



Kąty między odcinkami w czwororościanie

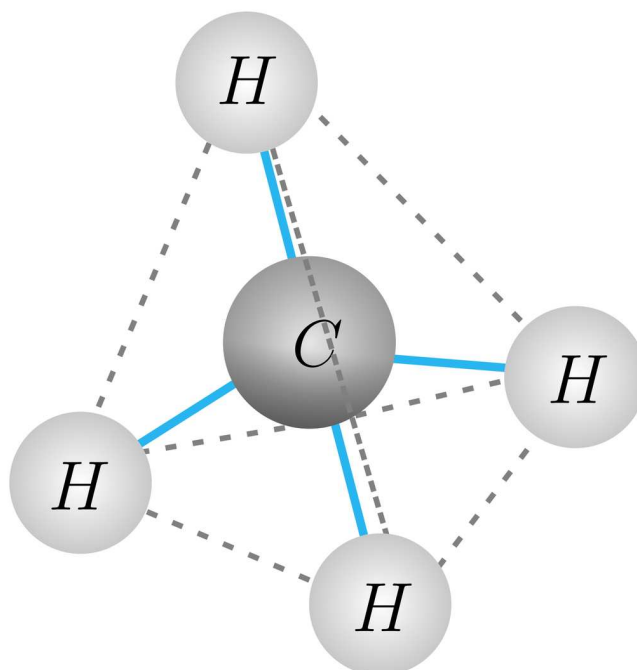
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kąty między odcinkami w czworościanie

Źródło: Ying Chih, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Nie tylko matematyków interesują miary kątów w czworościanie. Wiadomo, że cząsteczka metanu CH_4 ma kształt czworościanu foremnego, w którym atomy wodoru znajdują się w wierzchołkach, a atom węgla znajduje się w punkcie przecięcia wysokości czworościanu foremnego.



Interesujące jest pytanie, jaki kąt tworzą wiązania atomowe pomiędzy atomem węgla i dwoma atomami wodoru?

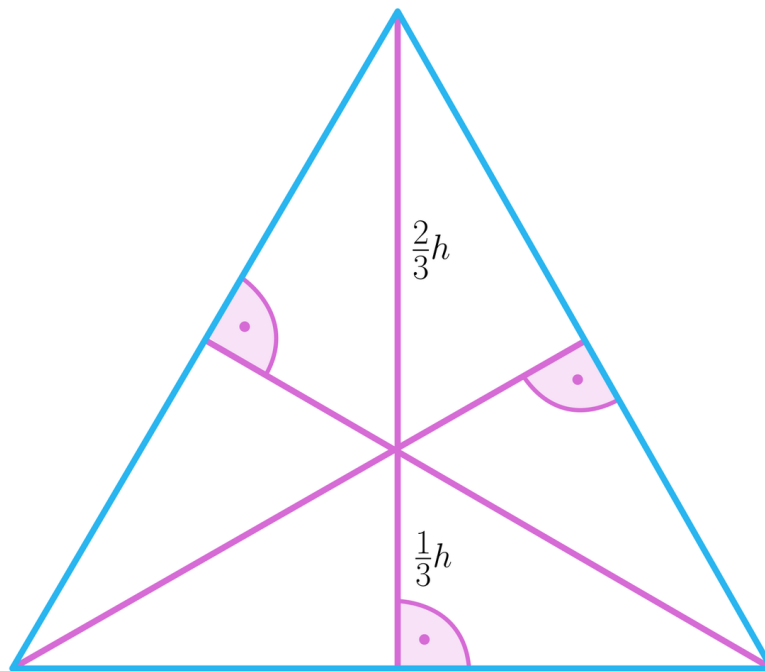
Twoje cele

- Obliczysz miary kątów pomiędzy odcinkami w czworościanie.
- Obliczysz objętości czworościanu.

