



Funkcje trygonometryczne tangensa podwojonego kąta - zastosowania do obliczeń

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Funkcje trygonometryczne tangensa podwojonego kąta - zastosowania do obliczeń

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Znasz już wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów oraz wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta. W tym materiale skupimy się na wzorze na tangens podwojonego kąta. Za pomocą tego wzoru będziemy mogli dowodzić tożsamości, obliczać wartości tangensa podwojonego kąta, gdy znane są funkcje trygonometrycznego pojedynczego kąta.

Twoje cele

- Nauczysz się stosować wzór na tangens podwojonego kąta do obliczania wartości innych kątów.
- Nauczysz się stosować wzór na tangens podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości.

Przeczytaj

Zacniemy od przypomnienia wzorów na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta.

Twierdzenie: o funkcjach trygonometrycznych podwojonego kąta

1. Dla dowolnych kątów α zachodzą wzory: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$,
 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.
2. Dla takich kątów α , że $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zachodzi wzór:
 $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Przedstawimy kilka typowych zastosowań wzoru na tangens podwojonego kąta.

Rozpocniemy od przykładu, w którym na podstawie tangensa kąta wyliczymy tangens kąta podwojonego.

Przykład 1

Obliczymy $\operatorname{tg} 2\alpha$, jeżeli wiadomo, że $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ i $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, zatem $\sin \alpha < 0$.

Korzystając z [jedynki trygonometrycznej](#) obliczamy wartość $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Wykorzystamy tożsamość opisującą $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

A teraz, korzystając ze wzoru na tangens podwojonego kąta, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{5}}{-\frac{1}{4}}.$$

Stąd dostajemy odpowiedź: $\operatorname{tg} 2\alpha = 4\sqrt{5}$.

Przykład 2

Obliczymy $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ i $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Rozwiązanie:

Zapiszemy wzór w następującej postaci:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Podstawimy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Przekształcamy równanie do postaci:

$$\frac{3}{4} (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Podstawiamy $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Otrzymujemy kolejno:

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} x^2 = 2x$$

$$3 - 3x^2 = 8x$$

$$3x^2 + 8x - 3 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\Delta = 64 + 36 = 100$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ lub } x = -3$$

Za x wstawiamy z powrotem $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \text{ lub } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$$

Ponieważ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, zatem $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

Przykład 3

Niech $\operatorname{tg} 7^\circ = a$. Uzasadnimy, że $\operatorname{tg} 14^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ = \frac{-2a(a^2+1)^2}{(1-a^2)(a^4-6a^2+1)}$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na tangens podwojonego kąta obliczamy $\operatorname{tg} 14^\circ$:

$$\operatorname{tg} 14^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 7^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 7^\circ} = \frac{2a}{1 - a^2}.$$

Wiedząc, ile jest równy $\operatorname{tg} 14^\circ$ oraz korzystając ze wzoru na tangens podwojonego kąta, obliczamy $\operatorname{tg} 28^\circ$:

$$\operatorname{tg} 28^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 14^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 14^\circ} = \frac{2 \frac{2a}{1 - a^2}}{1 - \left(\frac{2a}{1 - a^2} \right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{4a}{1-a^2}}{1 - \frac{4a^2}{(1-a^2)^2}} = \frac{4a(1-a^2)}{(1-a^2)^2 - 4a^2} = \frac{4a(1-a^2)}{(1-a^2-2a)(1-a^2+2a)} = \frac{4a(1-a^2)}{(a^2+2a-1)(a^2-2a-1)}.$$

Obliczamy ostatecznie różnicę tangensów:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 14^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ &= \frac{2a}{1-a^2} - \frac{4a(1-a^2)}{(a^2+2a-1)(a^2-2a-1)} = \\ &= \frac{2a(a^2+2a-1)(a^2-2a-1) - 4a(1-a^2)^2}{(1-a^2)(a^2+2a-1)(a^2-2a-1)} = \frac{2a(a^4-6a^2+1-2+4a^2-2a^4)}{(1-a^2)(a^4-6a^2+1)} \\ &= \frac{2a(-a^4-2a^2-1)}{(1-a^2)(a^4-6a^2+1)} = \frac{-2a(a^2+1)^2}{(1-a^2)(a^4-6a^2+1)} \end{aligned}$$

A to należało wykazać.

