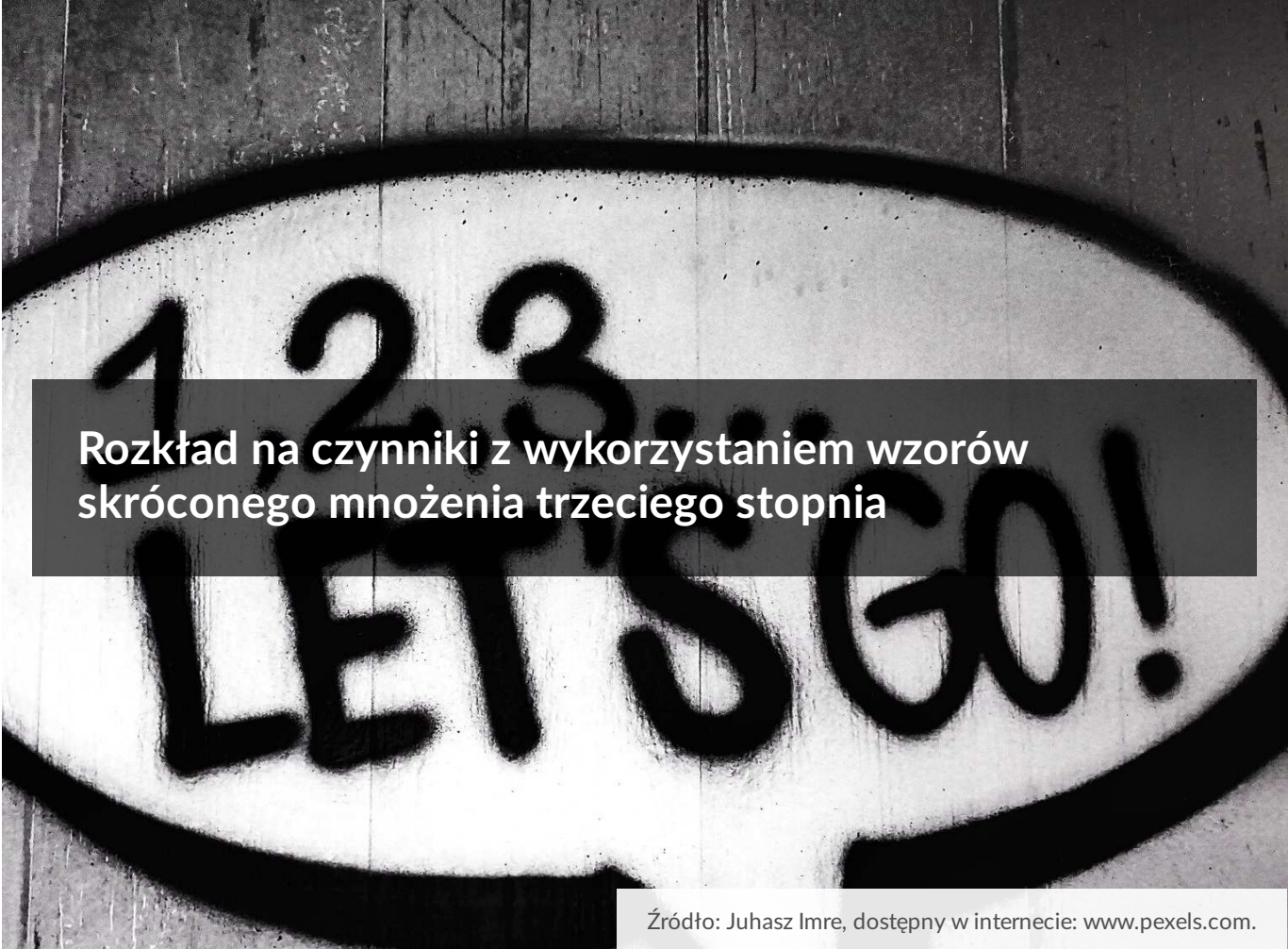


Rozkład na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia trzeciego stopnia

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozkład na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia trzeciego stopnia

Źródło: Juhasz Imre, dostępny w internecie: www.pexels.com.

W tym materiale pokażemy, jak wykorzystać wzory skróconego mnożenia trzeciego stopnia do rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki.