Przeczytaj

Znasz już kąty pomiędzy odcinkami, pomiędzy odcinkiem i płaszczyzną oraz pomiędzy dwiema płaszczyznami w ostrosłupie. Poniżej przedstawimy przykłady wyznaczenia kątów pomiędzy odcinkami w [czworościanie](#).

Najpierw zajmiemy się **czworościanem foremnym**, czyli takim ostrosłupem, w którym podstawa i ściany boczne są trójkątami równobocznymi. Przypomnijmy, że wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Wysokości w tym trójkącie przecinają się w jednym punkcie, który dzieli wysokości w stosunku 2 : 1.



Przypomnijmy, że korzystając z twierdzenia Pitagorasa, można wyprowadzić wzór na wysokość czworościanu foremnego $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, gdzie a to długość krawędzi czworościanu.

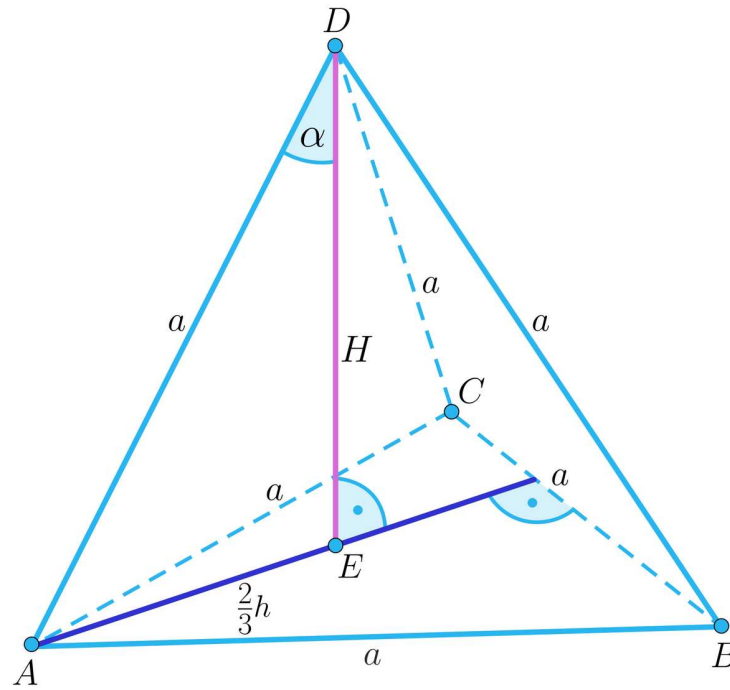
Jednym z pierwszych pytań, jakie można sobie zadać, jest pytanie o kąt pomiędzy krawędzią boczną a krawędzią podstawy lub kąt pomiędzy dwiema krawędziami bocznymi. Jednak w przypadku czworościanu jest to pytanie o kąty w trójkątach, które są ścianami bocznymi czworościanu. W szczególności w czworościanie foremnym mamy do czynienia z trójkątami równobocznymi, więc kąty te są równe 60° . Ciekawsze będą pytania o kąty pomiędzy krawędzią boczną a wysokością czworościanu, czy kąt pomiędzy wysokościami czworościanu.

Przykład 1

Wyznamy miarę kąta pomiędzy krawędzią boczną a wysokością czworościanu foremego.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku.



Wysokość czworościanu $ABCD$ wynosi $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ oraz wysokość podstawy ABC jest równa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ponadto $|AE| = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Kąt α jest kątem pomiędzy krawędzią boczną a wysokością czworościanu. Z trójkąta prostokątnego AED otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

