# Nierówność kwadratowa zupełna z parametrem


Źródło: CWilkinson from Pixabay, domena publiczna.

Parametr, jest to litera występująca w nierówności, która pełni rolę współczynnika liczbowego.

Parametry w matematyce najczęściej oznaczane są początkowymi literami alfabetu (na przykład $a$, $b$) lub symbolami $m$, $n$, $p$, $s$. Końcowe litery alfabetu często używane są jako zmienne, choć nie jest to regułą. Dlatego w poleceniu zadania często pojawia się informacja, która litera jest zmienną, a która parametrem.

Rozwiązując nierówności kwadratowe z parametrem ważne jest, aby z treści zadania wyznaczyć założenia, które muszą być spełnione.

**Twoje cele**

- Wyznaczysz założenia, jakie muszą być spełnione, aby zbiór rozwiązań nierówności spełniał określony warunek.
- Obliczysz, dla jakich wartości parametru nierówność kwadratowa zupełna jest sprzeczna lub prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej.

# Przeczytaj

**Pamiętasz?**

Nierównością kwadratową z niewiadomą $x$ nazywamy każdą nierówność postaci $ax^2+bx+c>0$ lub $ax^2+bx+c\geq 0$, lub $ax^2+bx+c<0$, lub $ax^2+bx+c\leq 0$, gdzie $a$, $b$, $c$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a\neq 0$.

Nierówności, w których wszystkie współczynniki są różne od 0, nazywamy **nierównościami kwadratowymi zupełnymi**.

**Przykład 1**

Obliczymy, dla jakich wartości parametru $k$ nierówność kwadratowa zupełna $kx^2+5x+1<0$ nie posiada rozwiązań.

**Rozwiązanie**

Dla $k\neq 0$ nierówność $kx^2+5x+1<0$ jest nierównością kwadratową zupełną.

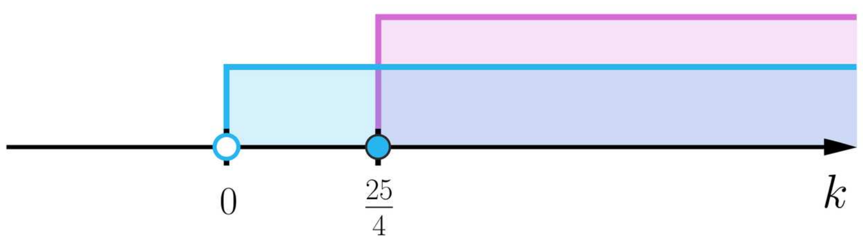
Aby nierówność nie posiadała rozwiązań wykres funkcji $f(x)=kx^2+5x+1$ musi znajdować się powyżej osi $X$.

Czyli $\begin{cases} 1.\ \ k>0 \\ 2.\ \ \Delta\leq 0 \end{cases}$.

1. $k\in(0,\infty)$

2. $\Delta=5^2-4k=25-4k$
   $25-4k\leq 0$
   $-4k\leq -25$
   $k\geq \frac{25}{4}$

Uwzględniając koniunkcję warunków (1) i (2)



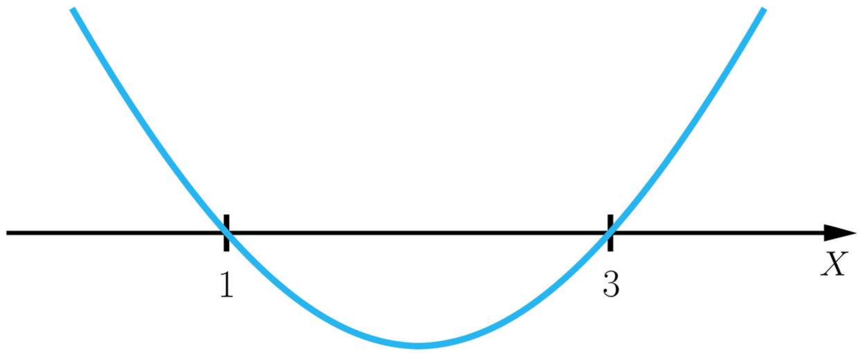

$k\in\langle \frac{25}{4},\infty)$.

**Przykład 2**

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$. Obliczymy współczynniki $b$ i $c$, jeżeli wiadomo, że zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ jest przedział $(1, 3)$.

