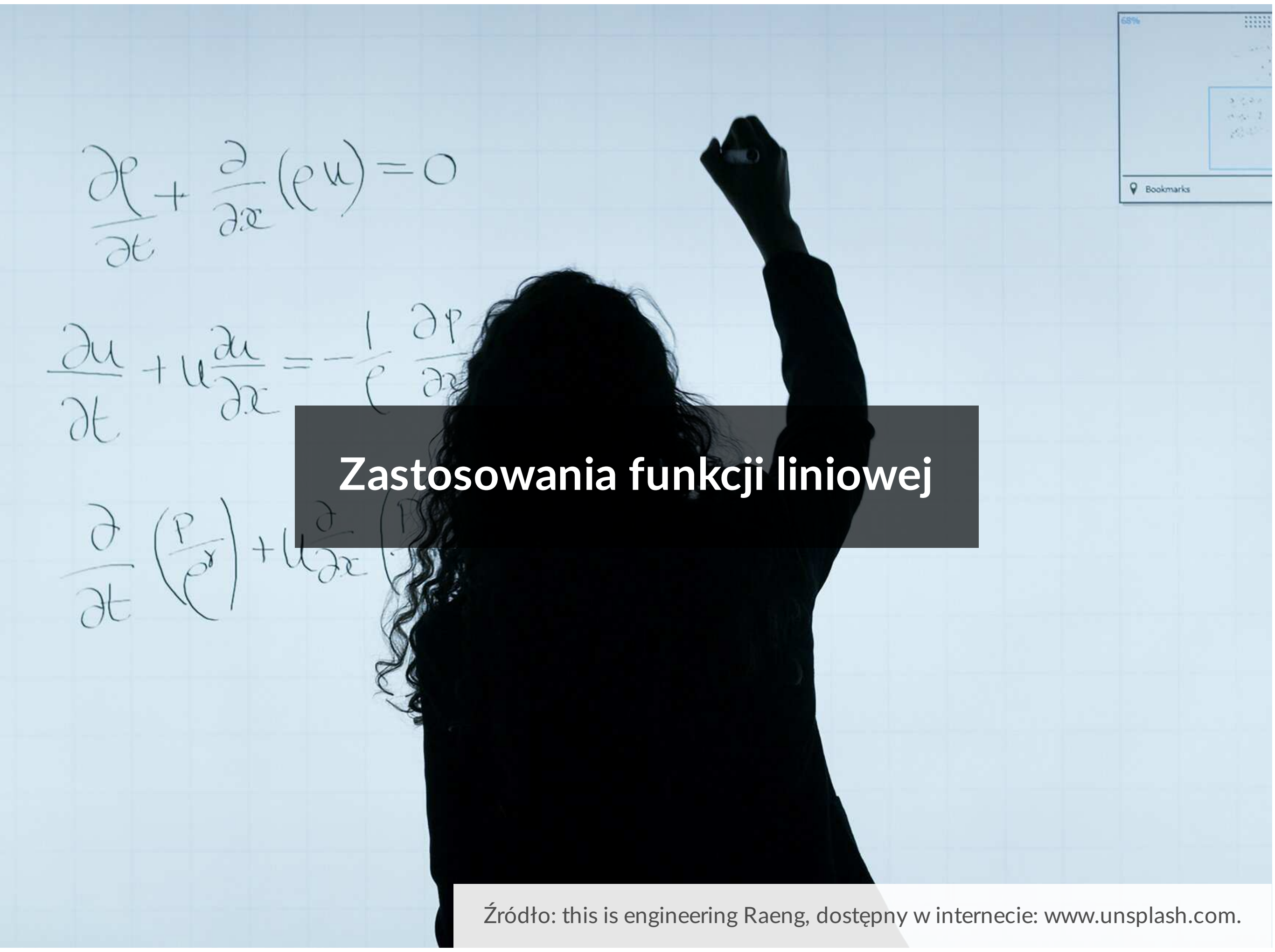
Zastosowania funkcji liniowej

Zastosowania funkcji liniowej



Źródło: this is engineering Raeng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Funkcja liniowa znajduje wiele zastosowań. Możemy wykorzystywać ją do modelowania (czyli matematycznego opisywania) wielu zjawisk, w których zachodzą proste zależności takie jak na przykład ruch, który opisujemy za pomocą prędkości, długości pokonywanej drogi oraz czasu, w jakim ruch się odbywa. Wszystkie składowe ruchu wpływają na siebie wzajemnie, co w matematyce określamy *proporcjonalnością*.