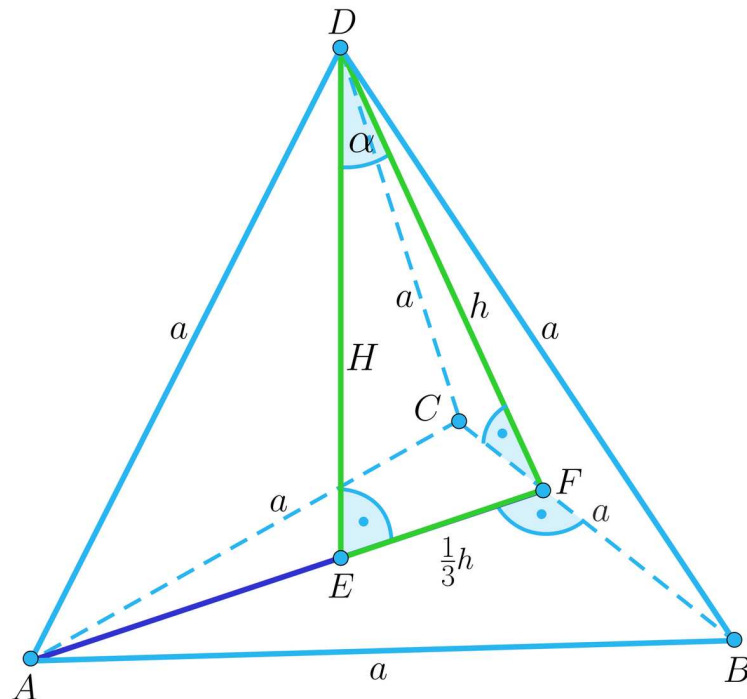
W tablicach wartości funkcji trygonometrycznych sprawdzamy, że $\alpha \approx 35^\circ$.

Przykład 2

Wyznamy cosinus kąta pomiędzy wysokością czworościanu foremego a wysokością ściany bocznej.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku.



Wysokość czworościanu $ABCD$ wynosi $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ oraz wysokość ściany $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Kąt α jest kątem pomiędzy wysokością ściany bocznej a wysokością czworościanu. Z trójkąta prostokątnego DEF otrzymujemy:

$$\cos \alpha = \frac{H}{h} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{18}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

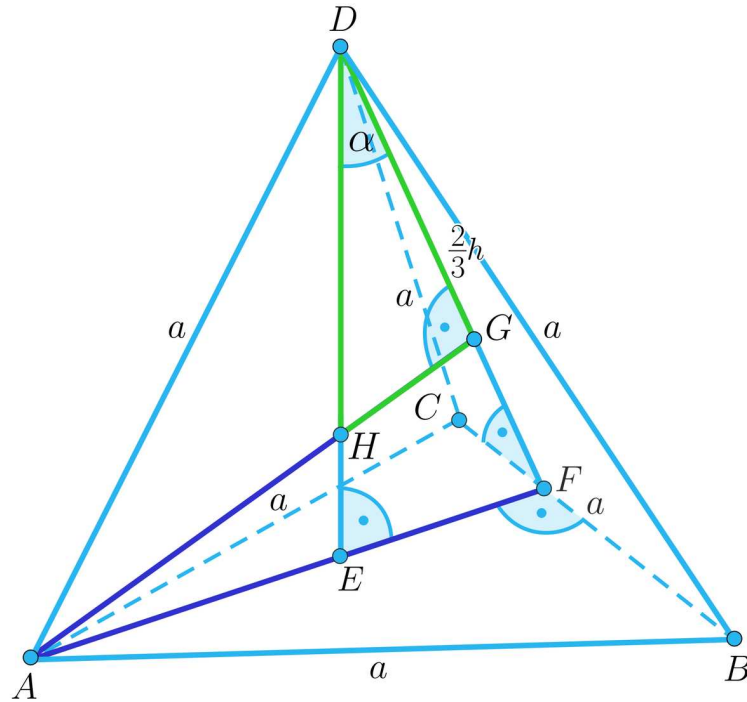
W czworościanie foremny wysokości przecinają się w jednym punkcie. Twierdzenie to nie jest prawdziwe dla dowolnego czworościanu (zastanów się nad przykładem czworościanu, którego wysokości nie przecinają się w jednym punkcie). Zanim przejdziemy do wyznaczenia miary kąta, jaki tworzą wysokości czworościanu foremnego (kąta utworzonego przez wiązania atomu węgla z atomami wodoru), obliczymy, w jakim stosunku punkt przecięcia wysokości dzieli te wysokości.