Polski tranzystorowy komputer drugiej generacji
Odra 1013

Źródło: Marcin Wichary, dostępny w internecie:
commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 2.0.

Rozkład wyrażeń algebraicznych na czynniki jest jednym z najważniejszych sposobów rozwiązywania równań. Przez stulecia poszukiwano więc algorytmów umożliwiających zapisywanie wielomianów w postaci iloczynowej. Pierwszy formalny algorytm skończonych kroków został opublikowany dopiero w XVIII wieku.

Jednak kiedy do rozkładu wielomianów na czynniki zaangażowano komputery, znane sposoby okazały się mało efektywne. Dopiero prace współczesnych matematyków doprowadziły do powstania algorytmów, za pomocą których komputery mogą szybko

zapisać w postaci iloczynu (jeżeli taki rozkład istnieje) wielomian stopnia nawet 1000 o współczynnikach wymiernych, składających się z kilku tysięcy cyfr.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory skróconego mnożenia do rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki.
- Dobierzesz najefektywniejszy sposób zapisania w postaci iloczynu wyrażenia algebraicznego, analizując postać tego wyrażenia.

Przeczytaj

W tej części materiału zajmiemy się rozkładem wyrażeń algebraicznych na czynniki, z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia trzeciego stopnia. Przy czym wyrażenia będą miały najczęściej postać wielomianu.

Rozkład na czynniki (faktoryzacja) wielomianu polega na znalezieniu takich wielomianów jak najniższego stopnia, których iloczyn jest równy danemu. Przy czym znalezione wielomiany nie mogą być tego samego stopnia (lub wyższego) co dany wielomian.

Zastosowanie wzoru na sześcian sumy

Podamy teraz przykłady rozkładu na czynniki z wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy.

Przypominamy najpierw potrzebny wzór.

Wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Przykład 1

W poniższych sumach wystarczy tylko zauważyć, który składnik odpowiada któremu ze składników lewej strony wzoru na sześcian sumy – w szczególności które wyrazy to sześciany. „Zwijamy” wtedy sumę w sześcian dwumianu, a następnie zapisujemy sześcian w postaci iloczynu (możemy też zostawić zapis w postaci sześcianu).

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3 =$$

$$= (x + 2)^3 = (x + 2)(x + 2)(x + 2)$$

$$125 + 75x + 15x^2 + x^3 = 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot x + 3 \cdot 5 \cdot x + x^3 =$$

$$= (5 + x)^3 = (5 + x)(5 + x)(5 + x)$$

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 =$$

$$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + (3y)^3 = (2x + 3y)^3$$

Przykład 2

Teraz, aby rozłożyć wyrażenie algebraiczne na czynniki, wyłączymy najpierw przed nawias największy wspólny czynnik, a następnie wyrażenie w nawiasie zapiszemy

w postaci iloczynu (sześcianu sumy), korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy.

$$3x^3 + 9x^2 + 9x + 3 = 3 \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 3 \cdot (x + 1)^3$$

$$\sqrt{5}x^3y^3 + 6\sqrt{5}x^2y^2 + 12\sqrt{5}xy + 8\sqrt{5} =$$

$$= \sqrt{5} \cdot (x^3y^3 + 6x^2y^2 + 12xy + 8) = \sqrt{5} \cdot (xy + 2)^3$$

$$a^5 + 3a^5b + 3a^5b^2 + a^5b^3 = a^5(1 + 3b + 3b^2 + b^3) = a^5(1 + b)^3$$

Zastosowanie wzoru na sześcian różnicy

Podamy teraz przykłady rozkładu na czynniki z wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy.

Przypominamy najpierw potrzebny wzór.

Wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Podobnie, jak wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy, można stosować wzór na sześcian różnicy.

