Okrąg wpisany w czworokąt

Źródło: Sonja Rieck Pixabaystä, domena publiczna.

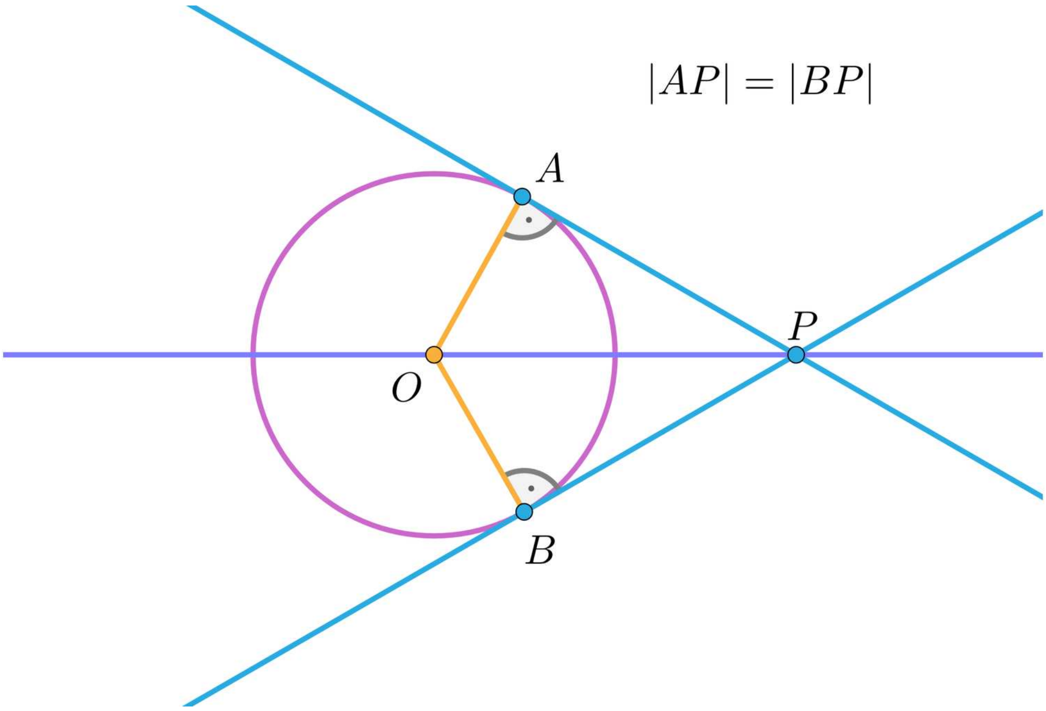
W każdy wielokąt foremny da się wpisać dokładnie jeden okrąg, czyli inaczej mówiąc, każdy wielokąt foremny jest opisany na pewnym okręgu. Podobnie w każdy trójkąt, także taki, który nie jest foremny, da się wpisać okrąg i okrąg ten jest wyznaczony jednoznacznie. Mówiąc o możliwości wpisania okręgu myślimy o takim okręgu, który jest styczny do każdego z boków danego wielokąta. W przypadku czworokątów istnienie okręgów wpisanych nie dotyczy wszystkich figur o czterech bokach – potrafimy na przykład wpisać okrąg w każdy romb, czy szerzej w każdy deltoid, ale nie da się tego zrobić w przypadku dowolnego równoległoboku niebędącego rombem. Kryterium, które pozwala rozstrzygnąć istnienie okręgu wpisanego w dany czworokąt jest prostą konsekwencją zasadniczego twierdzenia planimetrii.