Przykład 3

Wyznamy stosunek, na jaki dzieli każdą z wysokości czworościanu foremnego punkt ich przecięcia.

Rozwiązanie

Poprowadźmy wysokości z wierzchołków A i D . Punkt przecięcia wysokości oznaczmy przez H .



Wiemy, że wysokość czworościanu wynosi $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, a wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Stąd $|DG| = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ponadto $\cos \alpha = \frac{H}{h} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Z trójkąta prostokątnego DGH otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|DG|}{|DH|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{|DH|},$$

czyli

$$|DH| = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Ponieważ

$$|EH| = |DE| - |DH| = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12},$$

więc

$$\frac{|DH|}{|EH|} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{12}} = 3.$$

Punkt przecięcia wysokości w czworościanie foremnym dzieli te wysokości w stosunku 3 : 1.

Ciekawostka

Stosunek, w jakim punkt przecięcia wysokości czworościanu foremnego dzieli każdą z nich, można wydedukować bez odwoływania się do trygonometrii. Czworościan foremny $ABCD$ dzielimy na cztery identyczne czworościany: $ABCH$, $ABDH$, $ACDH$

i $BCDH$. Objętość każdego z takich czworościanów jest równa jednej czwartej objętości czworościanu $ABCD$. Ponieważ podstawami wszystkich czterech czworościanów są przystające trójkąty, więc wysokość czworościanów $ABCH$, $ABDH$, $ACDH$ i $BCDH$ jest równa jednej czwartej wysokości czworościanu $ABCD$. Stąd $|EH| = \frac{1}{4}H$ i $|DH| = \frac{3}{4}H$, czyli $|EH| = \frac{1}{3}|DH|$.

Ciekawostka

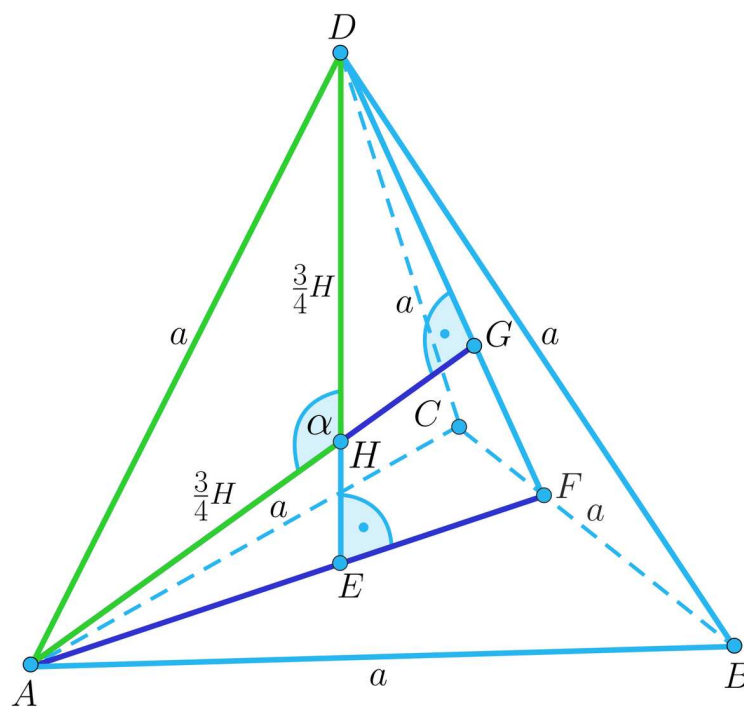
Jeśli w czworościan foremny wpisujemy kulę, to jej promieniem jest odcinek EH . Promieniem kuli opisanej na czworościanie foremnym jest odcinek DH .

Przykład 4

Dany jest czworościan foremny $ABCD$. Niech H będzie punktem przecięcia się wysokości tego czworościanu. Wyznamy miarę kąta AHD .

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku.



