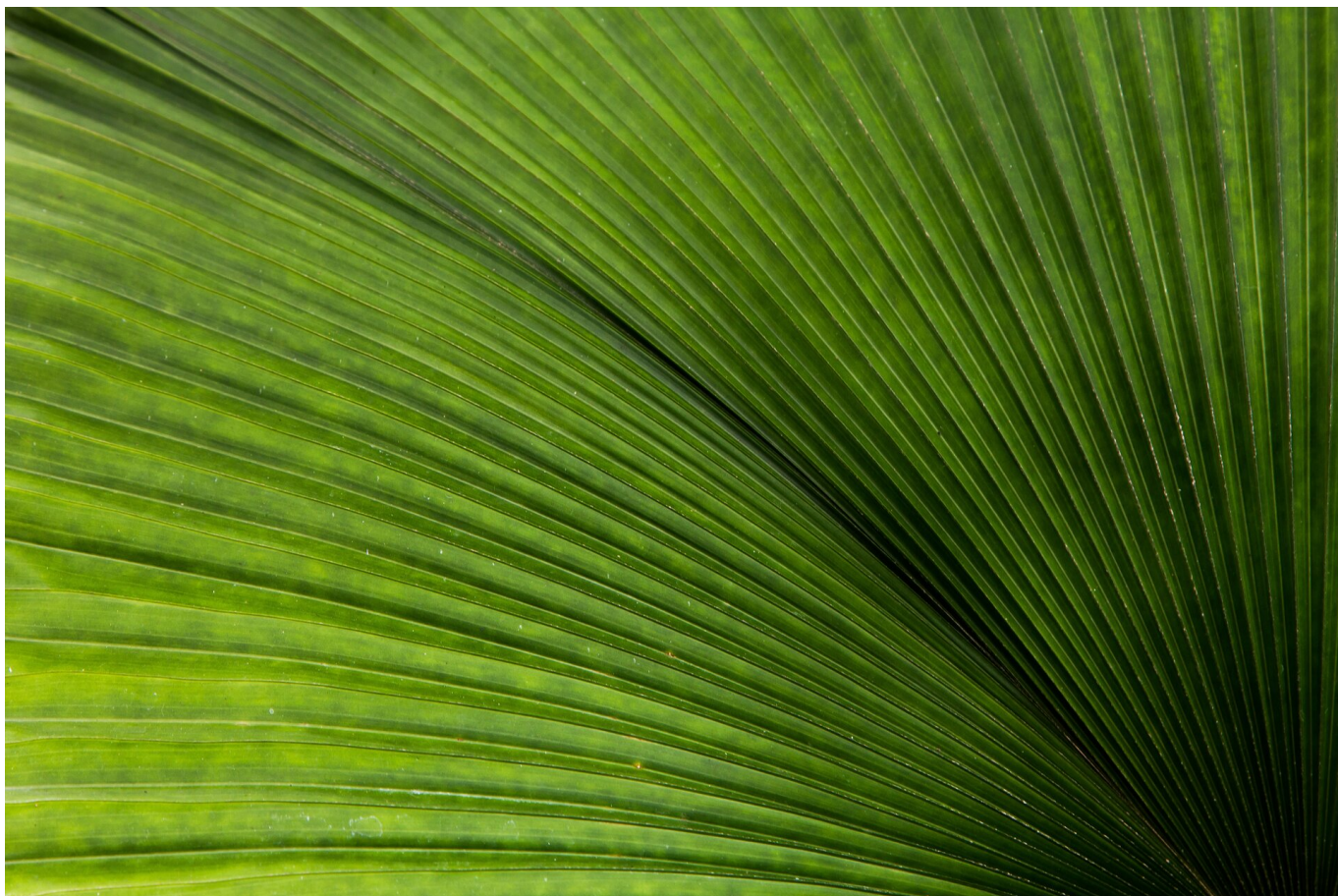