Twoje cele

- Udowodnisz twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do danego okręgu z punktu P leżącego zewnątrz okręgu, wyznaczone przez punkt P i punkty styczności, są sobie równe. Oto zasadnicze twierdzenie planimetrii:



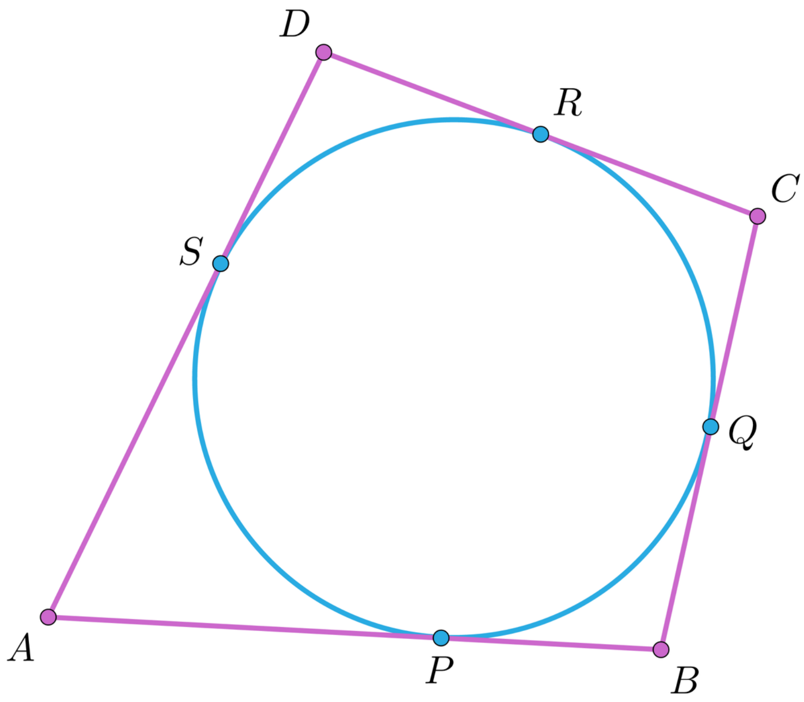
Powyższy fakt wykorzystamy dla dowodu poniższych dwóch twierdzeń, które podają warunki konieczne i wystarczające, by w dany czworokąt można było wpisać okrąg.

Twierdzenie: warunek konieczny, by czworokąt można było opisać na okręgu

Jeśli czworokąt jest opisany na okręgu, to sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są sobie równe.

Dowód

Rozważmy czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu. Niech punkty P, Q, R, S będą odpowiednimi punktami styczności okręgu i boków danego wielokąta, jak na rysunku.



Wtedy z twierdzenia o odcinkach stycznych mamy: $|AP| = |AS|$, $|BP| = |BQ|$, $|CQ| = |CR|$, $|DR| = |DS|$.

Ponieważ: $|AB| = |AP| + |BP|$, $|BC| = |BQ| + |CQ|$, $|CD| = |CR| + |DR|$ oraz $|AD| = |AS| + |DS|$, więc

$$|AB| + |CD| = (|AP| + |BP|) + (|CR| + |DR|) =$$

$$= (|AS| + |BQ|) + (|CQ| + |DS|) =$$

$$= (|BQ| + |CQ|) + (|AS| + |DS|) = |BC| + |AD|$$

Co należało udowodnić.