Ponieważ punkt przecięcia wysokości czworościanu dzieli je w stosunku 3 : 1, więc $|DH| = |AH| = \frac{3}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta ADH , otrzymujemy:

$$|AD|^2 = |AH|^2 + |DH|^2 - 2|AH| \cdot |DH| \cos \alpha$$

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 \cos \alpha$$

$$a^2 = \frac{3a^2}{8} + \frac{3a^2}{8} - 2 \cdot \frac{3a^2}{8} \cos \alpha$$

$$\frac{3a^2}{4} \cos \alpha = \frac{3a^2}{4} - a^2$$

$$\frac{3a^2}{4} \cos \alpha = -\frac{a^2}{4}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3}.$$

Sprawdzamy w tablicach funkcji trygonometrycznych, że $\sin(19,5^\circ) \approx \frac{1}{3}$, więc $\alpha \approx 90^\circ + 19,5^\circ = 109,5^\circ$.

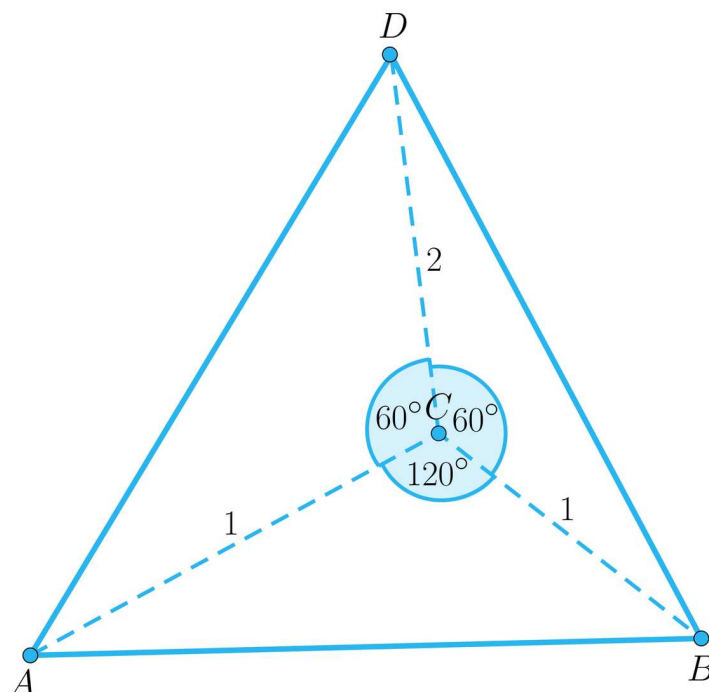
Obliczyliśmy – kąty między wiązaniami w cząsteczce metanu mają miarę około $109,5^\circ$.

Przykład 5

W czworościanie $ABCD$ dane są długości krawędzi $|AC| = 1$, $|BC| = 1$, $|CD| = 2$. Kąt płaski pomiędzy krawędzią AC i BC wynosi 120° . Natomiast kąty płaskie pomiędzy krawędziami BC i CD oraz AC i CD mają miarę 60° . Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego czworościanu.

Rozwiązanie

Sporządźmy rysunek pomocniczy do tego zadania.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACD :

$$|AD|^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 60^\circ = 3$$

$$|AD| = \sqrt{3}.$$

Ponieważ trójkąty ACD i BCD są przystające (cecha bkb), więc

$$|BD| = \sqrt{3}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC :

$$|AB|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 120^\circ = 3$$

$$|AB| = \sqrt{3}.$$

Wyznaczamy pola trójkątów:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{(\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, P_{\triangle ACD} = P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Pole całkowite wynosi:

$$P_c = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}.$$

Słownik

czworościan

ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt; każda z czterech ścian czworościanu może być uważana za jego podstawę

