



Siatki prostopadłościanu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Siatki prostopadłościanu

Źródło: Andreas Kretschmer, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Prostopadłościan to bryła geometryczna, która ma 12 krawędzi, 8 wierzchołków i 6 ścian, a jej ściany są parami przystającymi prostokątami. Odwzorowanie poszczególnych ścian prostopadłościennego pudełka, a następnie połączenie ich w taki sposób, aby stworzyły całość to umiejętność tworzenia siatki bryły.



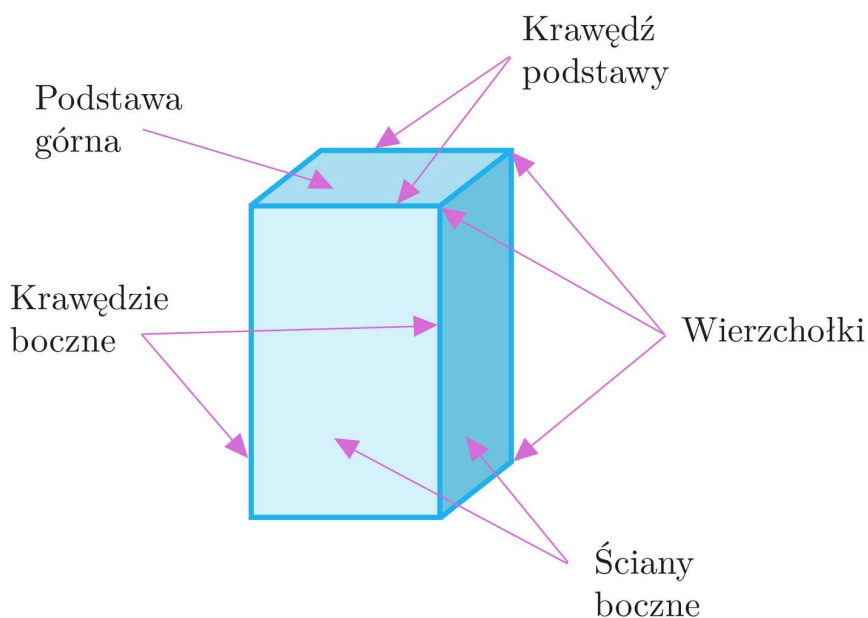
W tym materiale omówimy zagadnienia związane z siatkami prostopadłościanów. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Rozpoznaś siatkę prostopadłościanu.
- Ocenisz, czy rysunek przedstawia siatkę prostopadłościanu.
- Narysujesz siatkę prostopadłościanu o zadanych warunkach.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, jak zbudowany jest prostopadłościan.

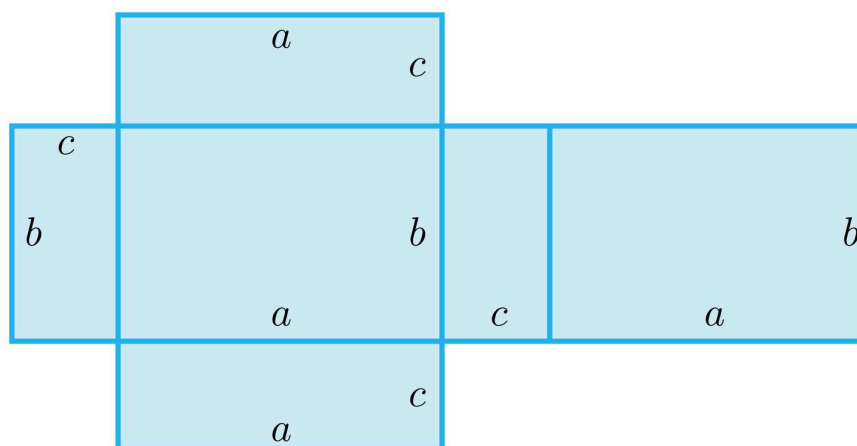


Wprowadźmy definicję siatki [prostopadłościanu](#).

Z każdego wierzchołka prostopadłościanu wychodzą trzy krawędzie, które nazywamy: długość, szerokość i wysokość.

Definicja: Siatka prostopadłościanu

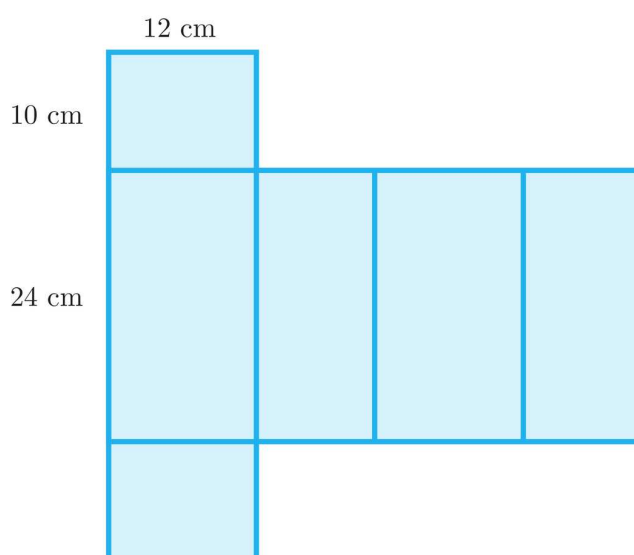
Przedstawienie prostopadłościanu na płaszczyźnie poprzez rozcięcie niektórych jego krawędzi tak, aby możliwe było rozłożenie jego ścian na płaszczyźnie nazywamy siatką prostopadłościanu.