Przykład 3

W poniższych sumach wystarczy tylko zauważyć, który składnik odpowiada któremu ze składników lewej strony wzoru na sześcian różnicy – w szczególności które wyrazy to sześciany. „Zwijamy” wtedy sumę w sześcian dwumianu, a następnie zapisujemy sześcian w postaci iloczynu (możemy też zostawić zapis w postaci sześcianu).

$$64 - 48a + 12a^2 - a^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot a + 3 \cdot 4 \cdot a^2 - a^3 = (4 - a)(4 - a)(4 - a)$$

$$x^6y^3 - 9x^4y^2 + 27x^2y - 27 =$$

$$= (x^2y)^3 - 3 \cdot (x^2y)^2 \cdot 3 + 3 \cdot x^2y \cdot 3^2 - 3^3 = (x^2y - 3)^3$$

$$125 - 150x + 60x^2 - 8x^3 = 5^3 - 3 \cdot 5^2 \cdot 2x + 3 \cdot 5 \cdot (2x)^2 - (2x)^3 = (5 - 2x)^3$$

Przykład 4

Teraz, aby rozłożyć wyrażenie algebraiczne na czynniki, wyłączymy najpierw przed nawias największy wspólny czynnik, a następnie wyrażenie w nawiasie zapiszemy w postaci iloczynu (sześcianu różnicy), korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy.

$$\begin{aligned}
2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 &= 2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = \\
&= 2 \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot x - 1^3) = 2 \cdot (x - 1)^3 \\
8a - 12ay + 6ay^2 - ay^3 &= a \cdot (2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot y + 3 \cdot 2 \cdot y^2 - y^3) = a \cdot (2 - y)^3 \\
x^4y - 3x^3y^2 + 3x^2y^3 - xy^4 &= \\
&= xy \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 - y^3) = xy \cdot (x - y)^3
\end{aligned}$$

Nie zawsze patrząc na wyrażenie algebraiczne możemy zauważyć, że aby je zapisać w postaci iloczynu, można skorzystać z danego wzoru skróconego mnożenia, często trzeba najpierw pogrupować odpowiednio składniki.

Przykład 5

Zapiszemy w postaci iloczynu wyrażenie $A = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$.

Przekształcanie wyrażenia można zacząć od redukcji wyrazów podobnych.

Ale w tym przypadku nie doprowadziłoby to nas do postaci, z której można by od razu określić jakiego sposobu użyć, by wyrażenie rozłożyć na czynniki.

Pogrupujmy więc najpierw w danym wyrażeniu wyrazy.

$$\begin{aligned}
A &= x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 \\
A &= (x^4 + 2x^3) - (3x^3 + 6x^2) + (3x^2 + 6x) - (x + 2)
\end{aligned}$$

Wyłączamy wspólny czynnik w pierwszych 3 nawiasach.

$$A = x^3(x + 2) - 3x^2(x + 2) + 3x(x + 2) - (x + 2)$$

Teraz wspólnym czynnikiem jest $(x + 2)$.

$$A = (x + 2)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

Zauważmy, że w drugim nawiasie mamy sześcianną różnicę.

$$A = (x + 2)(x - 1)^3$$

Ostatecznie:

$$A = (x + 2)(x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

Zastosowanie wzoru na sumę sześcianną

Często wykorzystywanym wzorem w rozkładzie na czynniki jest wzór na sumę sześcianów.

Przypomnijmy najpierw ten wzór.

Wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Przykład 6

Zapiszemy każde z podanych wyrażeń w postaci iloczynu, stosując wzór na sumę sześcianów.

a)

$$x^3 + 216 = x^3 + 6^3 = (x + 6)(x^2 - 6x + 36)$$

b) Aby rozłożyć na czynniki podane wyrażenie, wyłączymy najpierw wspólny czynnik przed nawias.

$$\begin{aligned} 3 + 81x^3y^3 &= 3 \cdot (1 + 27x^3y^3) = 3 \cdot [1^3 + (3xy)^3] = \\ &= 3 \cdot (1 + 3xy)(1 - 3xy + 9x^2y^2) \end{aligned}$$

c) W tym przypadku mamy nieco trudniejsze zadanie. Najpierw zapiszemy 68 w postaci sumy: $68 = 64 + 4$, następnie pogrupujemy odpowiednio wyrazy, skorzystamy ze wzoru na sumę sześcianów i wyłączymy wspólny czynnik poza nawias.

$$\begin{aligned} 68 + 8x^3 + 2x &= 64 + 4 + 8x^3 + 2x = (64 + 8x^3) + (4 + 2x) \\ 68 + 8x^3 + 2x &= (4 + 2x)(16 - 8x + 4x^2) + (4 + 2x) \\ 68 + 8x^3 + 2x &= (4 + 2x)(16 - 8x + 4x^2 + 1) = 2 \cdot (2 + x)(17 - 8x + 4x^2) \end{aligned}$$

Zastosowanie wzoru na różnicę sześcianów

Przypomnijmy najpierw ten wzór.

Wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Przykład 7

Zapiszemy każde z podanych wyrażeń w postaci iloczynu, stosując wzór na różnicę sześcianów.

a)

$$a^3b^3 - 729 = (ab - 9)(a^2b^2 + 9ab + 81)$$

b) Aby rozłożyć na czynniki podane wyrażenie, wyłączymy najpierw wspólny czynnik przed nawias.

$$4x^3 - 500 = 4 \cdot (x^3 - 125) = 4 \cdot (x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 4 \cdot (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

c) W tym przypadku nie można od razu skorzystać ze wzoru na różnicę sześcianów. Najpierw więc zapiszemy 130 w postaci sumy: $130 = 125 + 5$, następnie pogrupujemy odpowiednio wyrazy, skorzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów i wyłączymy wspólny czynnik poza nawias.

$$130 - 27a^3 - 3a = 125 + 5 - 27a^3 - 3a$$

$$130 - 27a^3 - 3a = (125 - 27a^3) + (5 - 3a)$$

$$130 - 27a^3 - 3a = (5 - 3a)(25 + 15a + 9a^2) + (5 - 3a)$$

$$130 - 27a^3 - 3a = (5 - 3a)(26 + 15a + 9a^2)$$

Rozkład na czynniki z zastosowaniem kilku wzorów skróconego mnożenia

Jeśli chcemy rozłożyć na czynniki wyrażenie algebraiczne, z którego postaci nie możemy bezpośrednio wywnioskować, jaki sposób rozkładu zastosować, sprowadzamy to wyrażenie do najprostszej postaci. I dopiero wtedy ustalamy sposób rozkładu (jeśli ten rozkład jest możliwy).

Przykład 8

Rozłożymy na czynniki wyrażenie $B = 2 \cdot (x^3 - 2) + (x - 1)^2 + (3 - x^3)$.

Zapisujemy wyrażenie w prostszej postaci.

$$B = 2x^3 - 4 + 3 - x^3 + (x - 1)^2 = x^3 - 1 + (x - 1)^2$$

Grupujemy wyrazy i korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

$$B = (x^3 - 1) + (x - 1)^2$$

$$B = (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)^2$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$$B = (x - 1)(x^2 + x + 1 + x - 1)$$

$$B = (x - 1)(x^2 + 2x)$$

Ostatecznie:

$$B = x(x - 1)(x + 2)$$

Przykład 9

Zapiszemy w postaci iloczynu $C = x^6 - y^6$.

Zauważmy, że rozpatrywane wyrażenie można zapisać jako różnicę kwadratów.

$$C = (x^3)^2 - (y^3)^2$$

Korzystamy więc ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$C = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$$

Zapisujemy każde z wyrażeń w nawiasie w postaci iloczynu – korzystając ze wzoru skróconego mnożenia – odpowiednio na sumę i różnicę sześcianów.

$$C = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Słownik

rozkład na czynniki (faktoryzacja)

to zapisanie wielomianu w postaci iloczynu wielomianów jak najniższego stopnia

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia. Spróbuj rozwiązać podane przykłady też innymi sposobami. Oceń, które sposoby są najefektywniejsze.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DjIC5txSg>

