępnych cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 – można to zrobić na $8^3 = 512$ sposobów.

Wynika stąd, że w tym przypadku jest

$$7 \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 8^3 = 7 \cdot 56 \cdot 10 \cdot 512 = 2007040 \text{ liczb spełniających warunki zadania.}$$

Wobec tego jest $1720320 + 1146880 + 2007040 = 4874240$ wszystkich dziewięciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują trzy cyfry 7 i dwie cyfry 5.

II sposób:

Wypisujemy kolejno jedna za drugą dziewięć cyfr, wybierając każdą spośród 10 możliwych (dopuszczamy 0 na pierwszym miejscu), przy czym na dokładnie 3 miejscach zapisujemy cyfrę 7 i na dokładnie 2 miejscach zapisujemy cyfrę 5. W trzech etapach obliczamy, ile jest tak określonych ciągów 9-elementowych.

- (1) wybieramy 3 miejsca spośród 9 dostępnych w ciągu dla trzech cyfr 7 i zapisujemy te cyfry na wybranych miejscach – można to zrobić na $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$ sposoby,
 - (2) wybieramy 2 miejsca spośród pozostałych 6 dla dwóch cyfr 5 i zapisujemy te cyfry na wybranych miejscach – można to zrobić na $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ sposobów,
 - (3) uzupełniamy każde z pozostałych 4 miejsc cyfrą wybieraną za każdym razem spośród 8 dostępnych cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 – można to zrobić na $8^4 = 4096$ sposobów.
- Oznacza to, że jest $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot 8^4 = 84 \cdot 15 \cdot 4096 = 5160960$ takich ciągów.

Wśród rozpatrywanych powyżej ciągów są takie, w których cyfra 0 zapisana jest na pierwszym miejscu. W każdym z nich na 3 miejscach wybranych spośród kolejnych 8 miejsc znajduje się cyfra 7, na 2 miejscach wybranych spośród pozostałych 5 miejsc

znajduje się cyfra 5, a na każdym z jeszcze niewypełnionych 3 miejsc można wstawić za każdym razem jedną spośród 8 następujących cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9.

Korzystając z **reguły mnożenia**, stwierdzamy więc, że ciągów z cyfrą zero na pierwszym miejscu jest $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 8^3 = 56 \cdot 10 \cdot 512 = 286720$.

Oznacza to, że jest $5160960 - 286720 = 4874240$ takich ciągów 9-elementowych, w których pierwszą cyfrą nie jest 0. Ponieważ każdy taki ciąg odpowiada wzajemnie jednoznacznie liczbie 9-cyfrowej spełniającej warunki zadania, więc szukanych liczb 9-cyfrowych jest 4874240.

Przykład 4

Obliczymy, ile jest wszystkich dwudziestocyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 9, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wynika, że możliwe są dwa następujące rozłączne przypadki:

- w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby oprócz cyfr 2 oraz 3 jest jeszcze cyfra 4 oraz siedemnaście cyfr 0,
- oprócz cyfr 2 oraz 3 w zapisie dziesiętnym rozpatrywanej liczby są jeszcze cztery cyfry 1 oraz czternaście cyfr 0.

W pierwszym przypadku zliczanie rozkładamy na trzy etapy:

- (1) wybór jednej z trzech niezerowych cyfr do zapisania na pierwszym miejscu zapisu dziesiętnego rozpatrywanej liczby – można to zrobić na 3 sposoby,
 - (2) wybór miejsca (spośród 19 dostępnych) do zapisania kolejnej niezerowej cyfry – można to zrobić na 19 sposobów,
 - (3) wybór miejsca (spośród 18 dostępnych) do zapisania trzeciej niezerowej cyfry i uzupełnienie każdego z pozostałych miejsc cyfrą 0 – można to zrobić na 18 sposobów.
- Zatem w tym przypadku jest $3 \cdot 19 \cdot 18 = 1026$ liczb spełniających warunki zadania.