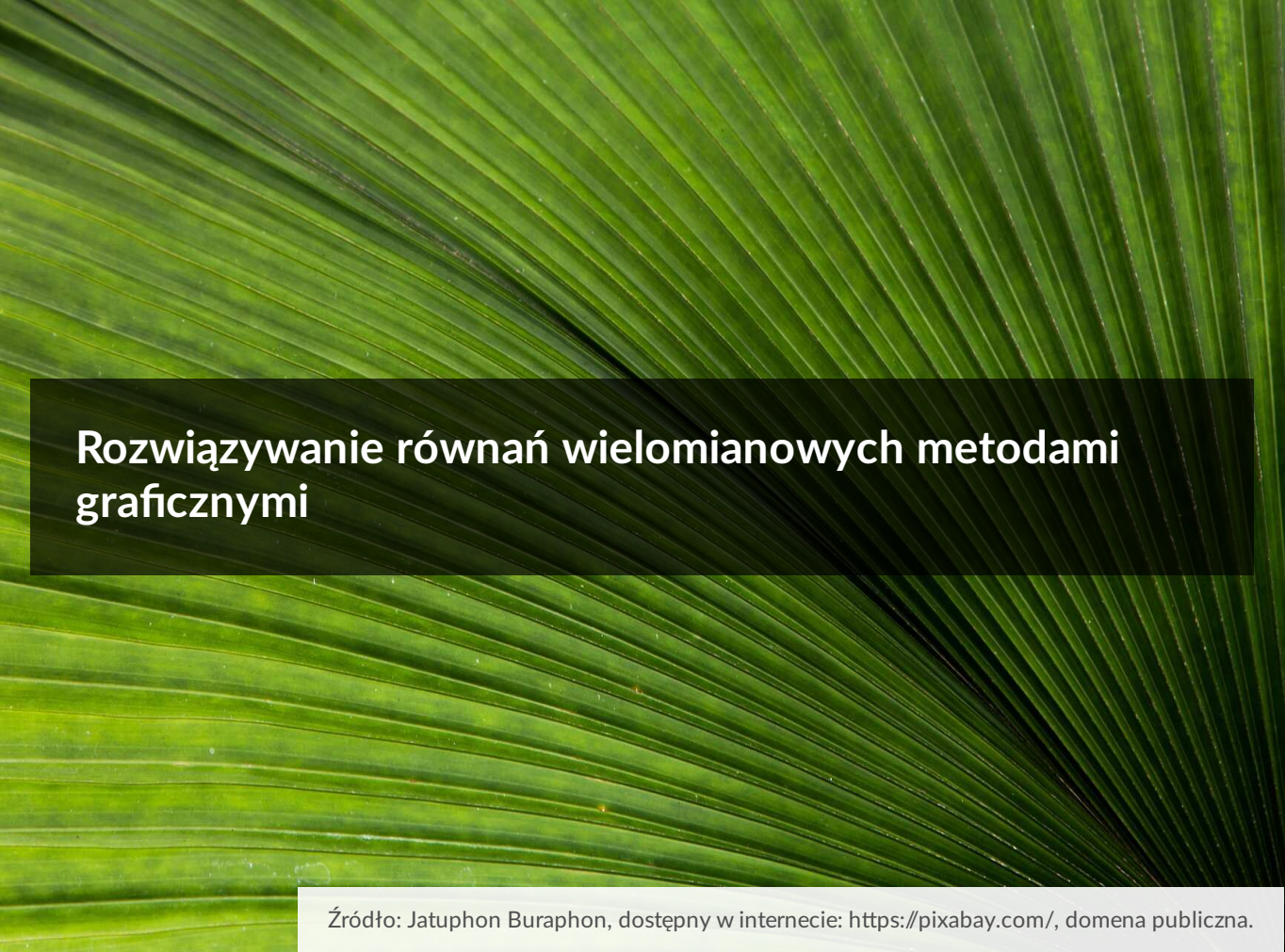