Na ekranie pojawia się napis rozkład wyrażeń algebraicznych na czynniki z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia. Polecenie pierwszego przykładu to rozkładamy na czynniki wyrażenie W równa się A do potęgi trzeciej minus A plus trzy a do potęgi drugiej B plus trzy AB do potęgi drugiej plus B do potęgi trzeciej minus B . Następnie grupujemy wyrazy. Pierwotny wzór przekształca się w następujący. W równa się otwarcie nawiasu A do potęgi trzeciej plus trzy A do potęgi drugiej B plus trzy AB do potęgi drugiej plus B do potęgi trzeciej zamknięcie nawiasu. Otwarcie nawiasu A plus B zamknięcie nawiasu. Wyrażenie w pierwszym nawiasie to sześcian dwumianu A dodać B . Czyli W równa się otwarcie nawiasu A plus B zamknięcie nawiasu do potęgi trzeciej minus otwarcie nawiasu A plus B zamknięcie nawiasu. Wylączamy wspólny czynnik przed nawias. W równa się otwarcie nawiasu A plus B zamknięcie nawiasu otwarcie nawiasu kwadratowego otwarcie nawiasu A plus B zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej minus jeden zamknięcie nawiasu kwadratowego. Wykonujemy działania w nawiasie kwadratowym. Otrzymujemy szukany rozkład a mianowicie W równa się otwarcie nawiasu A plus B zamknięcie nawiasu otwarcie nawiasu A do potęgi drugiej plus dwa AB plus B do potęgi drugiej minus jeden zamknięcie nawiasu. Przykład drugi. Na ekranie pojawia się kolejne równanie X do potęgi trzeciej plus trzy X do potęgi drugiej plus trzy X plus jeden równa się otwarcie nawiasu X plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej. Zwijamy lewą stronę równania w sześcian sumy czyli otwarcie nawiasu X plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi trzeciej równa się otwarcie nawiasu X plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej. Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę czyli otwarcie nawiasu X plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi trzeciej minus otwarcie nawiasu X plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej równa się zero. Wylączamy wspólny czynnik przed nawias otwarcie nawiasu X plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej otwarcie nawiasu X plus jeden minus jeden zamknięcie nawiasu równa się zero. Następnie przekreślony w równaniu cyfry jeden z czego wychodzi nam równanie X otwarcie nawiasu X plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej równa się zero. Zapisujemy równanie w postaci równoważnej alternatywy X równa się zero lub otwarcie nawiasu X plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej równa się zero. X równa się zero lub X równa się minus jeden. Odpowiedz do tego przykładu jest taka, że równanie ma dwa rozwiązania zero i minus jeden. Przykład trzeci. Wykażemy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od dwa wyrażenie W równa się otwarcie nawiasu

x plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej minus iloraz w którym dzielna to osiem minus x do potęgi trzeciej a dzielnik to dwa minus x ma stałą wartość. Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów. W równa się otwarcie nawiasu x plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej minus iloraz z dzielną otwarcie nawiasy dwa minus x zamknięcie nawiasu otwarcie nawiasu cztery plus dwa x plus x do potęgi drugiej zamknięcie nawiasu , a dzielnik to otwarcie nawiasu dwa minus x zamknięcie nawiasu. Skracamy to równanie przekreślając oba fragmenty z otwarty nawias dwa minus x zamknięcie nawiasu) Wykonujemy wskazane działania. Poprzednie równanie równe będzie otwarty nawias x plus jeden zamknięcie nawiasu do potęgi drugiej minus otwarcie nawiasu cztery plus dwa x plus x do potęgi drugiej zamknięcie nawiasu. W będzie wtedy równe x do potęgi drugiej plus dwa x plus jeden minus otwarcie nawiasu cztery plus dwa x plus x do potęgi drugiej zamknięcie nawiasu równa się x do potęgi drugiej plus dwa x plus jeden minus cztery minus dwa x minus x do potęgi drugiej. Po prawej stronie równania wykreślamy wszystkie wartości z x . Wtedy wychodzi, że W równa się minus trzy. Wyrażenie dla x różnego od dwa przyjmuje stałą wartość równą minus trzy.

Polecenie 2

Wykaż, że dla $x \neq 4$ równanie $\frac{x^3-64}{x-4} - (x+2)^2 = 0$ nie ma rozwiązania.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Poniżej przedstawiono pewne wyrażenia. Połącz w pary iloczyn z odpowiednią sumą.

$$81 + 81x + 27x^2 + 3x^3$$

$$(ab + 1)(ab + 1)(ab + 1)$$

$$343 + 147x + 21x^2 + x^3$$

$$a(1 + ab)(1 + ab)(1 + ab)$$

$$a^3b^3 + 3a^2b^2 + 3ab + 1$$

$$3 \cdot (3 + x)(3 + x)(3 + x)$$

$$a + a^4b^3 + 3a^3b^2 + 3a^2b$$

$$(7 + x)(7 + x)(7 + x)$$

Ćwiczenie 2



Oceń, czy poniższe równości są prawdziwe, czy fałszywe. Przeciągnij każdy element do odpowiedniej grupy.