Inne przykłady, wykorzystania funkcji liniowej, to choćby obliczanie ceny łącznej w zależności od ilości produktu, zużycie żwirku w zależności od liczby kotów w domu, czy obliczanie liczby zjedzonych przez psa smakołyków w danym okresie, w zależności od liczby i długości spacerów, na jakie go zabieramy.
Spektrum zastosowań funkcji liniowej do opisywania otaczającej nas rzeczywistości jest bardzo szerokie i w znajdowaniu dla niej zastosowań ogranicza nas tylko nasza wyobraźnia.

Dodajmy nawiasem, że przedstawianie zjawisk za pomocą funkcji liniowej jest zwykle uproszczonym modelem rzeczywistości. Na przykład opisując za jej pomocą ruch, nie bierzemy pod uwagę wielu aspektów mających wpływ na ruch takich jak ilość zakrętów, to, czy kierowca zatrzymywał się, aby przepuścić kogoś przez ulicę, nie bierzemy pod uwagę możliwości pojazdu, nawierzchni, która raczej nie jest jednolita w ciągu trwania ruchu, a także warunków pogodowych. Jeśli chwilę się zastanowimy, zauważymy, że kierowca najprawdopodobniej pokona w innym czasie tę samą drogę tym samym pojazdem w czasie słonecznego dnia i w czasie gradobicia, a jednak w zadaniach nie bierzemy pod uwagę pogody, ponieważ badamy zjawisko ruchu ogólnie, uśredniając je. Oczywiście nie chodzi tu o zubożenie opisu zjawiska. Uproszczony model ma za zadanie przybliżyć je na podobnej zasadzie, jak na przykład średnia ocen ucznia.

Twoje cele

- Zastosujesz własności funkcji liniowej w zadaniach z kontekstem praktycznym.
- Wykorzystasz własności funkcji liniowej do matematycznego modelowania rzeczywistości.
- Porównasz ze sobą parametry mierzone za pomocą dwóch różnych funkcji liniowych opisujących jeden problem.

Przeczytaj

Przykład 1

Zależność pomiędzy drogą s a czasem t, jaki jest potrzebny na jej przebycie w ruchu jednostajnym po linii prostej, jest zależnością liniową:

$$s = vt,$$

gdzie współczynnik proporcjonalności v to prędkość.

Przykład 2

W pewnym przybliżeniu możemy powiedzieć, że podatek dochodowy jest funkcją osiągniętego dochodu, bowiem danemu dochodowi D w ustalonym roku możemy przypisać w jednoznaczny sposób odpowiadający mu podatek P. Oznaczmy przez K roczną kwotę wolną od podatku. Jeżeli wszyscy płatnicy indywidualni płacą w ramach obowiązku podatkowego ten sam procent p od dochodu osiągniętego ponad kwotę wolną od podatku, to zachodzi wzór:

$$P = \frac{p}{100}(D - K)$$

i mamy do czynienia z podatkiem liniowym. Jego nazwa bierze się stąd, że zależność między D i P jest zależnością liniową. Wzór ten dokładniej przeanalizujemy w kolejnym przykładzie.

Ważne!

W rzeczywistości system podatkowy jest bardziej skomplikowany chociażby ze względu na rozmaite ulgi podatkowe takie jak zwolnienie z płacenia podatków przez osoby do 26 roku życia, odliczenie od kwoty naliczonego podatku składki zdrowotnej w wysokości $7,75\%$, czy wiele innych ulg, które możemy odliczać od podatku. W kolejnych przykładach i zadaniach będziemy jednak rozważać uproszczony model, w którym w gruncie rzeczy dochód i podstawę obliczenia podatku można utożsamiać.