Drugi przypadek dzielimy na kolejne dwa rozłączne przypadki (ze względu na pierwszą cyfrę zapisu dziesiętnego):

- pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 2 lub 3;
w tym przypadku zliczanie rozkładamy na trzy etapy:
 - (1) wybór jednej z cyfr: 2 lub 3 do zapisania na pierwszym miejscu zapisu dziesiętnego rozpatrywanej liczby – można to zrobić na 2 sposoby,
 - (2) wybór miejsca (spośród 19 dostępnych) do zapisania drugiej z tych cyfr – można

to zrobić na 19 sposobów,

(3) wybór czterech miejsc (spośród 18 dostępnych) do zapisania czterech cyfr 1 i uzupełnienie każdego z pozostałych miejsc cyfrą 0 – można to zrobić na

$$\binom{18}{4} = \frac{18!}{4! \cdot 14!} = 3060 \text{ sposobów.}$$

Zatem przy tak ustalonych warunkach jest $2 \cdot 19 \cdot \binom{18}{4} = 2 \cdot 19 \cdot 3060 = 116280$ liczb.

- pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 1;

w tym przypadku zliczanie również rozkładamy na trzy etapy:

(1) wybór miejsca (spośród 19 dostępnych) do zapisania cyfry 2 – można to zrobić na 19 sposobów,

(2) wybór miejsca (spośród 18 dostępnych) do zapisania cyfry 3 – można to zrobić na 18 sposobów,

(3) wybór trzech miejsc (spośród 17 dostępnych) do zapisania trzech cyfr 1 i uzupełnienie każdego z pozostałych miejsc cyfrą 0 – można to zrobić na

$$\binom{17}{3} = \frac{17!}{3! \cdot 14!} = 680 \text{ sposobów.}$$

Zatem przy tak ustalonych warunkach jest $19 \cdot 18 \cdot \binom{17}{3} = 19 \cdot 18 \cdot 680 = 232560$ liczb.

Wobec tego w drugim przypadku mamy ogółem $116280 + 232560 = 348840$ możliwości.

Na koniec sumujemy liczby możliwości otrzymane w omówionych powyżej przypadkach i stwierdzamy, że wszystkich liczb naturalnych spełniających warunki zadania jest $1026 + 348840 = 349866$.

Przykład 5

Obliczymy, ile jest liczb naturalnych, które są mniejsze niż 10^{10} i których iloczyn cyfr jest równy 125.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

- $125 = 5^3$, co oznacza, że w zapisie dziesiętnym każdej liczby spełniającej warunki zadania występują trzy cyfry 5, a więc rozpatrywać będziemy liczby co najmniej trzycyfrowe,
- jeżeli liczba spełniająca warunki zadania ma w zapisie więcej niż trzy cyfry, to każda z cyfr różnych od 5 jest równa 1,

- ponieważ liczba spełniająca warunki zadania jest mniejsza niż 10^{10} , więc może być co najwyżej 9-cyfrowa.

Wynika stąd, że szukamy liczb k -cyfrowych, w których zapisie występują 3 cyfry 5, a pozostałe $k - 3$ cyfr to cyfry 1, gdzie $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Ponieważ miejsca do wstawienia trzech cyfr 5 w zapisie każdej takiej liczby wyznaczymy na $\binom{k}{3}$ sposobów i wtedy na pozostałych rozmieścimy cyfry 1, więc wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest tyle, ile jest równa suma $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3}$.

Korzystając z reguły sumowania współczynników dwumianowych po górnym indeksie. stwierdzamy, że powyższa suma jest równa $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$.

Słownik

k -elementowa kombinacja zbioru n -elementowego

każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy k -elementową kombinacją tego zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

wariacja z powtórzeniami

k -wyrazowy ciąg o elementach wybieranych dowolnie (czyli z powtórzeniami) ze zbioru n -elementowego

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n – tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej prezentacją multimedialną.

Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym należy ustalić, ile jest wszystkich ośmiocyfrowych liczb naturalnych, których cyfry spełniają jednocześnie dwa pewne warunki.

Polecenie 2

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych nieparzystych, w których zapisie dziesiętnym występują co najwyżej cztery cyfry 5.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozpatrujemy wszystkie sześciocyfrowe liczby naturalne, w których zapisie nie występuje cyfra zero.

Wśród nich (wskaż wszystkie prawidłowe odpowiedzi):

☐ jest 150000 liczb, w których na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry nieparzyste

☐ jest 160000 liczb, w których na dokładnie trzech miejscach stoją cyfry nieparzyste

☐ jest 150000 liczb, w których na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste

☐ jest 160000 liczb, w których na dokładnie trzech miejscach stoją cyfry parzyste

Ćwiczenie 2



Spośród wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie występują wyłącznie cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 wyróżniamy dwa zbiory:

A – zbiór tych liczb, w których zapisie na dokładnie trzech miejscach stoją cyfry parzyste,

B – zbiór tych liczb, w których zapisie na dokładnie trzech miejscach stoją cyfry nieparzyste.

Wynika stąd, że liczba $\frac{|A|}{|B|}$:

☐ jest mniejsza od $\frac{24}{31}$

☐ jest większa od 0,87125

☐ jest większa od $\frac{26}{33}$

☐ jest mniejsza od 0,78126

Ćwiczenie 3



Rozpatrujemy wszystkie 57 – cyfrowe liczby naturalne o sumie cyfr równej 6.
Ile jest wśród nich takich liczb, które w zapisie dziesiętnym mają wyłącznie cyfry parzyste?

☐ 1597

☐ 1653

☐ 1541

☐ 1652

Ćwiczenie 4



Rozpatrujemy wszystkie naturalne liczby dziewięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, 4.

Wśród nich wyróżniamy:

A – zbiór tych liczb, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie 3 razy,

B – zbiór tych liczb, w których zapisie cyfry 1 oraz 2 występują dokładnie po 2 razy,

C – zbiór tych liczb, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra 1,

D – zbiór tych liczb, w których zapisie występują dokładnie cztery cyfry 4.

Uporządkuj podane liczby od najmniejszej do największej.

$|B|$



$|A|$



$|D|$



$|C|$



Ćwiczenie 5



Oblicz, ile jest wszystkich dziesięciocyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 6, w zapisie których występują wyłącznie cyfry 0, 1, 3, 5.

Zakoduj poniżej kolejno cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 6



Rozpatrujemy wszystkie siedmiocyfrowe liczby naturalne, w których zapisie dokładnie cztery razy występuje cyfra 4.

Wśród nich (wskaż wszystkie prawidłowe odpowiedzi):

☐ jest 1710 liczb podzielnych przez 10

☐ jest 5850 liczb nieparzystych

☐ jest 5850 liczb parzystych

☐ są 44 liczby podzielne przez 100

Ćwiczenie 7



Oblicz, ile jest ośmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie nie występuje cyfra zero, natomiast występują dokładnie trzy cyfry 5, dokładnie dwie cyfry 9 i suma wszystkich cyfr jest równa 41.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 8



Oblicz, ile jest liczb naturalnych, które są mniejsze niż 10^{31} i których iloczyn cyfr jest równy 49.

Odpowiedź:

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (cyfry w liczbach)

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje poznane reguły kombinatoryczne w zadaniach, których rozwiązanie wymaga łączenia różnych warunków,
- analizuje treści zadania pozwoli Ci na rozpoznawanie kolejnych etapów rozwiązania,
- wyznacza ilość liczb spełniających określone (złożone) warunki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (cyfry w liczbach)”.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Prezentacja multimedialna”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kota i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (cyfry w liczbach)” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy

uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

[Liczba elementów zbioru skończonego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (cyfry w liczbach)”.