**Rozwiązanie**

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o ramionach skierowanych do góry, bo współczynnik przy $x^2$ jest dodatni. Miejsca zerowe funkcji to $x = 1$, $x = 3$.




Zapiszemy wzór funkcji $f(x)$ w postaci iloczynowej.

$f(x) = (x - 1)(x - 3)$

$f(x) = x^2 - 3x - x + 3 = x^2 - 4x + 3$

Czyli $b = -4$, $c = 3$.

Aby zbiorem rozwiązań nierówności był przedział $(1, 3)$ współczynnik $b = -4$, współczynnik $c = 3$.

**Przykład 3**

Obliczymy, dla jakich wartości parametru $k$ nierówność $(x - 2k)(x - k - 2) \leq 0$ jest spełniona przez każdą liczbę należącą do przedziału $\langle 1, 2 \rangle$.

**Rozwiązanie**

$(x - 2k)(x - k - 2) \leq 0$

Miejsce zerowe funkcji $f(x) = (x - 2k)(x - k - 2)$ to $x = 2k \ \vee \ x = k + 2$. Zatem $x \in \langle 2k, k + 2 \rangle$ lub $\langle k + 2, 2k \rangle$.

Aby nierówność była spełniona przez każdą liczbę $x \in \langle 1,\ 2 \rangle$:

$\langle 1, 2 \rangle \subset \langle 2k, k + 2 \rangle$ lub $\langle 1, 2 \rangle \subset \langle k + 2, 2k \rangle$

$1 \geq 2k \ \wedge \ 2 \leq k+2$ lub $1 \geq k+2 \ \wedge \ 2 \leq 2k$

$k \leq \frac{1}{2} \wedge \ k \geq 0$ lub $k \leq -1 \ \wedge \ k \geq 1$

$k \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ lub sprzeczność.

Nierówność będzie spełniona przez każdą liczbę $x \in \langle 1, 2 \rangle$ dla $k \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

**Przykład 4**

Obliczymy, dla jakich wartości parametru $m$ dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + (m-2)x + 4}$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

**Rozwiązanie**

Pierwiastek kwadratowy jest określony dla liczb nieujemnych, czyli $x^2 + (m-2)x + 4 \geq 0$.

Zatem $\Delta \leq 0$.

$\Delta = (m-2)^2 - 4 \cdot 4 = m^2 - 4m + 4 - 16 = m^2 - 4m - 12$

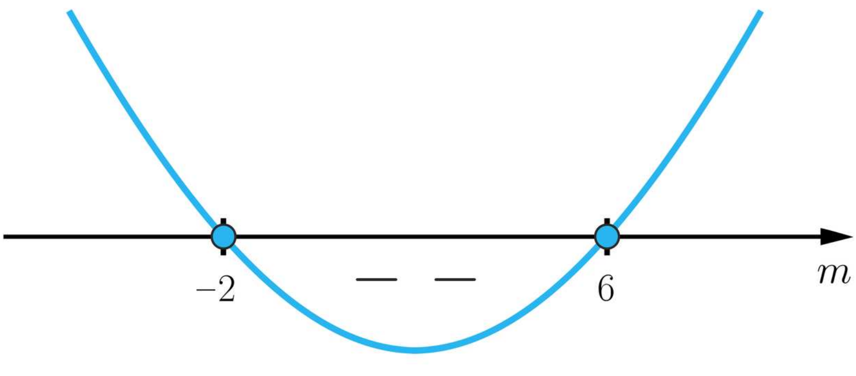
$m^2 - 4m - 12 \leq 0$

$\Delta_m = 16 + 4 \cdot 12 = 16 + 48 = 64$

$\sqrt{\Delta_m} = 8$

$m_1 = \frac{4-8}{2} = -2$

$m_2 = \frac{4+8}{2} = 6$




$m \in \langle -2, 6 \rangle$.