Przykład 3

W wielu krajach osoby o wyższych dochodach płacą wyższe podatki od zarobków powyżej pewnej kwoty. W Polsce w 2022 roku wyróżnia się dwa progi podatkowe. Dochody poniżej 120000 zł rocznie obłożono podatkiem w wysokości 17%, a powyżej tej kwoty 32%. Ponadto, kwota wolna od podatku wynosi 30000 zł rocznie.

Dodatkowo, w pierwszym i w drugim progu podatkowym odejmujemy tzw. *kwotę zmniejszającą podatek*, która wynosi 5100 zł (kwota ta wynika stąd: 30000 zł $\cdot\ 17\% = 5100$ zł).

Aby lepiej zrozumieć istotę kwoty pomniejszającej podatek, obliczymy (w modelu uproszczonym), ile podatku zapłaci osoba, która zarobiła w poprzednim roku 200000 zł.

Osoba wpada w drugi próg podatkowy, więc podatek jaki zapłaci wyniesie:

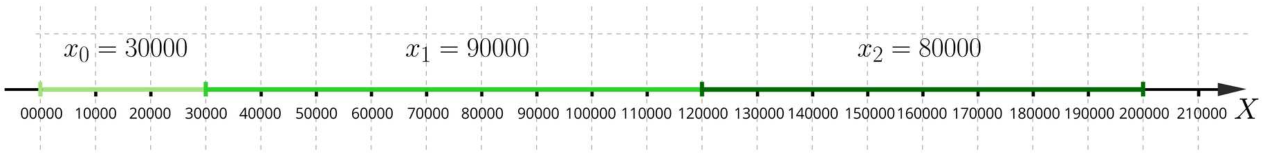
$120000 \cdot 0,17 - 5100 + (200000 - 120000) \cdot 0,32 = 20400 - 5100 + 25600 = 40900.$

Możemy obliczyć podatek również inaczej, dzieląc całkowity przychód na progi. Wtedy nie będzie trzeba odejmować kwoty zmniejszającej podatek.

Oznaczmy też dla ułatwienia kwotę całkowitą przychodu jako x, część nieopodatkowaną tej kwoty jako x_0, część wpadającą do pierwszego progu podatkowego jako x_1 oraz część wpadającą do drugiego progu podatkowego jako x_2.

Oczywiście zachodzi: $x = x_0 + x_1 + x_2$.

Wyobraźmy sobie 200000 zł jako oś, na której zaznaczamy cztery punkty: punkt początkowy 0, punkt 30000, punkt 120000 i punkt 200000. Dzielą one oś na trzy odcinki o długościach: 30000, 90000 i 80000. Odcinek pierwszy reprezentuje nieopodatkowaną część dochodu, odcinek drugi reprezentuje część dochodu opodatkowaną na 17%, a odcinek trzeci część opodatkowaną na 32%. Czyli zgodnie z naszymi oznaczeniami mamy trzy odcinki o następujących długościach:
$x_0 = 30000 - 0 = 30000$,
$x_1 = 120000 - 30000 = 90000$,
$x_2 = 200000 - 120000 = 80000$.



Jest to bardziej skomplikowany przypadek z Przykładu 2. Tutaj również korzystamy ze wzoru $P = \frac{p}{100}(D - K)$, przy czym różnica w nawiasie to nasze długości odcinków na osi. Zatem w warunkach naszego zadania wzór ten wygląda tak:

$P = \frac{p_0}{100} \cdot K + \frac{p_1}{100}(D_1 - K) + \frac{p_2}{100}(D_2 - (D_1 - K) - K),$

przy czym P – to kwota należnego podatku,
$p_0 = 0$,
$p_1 = 17$,
$p_2 = 32$,
$K = 30000$,
$D_1 = 120000$,
$D_2 = 200000$.

W takim modelu nie potrzeba odejmować kwoty zmniejszającej podatek. Prześledźmy kolejne kroki rozwiązania.

1. Od kwoty 30000 zł osoba ta nie zapłaci podatku.
2. W pierwszym progu mamy do rozliczenia 90000 zł – jest to drugi odcinek na osi. Zatem
   90000 zł $\cdot\ 17\% = 15300$ zł
3. Reszta kwoty rozliczana jest w drugim progu podatkowym bez dodatkowych ulg.
   80000 zł $\cdot\ 32\% = 25600$ zł

Zatem osoba zapłaci 0 zł $+\ 15300$ zł $+\ 25600$ zł $= 40900$ zł podatku.