Rozwiązywanie równań wielomianowych metodami graficznymi

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie równań wielomianowych metodami graficznymi

Źródło: Jatuphon Buraphon, dostępny w internecie: <https://pixabay.com/>, domena publiczna.

W tym materiale będziemy rozwiązywać równania wielomianowe metodą graficzną. Wykorzystamy wykresy funkcji liniowych i kwadratowych oraz funkcji wyższych stopni do odczytywania liczby rozwiązań równania oraz współrzędnych punktów wspólnych wykresów funkcji.

Twoje cele

- Wykorzystasz wykresy funkcji liniowych i kwadratowych oraz funkcji wyższych stopni do graficznego rozwiązywania równań.
- Odczytasz z wykresu liczbę punktów wspólnych wykresów funkcji.
- Odczytasz z wykresu współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji wielomianowych.

Przeczytaj

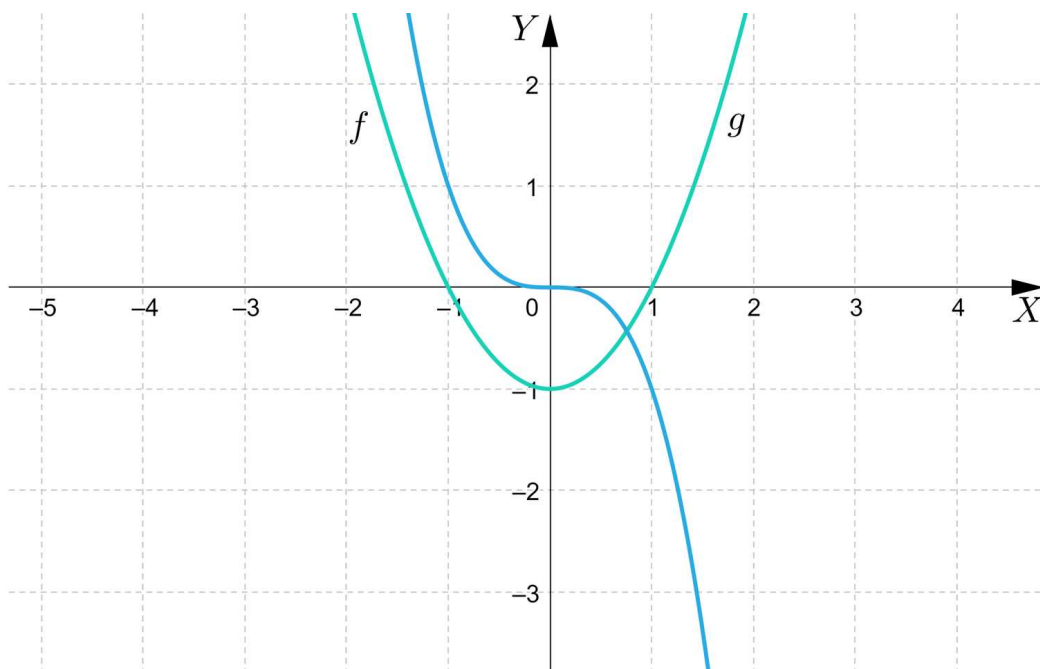
Aby określić liczbę rozwiązań równania wielomianowego, można w jednym układzie współrzędnych narysować wykresy funkcji, których wzory odpowiadają wyrażeniom znajdującym się z lewej i z prawej strony równania oraz określić w ilu punktach przecinają się te wykresy. Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta. Aby narysować wykres funkcji liniowej można wykorzystać tabelę. W górnym wierszu umieszczamy minimum dwa, dowolnie wybrane argumenty x . W dolnym wierszu, korzystając ze wzoru funkcji, zapisujemy wartość funkcji dla danego argumentu. Zaznaczamy w układzie współrzędnych otrzymane punkty i łączymy je linią prostą.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Aby naszkicować parabolę, wygodnie jest obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli oraz miejsca zerowe odpowiedniej funkcji (jeżeli istnieją). Do wyznaczenia charakterystycznych punktów można również posłużyć się tabelką. Wykresy bardziej skomplikowanych funkcji wyższych stopni możemy narysować posługując się programami komputerowymi.

Przykład 1

Korzystając z interpretacji graficznej, określimy liczbę rozwiązań równania

$$x^2 - 1 = -x^3.$$



W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 1$ oraz $g(x) = -x^3$.

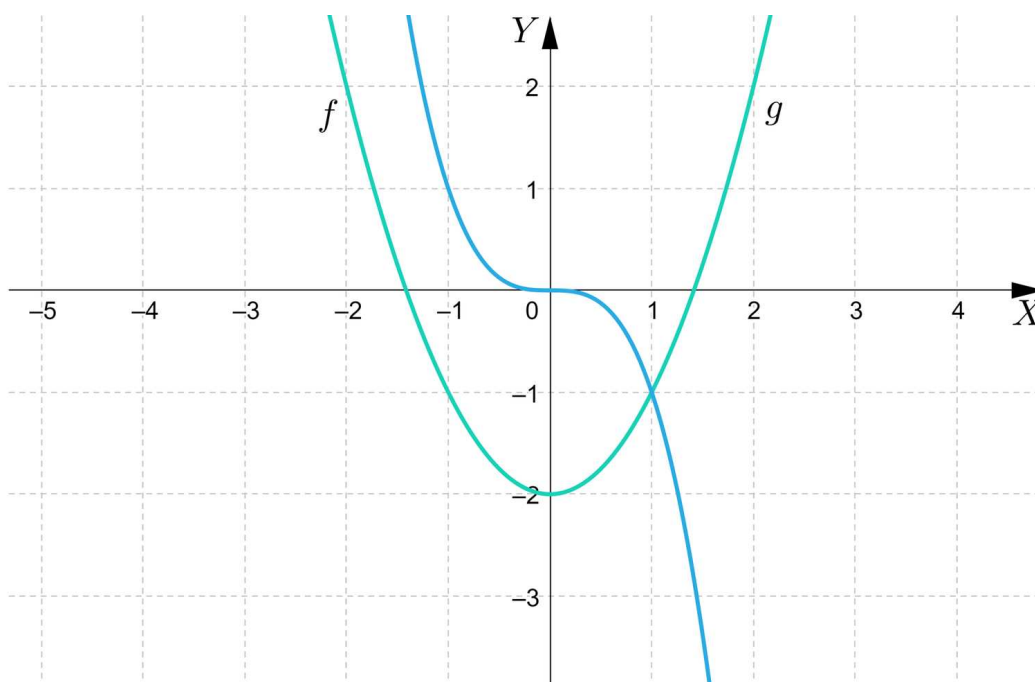
Wykresy tych funkcji przecinają się co najmniej w jednym punkcie, zatem równanie

$x^2 - 1 = -x^3$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Przykład 2

Korzystając z interpretacji graficznej, rozwiążemy równanie

$$x^2 - 2 = -x^3.$$



W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 2$ oraz $g(x) = -x^3$.