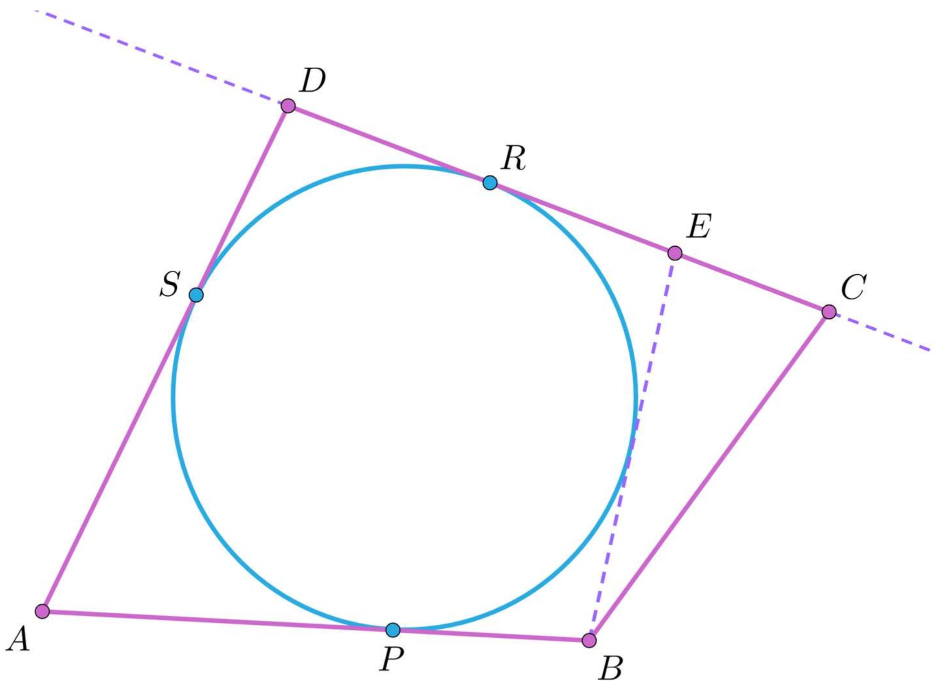
Twierdzenie: warunek wystarczający, by czworokąt można było opisać na okręgu

Jeżeli w czworokącie wypukłym sumy długości boków przeciwległych są sobie równe, to istnieje okrąg wpisany w ten czworokąt.

Dowód

Rozważmy czworokąt $ABCD$ spełniający warunek $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ i rozważmy okrąg styczny do boków AB, AD i CD – okrąg taki oczywiście istnieje, a jego środek jest jednoznacznie wyznaczony przez punkt przecięcia się dwusiecznych kątów BAD i ADC. Odpowiednie punkty styczności oznaczymy przez P, R, S.

Przypuśćmy, że bok BC nie jest styczny do tego okręgu. Wtedy można byłoby z punktu B poprowadzić styczną do danego okręgu, która wyznaczyłaby na prostej CD punkt E różny od punktu C (zapoznaj się z rysunkiem).



Jak widać na rysunku, dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy punkt E leży między punktami D i C (w przypadku, gdyby punkt C leżał między punktami D i E, dowód przebiegałby analogicznie). Z warunku koniecznego dla czworokąta $ABED$ opisanego na okręgu mielibyśmy, że $|AB| + |ED| = |BE| + |AD|$.

Ostatnia równość wraz założeniem pozwalają zapisać układ równań:

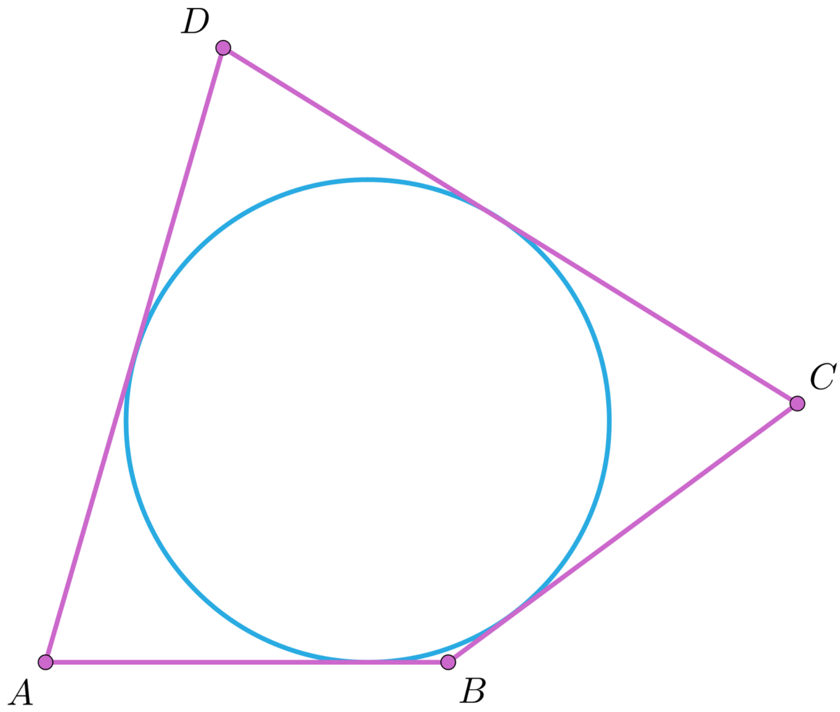
$$\begin{cases} |AB| + |CD| = |BC| + |AD| \\ |AB| + |ED| = |BE| + |AD| \end{cases}$$