Lub też, korzystając ze wzoru:

$$P = \frac{0}{100} \cdot 30000 + \frac{17}{100}(120000 - 30000) + \frac{32}{100}(200000 - (120000 - 30000) - 30000) =$$

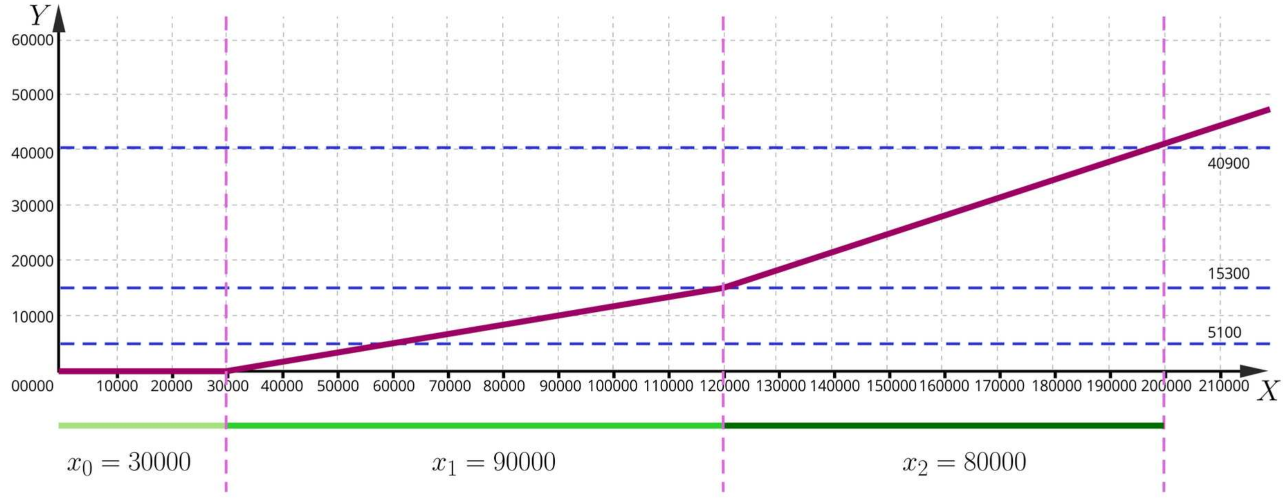
$$= 0 + \frac{17}{100} \cdot 90000 + \frac{32}{100} \cdot (200000 - 120000 + 30000 - 30000) =$$

$$= 0 + 15300 + \frac{32}{100} \cdot 80000 = 0 + 15300 + 25600 = 40900.$$

W rezultacie, jeśli przez x oznaczymy podstawę obliczenia podatku (wyrażoną w złotych), a przez $P(x)$ należny od niej podatek w roku 2022, to okaże się, iż funkcję $P(x)$ opisać możemy za pomocą poniższej tabeli.

Progi podatkowe (przychód całkowity) $[\text{zł}]$	**Naliczony podatek**	**Obliczenia**	**Kwota podatku** $[\text{zł}]$
0 – 30000	0%	$x_0 \cdot 0$	0
30000 – 120000	17%	$x_0 \cdot 0 + x_1 \cdot 0,17$	0 – 15300
120000 i wzwyż	32%	$x_0 \cdot 0 + x_1 \cdot 0,17 + x_2 \cdot 0,32$	$15300 + 0,32x_2$

Funkcja $P(x)$, mimo że sama nie jest funkcją liniową, to jednak w każdym z wypisanych wyżej przedziałów dana jest przez zależność liniową, a jej wykres złożony jest z dwóch odcinków i półprostej.



Powyższy wykres funkcji opisać możemy następującym układem równań:

$$\begin{cases} 0, & \text{dla } x < 30000 \\ 0,17 \cdot x - 5100, & \text{dla } 30000 \leqslant x < 120000. \\ 0,32 \cdot (x - 120000) - 15300, & \text{dla } \ x \geqslant 120000 \end{cases}$$

Jak możemy zauważyć, funkcja liniowa w tym przypadku rozbija się na trzy przedziały. Zatem im bardziej złożony problem, tym bardziej złożony nasz model.