Wykresy funkcji przecinają się w punkcie o współrzędnych $(-1, 1)$.

Zatem jednym z rozwiązań równania $x^2 - 2 = -x^3$ jest $x = 1$.

Przykład 3

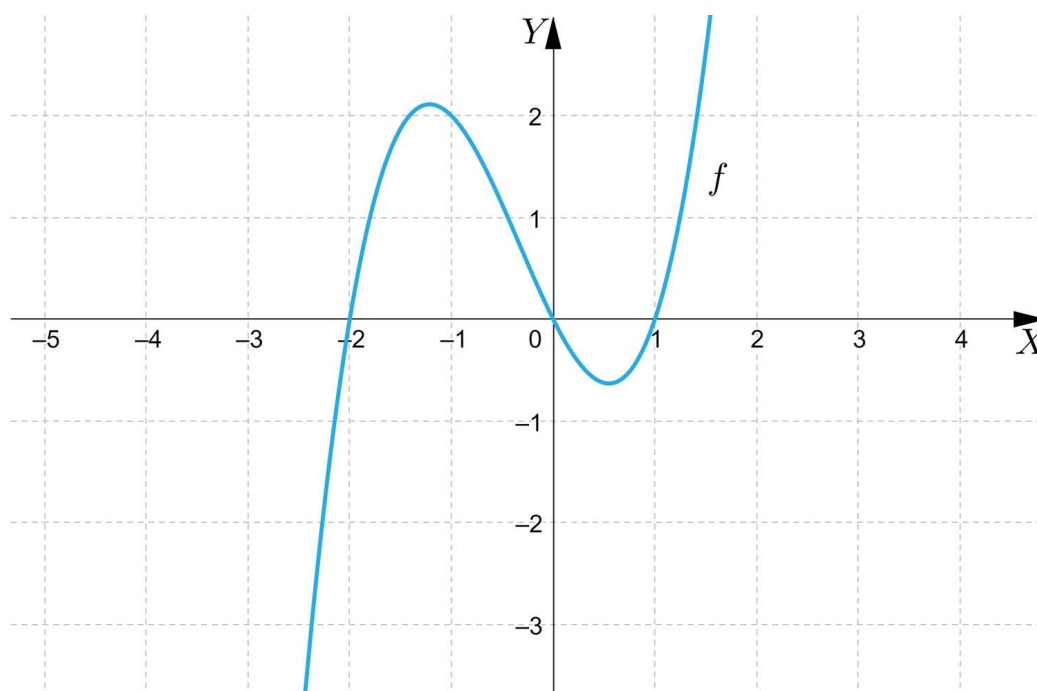
Określmy liczbę rozwiązań równania

$$(x + 2)x(x - 1) = 1.$$

W układzie współrzędnych narysujemy wykresy funkcji $f(x) = (x + 2)x(x - 1)$ oraz $g(x) = 1$.

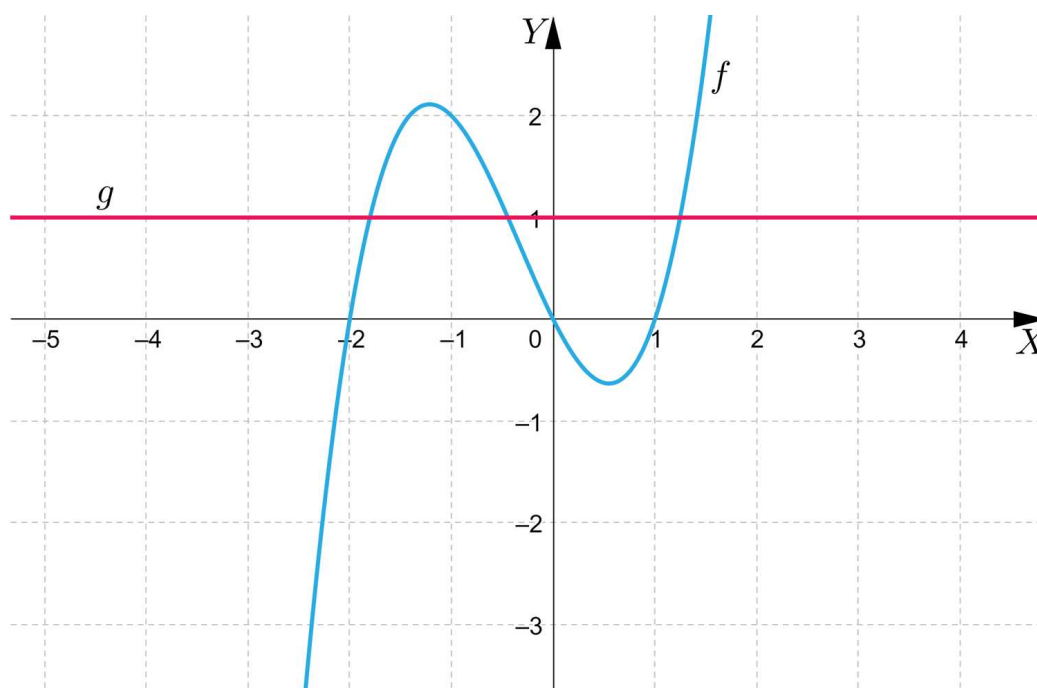
Funkcja $f(x) = (x + 2)x(x - 1)$ ma trzy miejsca zerowe $-2, 0, 1$. Każdy pierwiastek jest pojedynczy. Współczynnik przy najwyższej potęgze zmiennej x jest dodatni.