Odejmując stronami równania układu mamy: $|CD| - |ED| = |BC| - |BE|$, czyli $|EC| = |BC| - |BE|$. Stąd $|EC| + |BE| = |BC|$.

Otrzymaliśmy równość sprzeczną z nierównością trójkąta, dla trójkąta BCE, co dowodzi, że nasze przypuszczenie, iż bok BC nie jest styczny do okręgu jest fałszywe. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Przykład 1

Rozważmy czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o średnicy 4, w którym $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$, jak na rysunku.

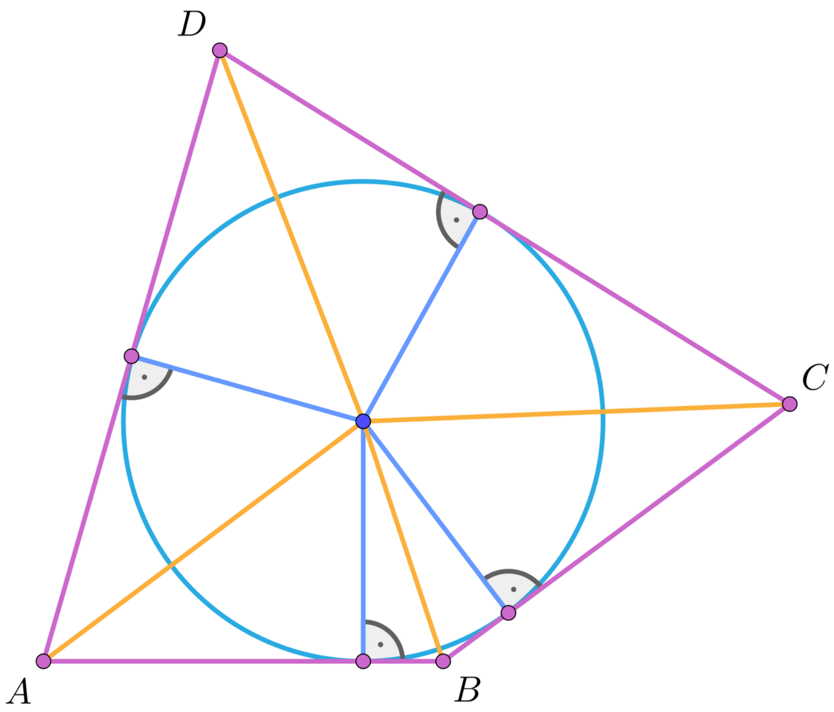


Obliczymy stosunek pola danego czworokąta do pola koła wpisanego w ten czworokąt.

Oczywiście pole P_K koła jest równe $P_K = 4\pi$.

Z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg wynika, że $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, czyli $4 + 5 = 3 + |AD|$. Stąd $|AD| = 6$.

Zauważmy, że prowadząc odcinki ze środka okręgu do wierzchołków czworokąta dokonamy jego podziału na trójkąty, których podstawy są bokami czworokąta, a wysokościami poprowadzonymi na te podstawy są promienie okręgu (koła) wpisanego, jak na rysunku.



Zatem pole czworokąta P_{ABCD} można wyrazić, jako sumę pól odpowiednich trójkątów, czyli $P_{ABCD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot r + \frac{1}{2}|BC| \cdot r + \frac{1}{2}|CD| \cdot r + \frac{1}{2}|AD| \cdot r =$

$= \frac{(|AB|+|BC|+|CD|+|AD|)\cdot r}{2}$.