Dla $m \in \langle -2, 6 \rangle$ dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

**Przykład 5**

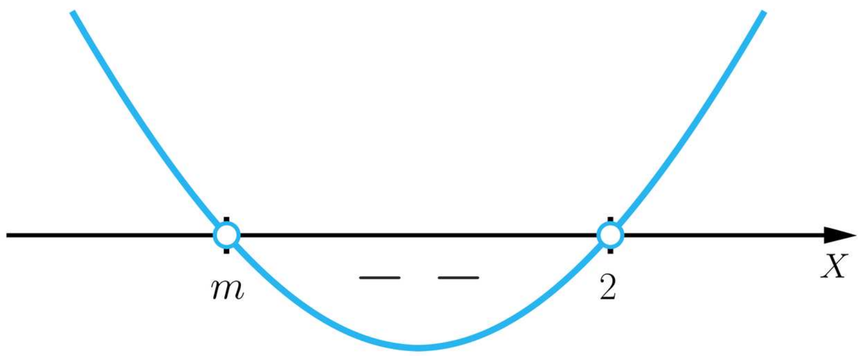
Wyznaczymy takie całkowite wartości parametru $m$ dla których nierówność $(x-2)(x-m)<0$ ma dokładnie pięć rozwiązań całkowitych.

**Rozwiązanie**

$(x-2)(x-m)<0$

$x=2, x=\mathrm{m}$

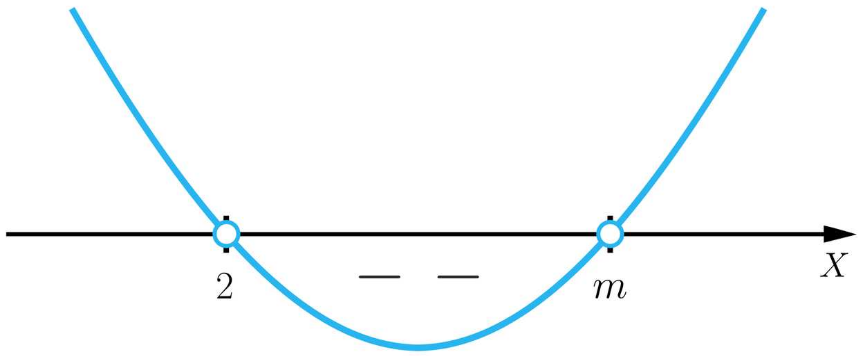
1. $m<2$




$x \in (m, 2)$

Liczby całkowite należące do zbioru rozwiązań nierówności$\{-3,-2,-1,0,1\}$. Czyli $m=-4$.

2. $m>2$




Liczby całkowite należące do zbioru rozwiązań nierówności to $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$. Czyli $m=8$.

Nierówność ma dokładnie pięć rozwiązań całkowitych dla $m \in \{-4,\ 8\}$.

## Słownik

**nierówność kwadratowa zupełna**

nierówność, w której wszystkie współczynniki są różne od zera

# Galeria zdjęć interaktywnych

**Polecenie 1**

Przeanalizuj sposób wyznaczania takich wartości parametru $m$, dla których nierówność jest zawsze prawdziwa.

**Polecenie 2**

Wyznaczymy takie wartości parametru $m$, dla których nierówność $(m-3)x^2 - 2mx + 1 > 0$ jest spełniona dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

## Ćwiczenie 1

## Ćwiczenie 2

## Ćwiczenie 3

## Ćwiczenie 4

## Ćwiczenie 5

## Ćwiczenie 6

## Ćwiczenie 7

## Ćwiczenie 8

# Dla nauczyciela

**Autor:** Jolanta Schilling

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Nierówność kwadratowa zupełna z parametrem**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony.

Uczeń:

5) Analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza takie założenia, aby zbiór rozwiązań nierówności spełniał określony warunek
- oblicza, dla jakich wartości parametru nierówność kwadratowa zupełna jest sprzeczna lub prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej
- przeprowadza rozumowania związane z analizą nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- śnieżna kula;
- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

**Przebieg zajęć**

**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania nierówności kwadratowych niezupełnych.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w grupach metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi sposobów rozwiązań nierówności kwadratowej zupełnej, które przypomnieli w domu. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj".
2. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i analizują nierówności kwadratowe zupełne z parametrem.
3. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne 1-4  wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

**Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

**Praca domowa:**

Polecenie 2 umieszczone pod galerią zdjęć interaktywnych oraz ćwiczenia interaktywne 5 - 8.

**Materiały pomocnicze:**

Nierówność kwadratowa

**Wskazówki metodyczne:**

Przykłady zawarte w galerii zdjęć interaktywnych mogą być wykorzystane również podczas omawiania analizy równania kwadratowego z parametrem.