Dokładny wykres tej funkcji wielomianowej uzyskany za pomocą programu komputerowego wygląda następująco:



Przypomnijmy, że szkic wykresu funkcji wielomianowej ma kształt „wężyka”. Wykres ten spotyka się z osią X w punktach, które są pierwiastkami wielomianu. Jeśli pierwiastek jest nieparzystego stopnia, to wykres przechodzi na drugą stronę osi X , jeżeli natomiast pierwiastek jest parzystego stopnia to wykres „odbija się” od osi X . Ważne jest również, że jeżeli współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu jest dodatni, wówczas krzywą rysujemy od prawej strony kartki zaczynając od góry.

Interpretacja graficzna równania $(x + 2)x(x - 1) = 1$ wygląda następująco:



Zatem równanie ma trzy rozwiązania.

Przykład 4

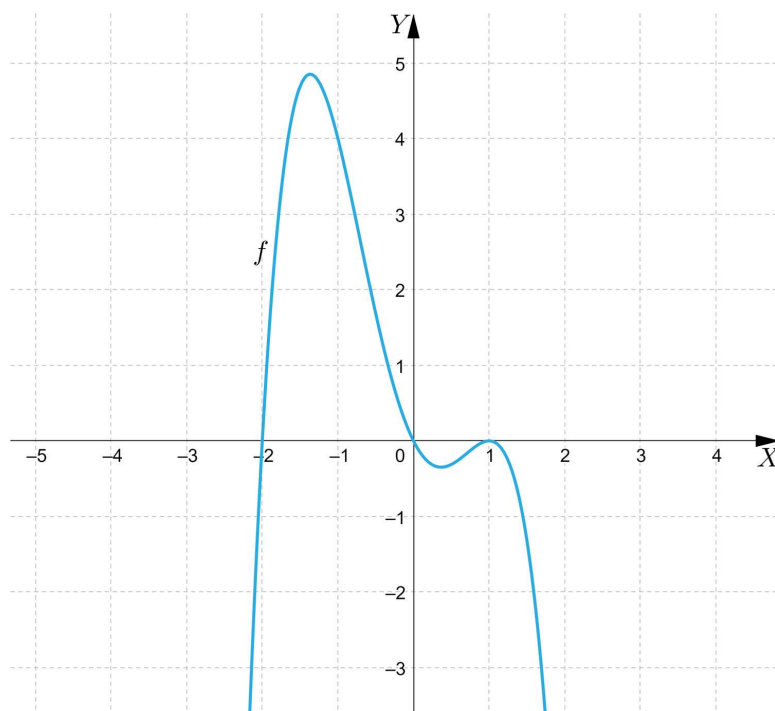
Określimy liczbę rozwiązań równania

$$-(x+2)x(x-1)^2 = 1.$$

W układzie współrzędnych narysujemy wykres funkcji $f(x) = -(x+2)x(x-1)^2$ oraz $g(x) = 1$.