Stąd $P_{ABCD} = \frac{(3+4+5+6)\cdot 2}{2} = 18$, a stosunek pól jest równy $\frac{P_{ABCD}}{P_K} = \frac{18}{4\pi} = \frac{9}{2\pi}$.

W przykładzie wykazaliśmy, że pole czworokąta opisanego na okręgu jest równe połowie obwodu tego czworokąta przez długość promienia okręgu wpisanego. Pozostaje zauważyć, że ta własność dotyczy każdego wielokąta wypukłego, w który można wpisać okrąg.

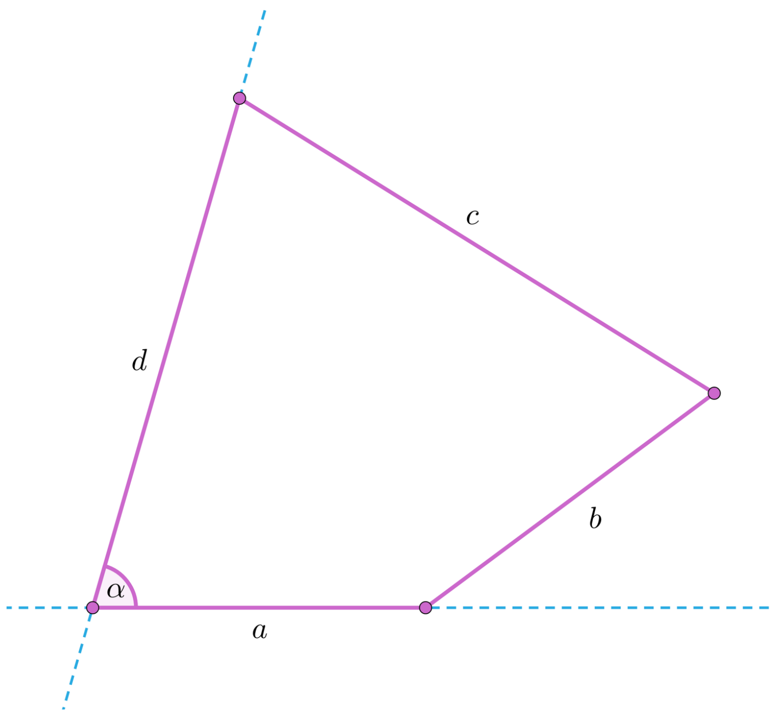
Przykład 2

Przejdźmy teraz do klasycznej geometrii, czyli geometrii cyrkla i linijki. Zajmiemy się konstrukcją czworokąta, który da się opisać na okręgu. Przyjmijmy, że mamy dane odcinki a, b, c równe kolejnym bokom czworokąta oraz kąt α równy kątowi między bokiem a i czwartym, nieznanym bokiem czworokąta.

Etapy konstrukcji.

1. Na prostej odkładamy sumę odcinków $a + c$, a następnie od jednego z końców odejmujemy odcinek b. W wyniku otrzymamy odcinek d równy długości czwartego boku czworokąta.
2. Na prostej odkładamy odcinek a, a następnie odkładamy kąt α w taki sposób, by jedno z ramion zawierała odcinek a a wierzchołkiem kąta był jeden z końców tego odcinka.
3. Z wierzchołka kąta, na drugim ramieniu odkładamy odcinek d - w wyniku otrzymujemy trzy wierzchołki konstruowanego czworokąta.
4. Dla dokończenia konstrukcji pozostaje z tych wierzchołków, które nie są wierzchołkiem kąta α wykreślić łuki odpowiednio równe b i c, aż do ich przecięcia.

Zauważmy, że warunkiem wykonalności konstrukcji jest, by suma $b + c$ była dłuższa od odległości wierzchołków leżących na ramionach kąta α.