Przykład 4

Korzystając z tabelki z przykładu 3, obliczymy, ile wynosi w roku 2022 w Polsce należny podatek od podstawy obliczenia podatku równej 36789 zł.

Rozwiązanie:

Liczba 36789 jest mniejsza od 120000 i większa od 30000, zatem wpada do pierwszego progu podatkowego. Rozbijmy więc odpowiednio kwotę przychodu.

$x = x_0 + x_1 = 30000 + 6789$

Zatem wiemy już, że opodatkowana kwota to $x_1 = 6789$.

Obliczmy teraz jak opodatkowanie przedstawia się w całości.

W ogólności mamy:

$P(x) = P(x_0 + x_1) = 0 \cdot x_0 + 0,17 \cdot x_1.$

Podstawmy do powyższego równania dane z zadania.

$P(36789) = P(30000 + 6789) = 0 \cdot 30000 + 0,17 \cdot 6789 = 0 + 1154,13 = 1154,13$

Odpowiedź: Należny podatek wynosi $1154,13$ zł.

Słownik

współczynnik proporcjonalności

stała $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ będąca ilorazem dwóch zmiennych x i y, o których mówi się, że są wprost proporcjonalne lub że zachodzi między nimi proporcjonalność prosta, co zapisujemy następująco

$$a = \frac{y}{x}$$

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Uwaga! Pytania związane z podatkiem dotyczą systemu podatkowego z przykładu 3 z sekcji „Przeczytaj”.

Test

Zastosowania funkcji liniowej

Liczba pytań:

5

Limit czasu:

15 min

Twój ostatni wynik:

-

Trwa wczytywanie…

Polecenie 2

Wioślarz, płynąc ze stałą prędkością z prądem rzeki, przebył drogę z punktu A do punktu B w czasie 1 godziny. Podróż powrotna zajęła mu $1,5$ godziny. Znajdź stosunek prędkości wioślarza (względem wody w rzece) do szybkości nurtu rzecznego.

Polecenie 3

Jeden stop zawiera złoto z miedzią w stosunku $2:3$, a drugi w stosunku $2:1$. Ile należy wziąć każdego stopu, aby otrzymać 32 g stopu, w którym stosunek złota do miedzi będzie równy $1:1$?

Polecenie 4

W pewnym państwie kwota wolna od podatku wynosi 3600 € rocznie, a podatek jest równy 15%. Reformatorzy proponują, aby kwotę wolną od podatku znieść, a podatek obniżyć do 10%.

a) Określ funkcje f oraz g, które miesięcznym zarobkom w wysokości x € przypisują roczny podatek (wyrażony w euro) odpowiednio w systemie zreformowanym i niezreformowanym.

b) Naszkicuj wykresy funkcji f oraz g w przedziale $\langle 0, 1000\rangle$.

c) Oblicz, ile trzeba miesięcznie zarabiać, by po reformie płacić niższy podatek.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Złotnik ma dwa stopy złota ze srebrem, jeden próby 400, a drugi próby 300. Ile musi wziąć każdego ze stopów, aby otrzymać 40 g stopu próby $312,5$?

Ważne!

Próba jubilerska to zawartość złota w stopie z innymi metalami wyrażona w odniesieniu do 1000 jednostek stopu, np. próba 960 oznacza, że stop zawiera 96% czystego złota.