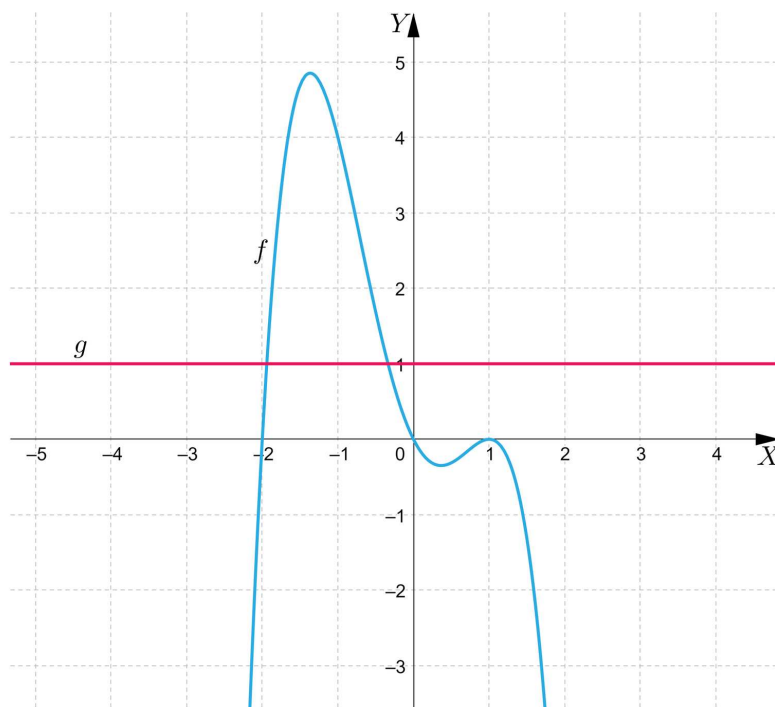
Funkcja $f(x) = -(x+2)x(x-1)^2$ ma trzy **miejsca zerowe** $-2, 0, 1$. Pierwiastki -2 i 0 są pojedyncze, pierwiastek 1 jest podwójny.

Dokładny wykres tej funkcji wielomianowej uzyskany za pomocą programu komputerowego wygląda następująco:



Ponieważ pierwiastek 1 jest parzystego stopnia to wykres „odbija się” od osi X . Ważne jest również, że współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu jest ujemny, zatem krzywą rysujemy od prawej strony kartki zaczynając od dołu.

Interpretacja graficzna równania $-(x+2)x(x-1)^2 = 1$ wygląda następująco:



Zatem równanie ma dwa rozwiązania.

Przykład 5

Obliczymy taką wartość parametru a oraz taką wartość parametru b , dla których poniższy rysunek przedstawia interpretację graficzną równania

$$(x - a)x(x + 1) = -x^3 + b.$$



W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji

$f(x) = (x - a)x(x + 1)$ oraz $g(x) = -x^3 + b$.

Z wykresu wynika, że funkcja $f(x) = (x - a)x(x + 1)$ ma trzy pojedyncze miejsca zerowe: $-1, 0, 1$. Ze wzoru funkcji zapisanego w postaci iloczynowej wynika, że funkcja f ma trzy miejsca zerowe $-1, 0, a$. Czyli $a = 1$.

Wykres funkcji wielomianowej trzeciego stopnia $g(x) = -x^3 + b$ przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$, zatem $b = 1$.