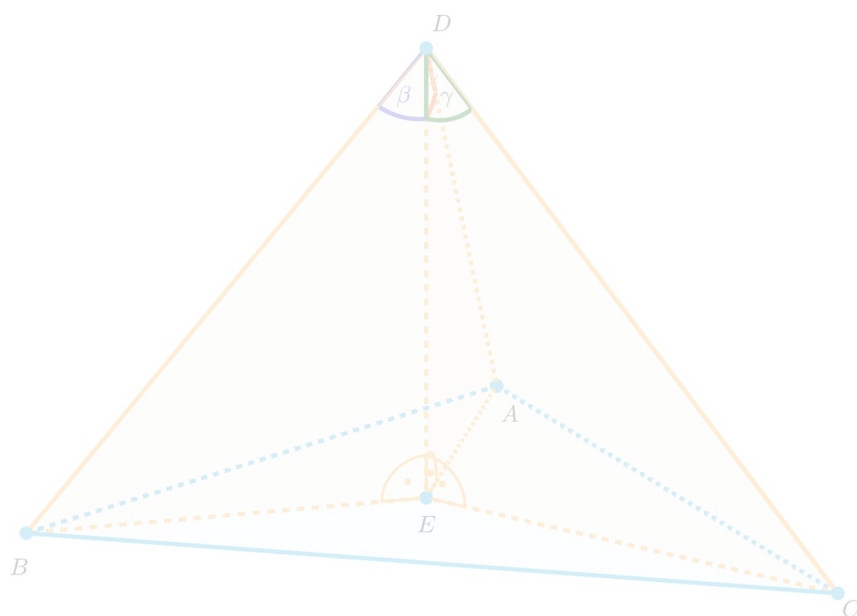
kąt płaski

część płaszczyzny ograniczonej dwiema półprostymi o wspólnym początku wraz z tymi półprostymi

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z apletem przedstawiającym czworościan. Przyjrzyj się uważnie kątom pomiędzy wysokością czworościanu a jego krawędziami. Oceń ich miary i zakres, z którego pochodzą. Poruszając myszką na ilustracji, możesz obserwować poszczególne kąty w czworościanie z różnej perspektywy. Zastanów się, jakimi funkcjami trygonometrycznymi zaznaczonych kątów można opisać zależności krawędzi bocznych od wysokości.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DE3ix7Wle>

Polecenie 2

Długość wysokości czworościanu $ABCD$ wynosi H . Kąty pomiędzy wysokością czworościanu ED a jego krawędziami AD , BD i CD mają miarę α , β i γ , odpowiednio. Wyznacz sumę odległości punktu E od wierzchołków trójkąta ABC .

Polecenie 3

W czworościanie $ABCD$ dane są długości jego krawędzi $|AD| = a$, $|BD| = b$ i $|CD| = c$. Kąty pomiędzy wysokością czworościanu ED a jego krawędziami AD , BD i CD mają miarę α , β i γ , odpowiednio. Uzasadnij, że

$$a \cos \alpha = b \cos \beta = c \cos \gamma.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij luki w tekście jednym z zamieszczonych określeń.

W czworościanie foremnym trzy kąty pomiędzy wysokością czworościanu a jego krawędziami mają miary.

W czworościanie, który nie jest foremny, trzy kąty pomiędzy wysokością czworościanu a jego krawędziami miary.

W czworościanie kąt pomiędzy wysokością czworościanu a krawędzią boczną ma miarę mniejszą od .

W czworościanie foremnym kąt pomiędzy krawędziami bocznymi ma miarę czworościan, w którym kąt pomiędzy krawędziami bocznymi jest kątem prostym.

różne

30°

równe

Istnieje

mogą mieć różne

mają równe

60°

mają różne

45°

Nie istnieje

90°

Ćwiczenie 2



Wpisz poprawną odpowiedź.

W czworościanie $ABCD$ krawędź boczna AD jest dwukrotnością wysokości DE .

Kąt α pomiędzy wysokością DE , a krawędzią boczną AD wynosi $^\circ$.

Ćwiczenie 3



W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym długość krawędzi podstawy wynosi 3. Krawędzie boczne tego czworościanu mają długość 2. Jakie miary mają kąty pomiędzy wysokością czworościanu a krawędziami bocznymi ?