Słownik

zasadnicze twierdzenie planimetrii

twierdzenie, które orzeka, że odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do danego okręgu z punktu P leżącego zewnątrz okręgu, wyznaczone przez punkt P i punkty styczności, są sobie równe

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet. Ustal położenie wierzchołków czworokąta opisanego na okręgu, a następnie wybierz polecenie „Długości boków”. Odczytaj długości boków czworokąta. Porównaj sumy długości przeciwległych boków dla różnych położeń wierzchołków.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D13VSNGKO

Polecenie 2

Korzystając z danych widocznych obok rysunku w aplikacji, oblicz pola trójkątów, na jakie podzielony został czworokąt. Oblicz sumę pól powstałych trójkątów i porównaj z polem czworokąta. Wyjaśnij ewentualne różnice (o ile istnieją).

Polecenie 3

Boki czworokąta opisanego na okręgu o promieniu 2 mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|CD| = 2$, $|AD| = 5$. Oblicz pole tego czworokąta.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dłuższa podstawa AB trapezu równoramiennego $ABCD$ opisanego na okręgu o promieniu 3 jest równa 18. Oblicz pole trapezu.

Ćwiczenie 2

W deltoidzie $ABCD$ krótszy bok ma długość 4, a dwa przeciwległe kąty mają miary odpowiednio 60° i 120°. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten deltoid.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Przeprowadź konstrukcję czworokąta, który można opisać na okręgu, mając dany bok a, kąty wewnętrzne α, β, którego ramiona zawierają dany bok a oraz trzeci kąt tego czworokąta γ.

Ćwiczenie 7

Na okręgu o promieniu 5 opisano trapez, którego ramiona mają długości: $|AD| = 12,5$, $|BC| = 10,3$. Wyznacz długość krótszej podstawy tego trapezu.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okrąg wpisany w czworokąt

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
12) przeprowadza dowody geometryczne;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje pojęcie wielokąta opisanego na okręgu
- stosuje twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu
- stosuje zasadnicze twierdzenie planimetrii
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia wielokąta foremnego i omówienie zagadnienia istnienia okręgów wpisanego w taki wielokąt i opisanego na takim wielokącie. Prosi o zdefiniowanie pojęcia wielokąta opisanego na okręgu, także w kontekście wypukłości takiego wielokąta. Prosi o podanie przykładów czworokątów, które można opisać na okręgu oraz takich, dla których okrąg wpisany nie istnieje.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje przygotowany wcześniej rysunek czworokąta opisanego na okręgu, na którym odpowiednie odcinki stycznych, o takiej samej długości, zaznaczono innym kolorem. Następnie prosi uczniów o sformułowanie twierdzenia ustalającego warunek konieczny, by czworokąt można było opisać na okręgu. Tę fazę można zastąpić lub połączyć z uruchomieniem dołączonego apletu Geogebry i wykonaniem zamieszczonych w nim poleceń.
2. Następnie uczniowie, po kierunkiem nauczyciela przeprowadzają dowód sformułowanego twierdzenia.
3. Nauczyciel zadaje pytanie dotyczące prawdziwości twierdzenia odwrotnego. Zwraca uwagę na założenie dotyczące wypukłości figury i podaje przykład, że jest on istotny. Następnie nauczyciel przypomina schemat dowodu „nie wprost” i rozpoczyna dowód. W momencie, gdy formułuje przypuszczenie, że czwarty bok nie jest styczny do okręgu prosi, by uczniowie w parach podjęli próbę dokończenia dowodu. Po krótkiej chwili prosi wybranego ucznia, by zapisał dowód na tablicy. Zwraca uwagę na położenie poszczególnych punktów

względem końców odcinka i formalną konieczność rozważenia dwóch przypadków.

4. Nauczyciel prezentuje problem opisany w Przykładzie 1. Może w tym miejscu ponownie odwołać się do apletu Geogebry. Podkreśla, że metodę obliczania pola, jako iloczynu połowy obwodu przez długość promienia można uogólnić na wielokąt o dowolnej liczbie boków.
5. Nauczyciel formułuje problem dotyczący konstrukcji opisanej w Przykładzie 2. Prosi uczniów o przeprowadzenie konstrukcji i dyskusje jej wykonalności
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

1. Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Wskazówki metodyczne:

Można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można wykorzystać przy realizacji tematu o własnościach czworokątów opisanych na okręgu.