Słownik

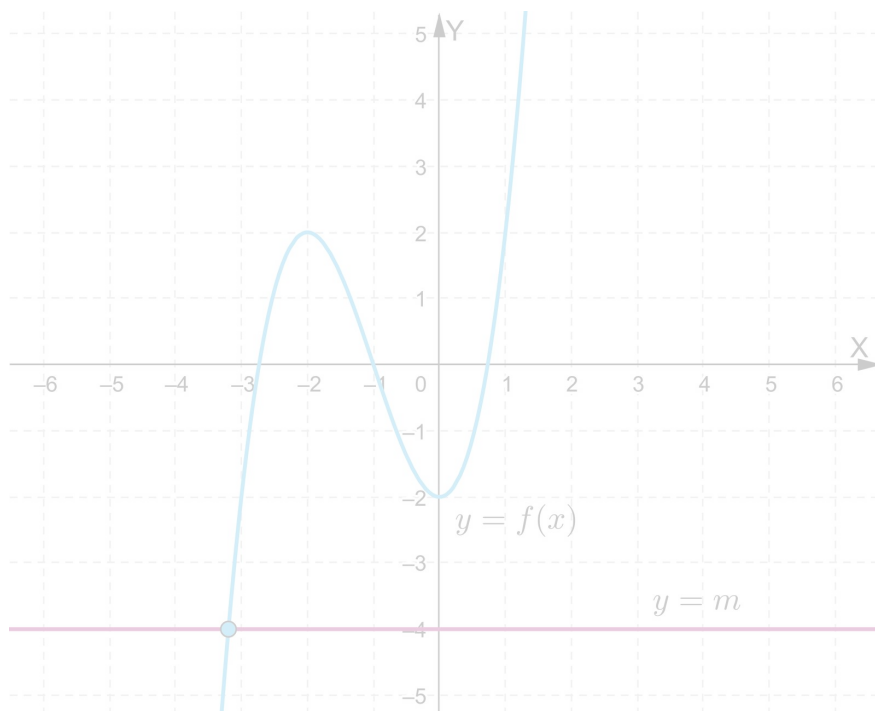
miejsce zerowe funkcji

taki argument x , dla którego wartość funkcji równa się zero

Aplet

Polecenie 1

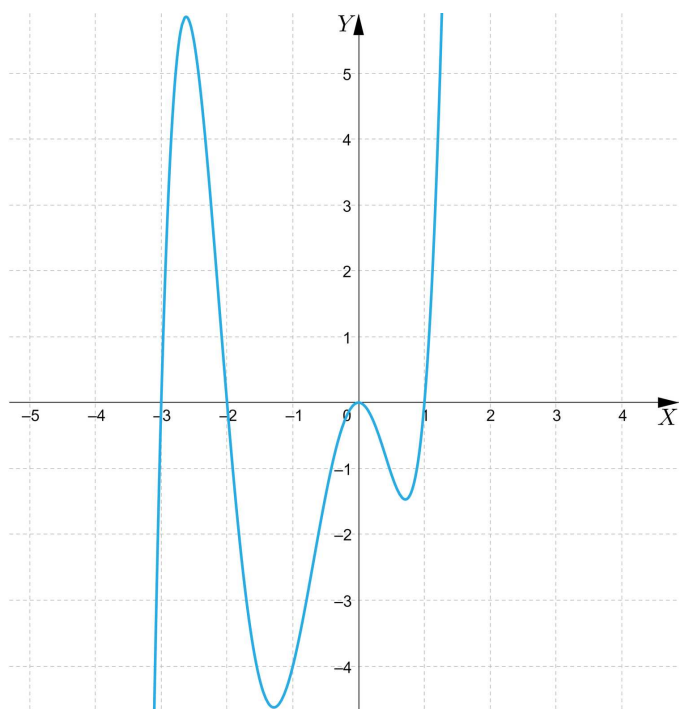
Obejrzyj aplet pokazujący sposób odczytywania z wykresu liczby rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DshhKJlbJ>

Polecenie 2

Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $(x - 1)x^2(x + 2)(x + 3) = m$ w zależności od parametru $m \in \mathbb{Z}$.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Nie istnieje taki całkowity parametr m , dla którego równanie ma 2 rozwiązania.

☐ Nie istnieje taki całkowity parametr m , dla którego równanie ma 4 rozwiązania.

☐ Dla $m = 0$ równanie ma 4 rozwiązania.

☐ Dla $m = 4$ równanie ma dwa rozwiązania.

☐ Dla $m = -3$ i $m = 3$ równanie ma tyle samo rozwiązań.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

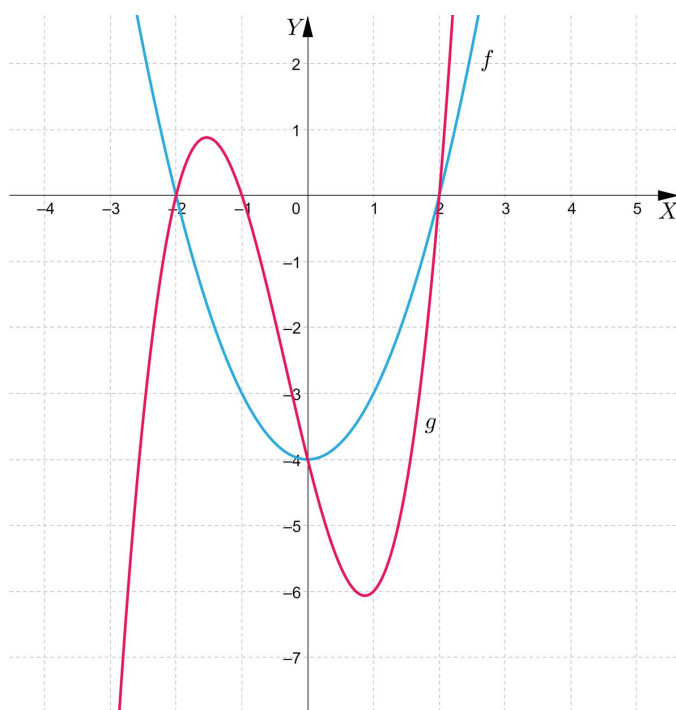
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Przeciągnij w wyznaczone miejsce taką sumę algebraiczną, aby rysunek przedstawiał interpretację graficzną poniższego równania.