Ćwiczenie 6

W porannym konkursie telewizyjnym występują dwuosobowe drużyny kucharzy amatorów. W drużynie A jest dwóch aktorów, z których każdy obiera 50 ziemniaków na godzinę. Drużyna B składa się z dwóch dziennikarzy, z których jeden obiera 60 ziemniaków na godzinę, a drugi – 42. W konkursie trzeba w jak najkrótszym czasie obrać 100 ziemniaków. Kto wygra konkurs, jeśli:

a) zawodnicy każdej drużyny mogą jednocześnie obierać ziemniaki;

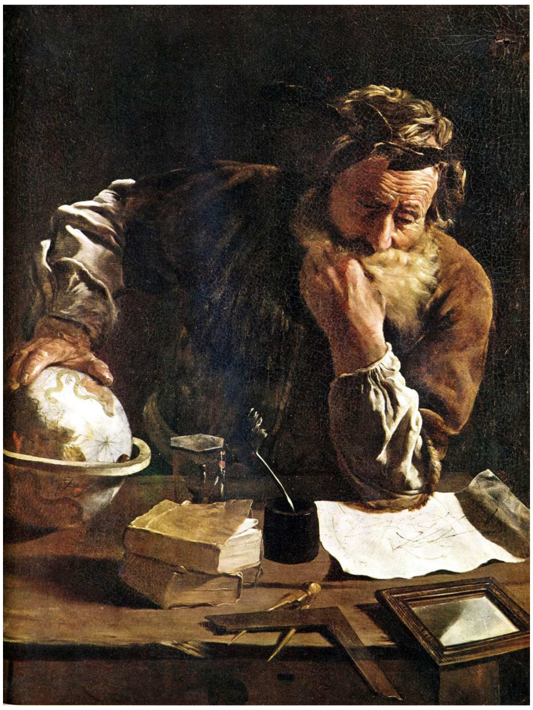
b) każdy zawodnik obiera po 50 ziemniaków, przy czym drugi zawodnik drużyny zaczyna obierać ziemniaki dopiero od momentu, gdy pierwszy z zawodników tej drużyny skończył obierać swoje 50 ziemniaków?

Ćwiczenie 7

Do jednego wypełnionego do połowy wodą sześciennego pojemnika o polu podstawy $1000\ \mathrm{cm}^2$ włożono kilogram złota o gęstości $19,3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, a do drugiego, takiego samego włożono kilogram srebra o gęstości $10,5\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Oblicz, o ile centymetrów podniósł się poziom wody w obu przypadkach.

Ćwiczenie 8

Według anegdoty Archimedes został poproszony przez władcę Syrakuz o sprawdzenie, czy jego korona została istotnie w całości wykonana ze złota, czy też raczej ze stopu srebra ze złotem. Archimedes miał dokonać pomiaru w następujący sposób: Najpierw zanurzył w naczyniu z wodą koronę i zaznaczył poziom wody. Następnie wyjął koronę i zanurzył w wodzie pewną ilość czystego złota ważącego dokładnie tyle co korona. Różnica poziomów okazała się na tyle wyraźna, że złotnik został oskarżony o oszustwo. Gdyby bowiem korona była w istocie wykonana z czystego złota, to miałaby tę samą objętość, co włożone po niej do wody złoto, a w konsekwencji w obu przypadkach woda podniosłaby się do tego samego poziomu. Przyjmij, że korona ważyła około $1\ \mathrm{kg}$ i miała średnicę $20\ \mathrm{cm}$. Załóż też, że stop, z którego ją wykonano, zawierał co najmniej 30% złota. Jaka powinna być dokładność pomiaru poziomu wody w odpowiednim naczyniu, by można było odróżnić koronę „fałszywą" od wykonanej z czystego złota? Czy anegdota jest prawdopodobna?



Źródło: dostępny w internecie: www.wikipedia.org, domena publiczna.

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowania funkcji liniowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje różne zastosowania funkcji liniowej,
- używa funkcji liniowej do matematycznego modelowania rzeczywistości,
- porównuje ze sobą parametry mierzone za pomocą dwóch różnych funkcji liniowych opisujących jeden problem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel przedstawia uczniom temat i wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
- Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane funkcją liniową.

Faza realizacyjna:

- Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
- Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia nr 1‑7 w sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej ‑ role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem ‑ procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

- Uczniowie indywidualnie rozwiązują test samosprawdzający.
- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują polecenia znajdujące się w sekcji „Test samosprawdzający”.

Materiały pomocnicze:

- Przykłady zastosowania funkcji liniowej. Część I
- Przykłady zastosowania funkcji liniowej. Część II

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać test samosprawdzający na lekcji poświęconej zastosowaniom wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z kontekstem realistycznym.