Ćwiczenie 4



Czy istnieje czworościan, którego trzy kąty pomiędzy krawędziami bocznymi mają odpowiednio miary 119° , 120° i 121° ?

Ćwiczenie 5



W czworościanie $ABCD$ krawędź AD jest prostopadła do krawędzi AB i AC . Wiedząc, że krawędzie AB , AC , AD i BC mają taką samą długość, wyznacz kąt pomiędzy krawędziami BD i CD .

Ćwiczenie 6



Objętość czworościanu $ABCD$ jest równa V , a pole jego podstawy ABC wynosi P . Kąty pomiędzy wysokością czworościanu ED a jego krawędziami AD , BD i CD mają miarę α , β i γ , odpowiednio. Suma długości krawędzi bocznych tego czworościanu wynosi:

☐ $\frac{V}{3P}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$

☐ $\frac{3V}{P} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \frac{1}{\cos \gamma} \right)$

☐ $\frac{3V}{P}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$

Ćwiczenie 7



W czworościanie $ABCD$ o podstawie ABC dane są długości krawędzi $|AC| = a$, $|BC| = b$ i $|CD| = c$. Wyznacz, dla jakiego kąta pomiędzy krawędziami AC i BC oraz kąta pomiędzy krawędzią CD a wysokością czworościanu objętość tego czworościanu będzie największa. Oblicz tę objętość.

Ćwiczenie 8



Dany jest czworościan foremny $ABCD$. Niech E będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D , a punkt F środkiem odcinka AD . Wyznacz sinus kąta AFE .

Dla nauczyciela

Autor: Adrian Karpowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty pomiędzy odcinkami w czworościanie.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastopach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje kąty pomiędzy odcinkami w czworościanie,
- oblicza miary kątów pomiędzy odcinkami w czworościanie z zastosowaniem Twierdzenia Pitagorasa, własności trójkąta równobocznego, funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, Twierdzenia cosinusów oraz Twierdzenia sinusów,
- stosuje własności czworościanu foremnego,
- analizuje różnice pomiędzy czworościanem foremnym a czworościanem, który nie jest foremny,
- oblicza objętość czworościanu z zastosowaniem trygonometrii.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca,
- burza mózgów,
- pokaz.

Formy pracy:

- praca w parach,
- praca indywidualna,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji:**Faza przed lekcją:**

1. Przed lekcją uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji Przeczytaj. Zapisują swoje uwagi do tekstu.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prowadzi rozmowę z uczniami na temat materiału zamieszczonego w sekcji Przeczytaj.
2. Zostają wyjaśnione wszelkie wątpliwości, jakie pojawiły się podczas lektury tego tekstu. Nauczyciel tak prowadzi rozmowę, aby uczniowie nawzajem wyjaśniali sobie swoje wątpliwości.

Faza realizacji:

1. Nauczyciel prezentuje aplet z GeoGebry, w którym przedstawione są kąty pomiędzy wysokością a krawędzią boczną czworościanu. Uczniowie zastanawiają się w parach nad rozwiązaniem Polecenia 2 i Polecenia 3. Wybrane osoby prezentują rozwiązania.
2. Uczniowie samodzielnie wykonują zadanie 1-3. Następnie na forum klasy są omawiane rozwiązania.
3. Cała klasa zastanawia się nad rozwiązaniem zadania 7 i 8. Pomysły prezentowane są na forum klasy. Przedstawione zostają rozwiązania tych zadań

Faza podsumowująca:

1. Podsumowanie tematu lekcji. Omówienie ewentualnych pytań dotyczących omawianego materiału.

Praca domowa:

Rozwiązać ćwiczenia 4-6 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Czworóścian foremny
- Kąty pomiędzy płaszczyznami i prostymi oraz pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym

Wskazówki metodyczne:

Aplet może być wykorzystany podczas omawiania budowy i własności ostrosłupów.