$$(x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (\text{ }) = x^2 - 4$$

$$x - 1$$

$$x + 1$$

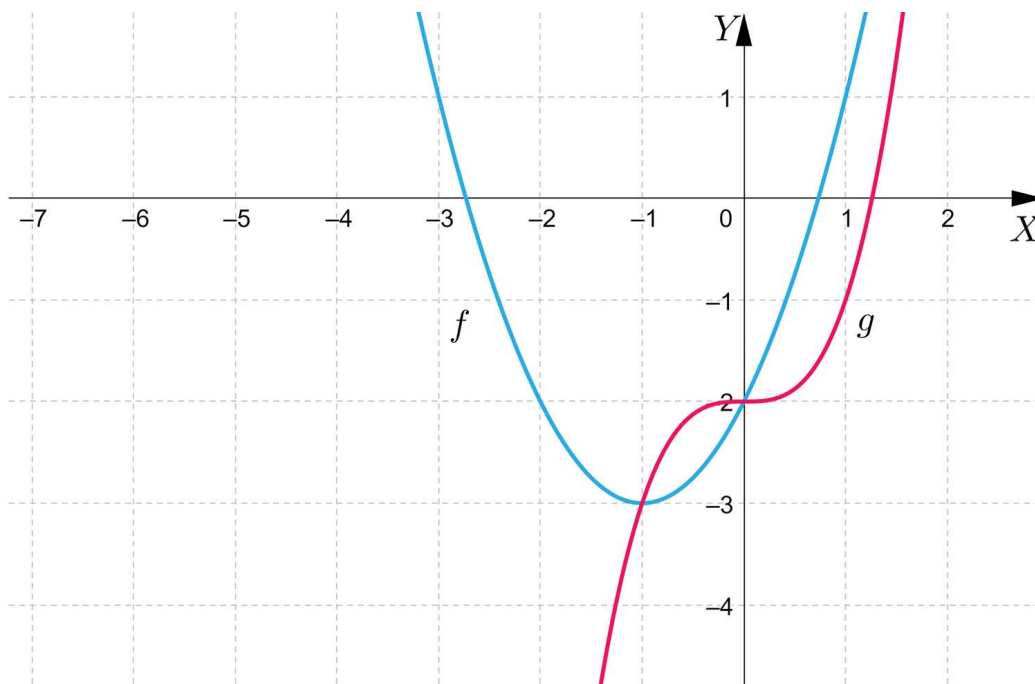
$$x + 2$$

$$x - 2$$

Ćwiczenie 3



Na poniższej ilustracji przedstawiona jest interpretacja graficzna równania wielomianowego.



Wybierz przedstawione równanie.

☐ $(x + 1)^2 - 3 = x^3 + 2$

☐ $(x + 1)^2 - 3 = x^3 - 2$

☐ $(x - 1)^2 - 3 = x^3 - 2$

☐ $(x + 1)^2 + 3 = x^3 - 2$

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Narysuj graficzną interpretację równania i zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $(x - 1)^2 - 1 = -x^3$ ma:

☐ 4 rozwiązania

☐ 1 rozwiązanie

☐ 2 rozwiązania

☐ 3 rozwiązania

Ćwiczenie 6



Rysunek przedstawia rozwiązanie graficzne pewnego równania.



Przeciągnij w wyznaczone miejsce odpowiednie wyrażenie, aby otrzymane równanie było tym, którego interpretację graficzną przedstawia rysunek.

$$(x - 1)^2 - 1 = (x - 1) \cdot x \cdot \boxed{}$$

$(x + 2)$

$(x + 1)$

$(x + 2)^2$

$(x + 2)^3$

Ćwiczenie 7



Dla jakiej wartości parametru a rozwiązaniem równania $x^2 + a = (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1)$ jest zbiór $\{-1, 1\}$? Wpisz prawidłową liczbę.

$$a = \boxed{}$$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż graficznie równanie $|x^2 - 4| = x^4 - 4x^2$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań wielomianowych metodami graficznymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wykresy funkcji liniowych i kwadratowych oraz funkcji wyższych stopni do graficznego rozwiązywania równań
- odczytuje z wykresu liczbę punktów wspólnych wykresów funkcji
- odczytuje z wykresu współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji wielomianowych
- analizuje podane warunki i buduje na ich podstawie rozwiązania równań wyższych stopni

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe pojęcia związane z równaniami kwadratowymi: pierwiastek równania, miejsce zerowe funkcji kwadratowej, wykres funkcji kwadratowej, postać kanoniczna funkcji kwadratowej.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi miejsc zerowych i wykresu funkcji kwadratowej, liniowej i funkcji trzeciego stopnia, które przypomnieli w domu.
2. Uczniowie łączą się w grupy 4 osobowe omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie oglądają aplet i analizują dyskusję liczby rozwiązań równania w zależności od parametru m .
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące graficznego rozwiązywania równań wielomianowych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2 z sekcji „Aplet”.

Materiały pomocnicze:

[Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet może być wykorzystany przez uczniów jako inspiracja do stworzenia prezentacji multimedialnej.