Równości prawdziwe

Równości fałszywe

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$$

$$(2 + 3y)(2 + 3y)(2 + 3y) = 8 + 18y + 27y^2 + 27y^3$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{27}$$

$$-(a + a^2)^2(a + a^2) = a^3 - 3a^4$$

$$(-a - a^2)^2(a + a^2) = a^3 + 3a^4$$

$$(2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y) = 8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$$

Ćwiczenie 3



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Jedną z metod rozkładu wielomianu na czynniki jest stosowanie wzorów skróconego mnożenia.

☐

Aby rozłożyć na czynniki wyrażenie $125y^3 - 8$ można skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy.

☐

Wyrażenie $(x + y)(x + y)(x + y)$ to sześcian sumy.

☐

Rozkład na czynniki wielomianu to zredukowanie wyrazów podobnych w tym wielomianie.

Ćwiczenie 4



Rozwiąż każde z równań, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia i do drugiej kolumny tabeli przeciągnij odpowiednią liczbę, która jest rozwiązaniem danego równania.

Równanie	Rozwiązanie
$(x + 1)^3 = (x - 1)^3 + 2$	
$x^3 - 1331 = x^2 + 11x + 121$	
$8x^3 + 96x = 64 + 48x^2$	
$(x + 3)^3 - (x + 2)^3 = 3x^2 + 14x$	

$x = 1$

$x = -2$

$x = 19$

$x = 0$

$x = 12$

$x = -12$

$x = -5$

$x = -19$

$x = 2$

$x = 10$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij rozkład na czynniki, przeciągając odpowiednie wyrażenia w puste pola.

$$5x^3 - 135 = 5 \cdot (\text{puste pole}) (x^2 + 3x + 9)$$

$$14\sqrt{2} - 20 = (\text{puste pole})^3$$

$$(\text{puste pole}) = 6 \cdot (2 + x^2)(4 - 2x^2 + x^4)$$

$$3 - x^3 = (\sqrt[3]{3} - x) \cdot (\text{puste pole})$$

$$48 + 6x^6$$

$$\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}x + x^2$$

$$\sqrt{2} - 2$$

$$x - 3$$

Ćwiczenie 6



Który z poniższych zbiorów jest zbiorem rozwiązań nierówności:

$$(2 - x)^3 + (2 + x)^3 > 2 \cdot (5x^2 + 9)?$$

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $(1, \infty)$

☐ $(-\infty, -1)$

☐ $(-1, 1)$

☐ $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozkład na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia trzeciego stopnia

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej; rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu.

Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wzory skróconego mnożenia 3 stopnia do rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki
- dobiera niealgorytmiczne sposoby zapisania w postaci iloczynu wyrażenia algebraicznego, analizując postać tego wyrażenia
- tworzy pomocnicze obiekty matematyczne w celu rozwiązania nietypowego problemu
- uzasadnia przebieg rozumowania prowadzącego do wykorzystania efektywnych strategii

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- drzewo pomysłów
- krokodyl

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi, aby uczniowie w domu przypomnieli sobie poznane wzory skróconego mnożenia.

Faza wstępna:

Uczniowie przypominają wspólnie znane im wzory skróconego mnożenia trzeciego stopnia i ich zastosowania.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami rozkładu wielomianu na czynniki zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania.

Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady rozkładu na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia 3 stopnia (np. przy skracaniu wyrażeń wymiernych, określaniu dziedziny funkcji, itp.).

Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.

Teraz uczniowie w grupach zapoznają się z animacją i ewentualnie dopisują na plakacie pozyskane informacje.

Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „drzemie na brzegu rzeki” i tylko „ożywia się” w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji – uczniowie mogą korzystać z wytworzonych plakatów.

Liderzy grup omawiają wyniki prac uczestników, uczniowie wzajemnie oceniają swoją pracę.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Działania na wyrażeniach algebraicznych – zadania-zadania-generatorowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać w tematach poświęconych rozwiązywaniu równań i nierówności wielomianowych.