Przykład 4

Uzasadnimy, że równość $\sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha}$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

Zapiszmy założenia:

$$\cos 2\alpha \neq 0, 1 - \operatorname{tg}^4 \alpha \neq 0.$$

Korzystamy ze wzoru na sinus podwojonego kąta i tangens podwojonego kąta:

$$L = \sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Wylączamy wspólny czynnik przed nawias i sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$2 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = 2 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha} \right)$$

i sprowadzamy wyrażenie do prawej strony równości

$$2 \operatorname{tg} \alpha \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha} = P.$$

Zatem równość jest tożsamością.

Słownik

jedynka trygonometryczna

dla dowolnego kąta α zachodzi równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1H0zmcuK>

Film nawiązujący do treści dotyczącej funkcji trygonometrycznych.

Polecenie 2

Wartość wyrażenia $\operatorname{tg} 15^\circ + 2 \operatorname{tg} 22,5^\circ$ jest równa:

☐ $\sqrt{8} - \sqrt{3} + 1$

☐ $\sqrt{8} - \sqrt{3} - 1$

☐ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

☐ $\sqrt{8} - \sqrt{3}$

Polecenie 3

Wyrażenie $\frac{\operatorname{tg} 7,5^\circ}{\operatorname{tg}^2 7,5^\circ - 1}$ jest równe:

☐ $2 - \sqrt{3}$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

☐ $\sqrt{3} - 2$

☐ $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, to $\operatorname{tg} 2\alpha$ jest równy

☐ $\frac{5}{4}$

☐ $\frac{4}{3}$

☐ $\frac{3}{4}$

☐ 1

☐ 2

☐ $\frac{4}{5}$

Ćwiczenie 2



Jeżeli $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$ i $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{tg} \alpha$ jest równy

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $-\frac{2}{3}$

☐ $-\frac{1}{2}$

☐ $-\frac{1}{3}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $-\frac{1}{4}$

☐ $\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary wyrażenia o tej samej wartości:

$$\frac{\operatorname{tg} 96^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 96^\circ}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} 48^\circ$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} 13^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 13^\circ}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} 12^\circ$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} 39^\circ}{\operatorname{tg}^2 39^\circ - 1}$$

$$\operatorname{tg} 102^\circ$$

$$\frac{\operatorname{tg} 66^\circ}{\operatorname{tg}^2 66^\circ - 1}$$

$$\operatorname{tg} 206^\circ$$

Ćwiczenie 4



Wstaw w puste pole takie wyrażenie, aby otrzymana równość była tożsamością.

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \boxed{}$$

$\cos \frac{\alpha}{2}$

$\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$

$\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

Ćwiczenie 5



Oblicz $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta)$, jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$.

☐ 2

☐ -3

☐ -2

☐ -1

☐ 3

☐ 1

Ćwiczenie 6



Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 2$, to $\frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \boxed{}$

$-\frac{1}{7}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{7}$

$-\frac{2}{3}$

$-\frac{1}{5}$

$\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 7



Oblicz $\operatorname{tg} 2x$, jeżeli $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \cos x$.

Ćwiczenie 8



Udowodnij, że podana równość $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}} = 1$ jest tożsamością.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje trygonometryczne tangensa podwojonego kąta - zastosowania do obliczeń

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5. korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór na tangens podwojonego kąta do obliczania wartości innych kątów.
- stosuje wzór na tangens podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Funkcje trygonometryczne tangensa podwojonego kąta – zastosowania do obliczeń” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują przykłady przedstawione w sekcji „Przeczytaj”. Ewentualne wątpliwości wyjaśniane są na forum klasy.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Obejrzyj uważnie animację, a następnie wykonaj poniższe polecenia”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Funkcje trygonometryczne tangensa podwojonego kąta - zastosowania do obliczeń”.