Na podstawie rysunku możemy zauważyć, że **siatka** prostopadłościanu składa się z trzech par przystających prostokątów o wymiarach: $a \times b$, $a \times c$ oraz $b \times c$.

Przykład 1

Obliczymy sumę długości krawędzi prostopadłościanu, jeżeli jego siatkę przedstawiono na poniższym rysunku.



Rozwiązanie:

W każdym prostopadłościanie jest 12 krawędzi.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

a – długość,

b – szerokość,

c – wysokość.

Wówczas:

$$a = 12 \text{ cm}$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

$$c = 24 \text{ cm}$$

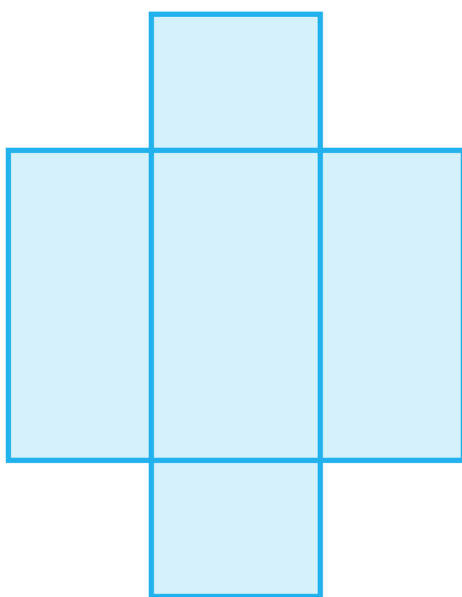
Jeżeli S jest sumą długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, to:

$$S = 4 \cdot 12 \text{ cm} + 4 \cdot 10 \text{ cm} + 4 \cdot 24 \text{ cm} = 48 \text{ cm} + 40 \text{ cm} + 96 \text{ cm} = 184 \text{ cm}.$$

Przykład 2

Uzasadnimy, dlaczego poniższe rysunki nie mogą przedstawiać siatek prostopadłościanów.

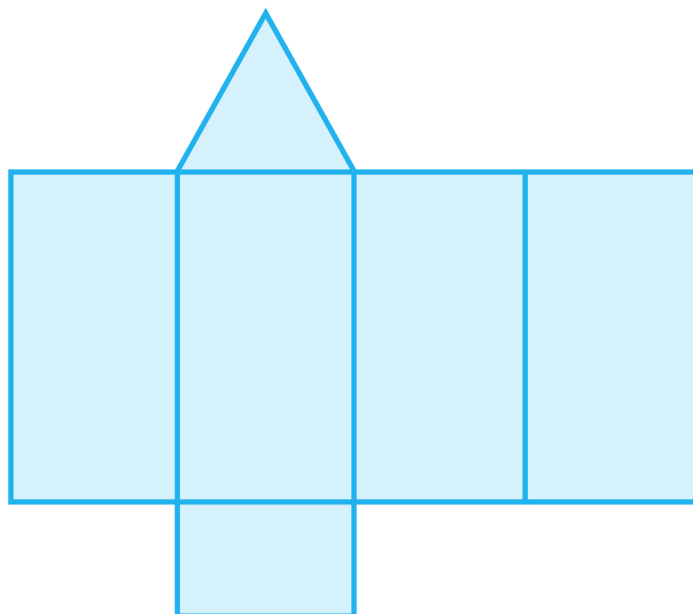
a)



Rozwiązanie:

Rysunek nie przedstawia siatki prostopadłościanu, ponieważ w każdym prostopadłościanie jest sześć ścian: trzy pary przystających prostokątów.

b)



Rozwiązanie:

Rysunek nie przedstawia siatki prostopadłościanu, ponieważ podstawy oraz ściany boczne prostopadłościanu są prostokątami.

Przykład 3

Narysujemy siatkę prostopadłościanu, jeżeli długości jego krawędzi pozostają w stosunku $1 : 1,5 : 2$, a pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 52 cm^2 .

Rozwiązanie:

Jeżeli długości krawędzi a, b, c prostopadłościanu pozostają w stosunku $1 : 1,5 : 2$, to:

$$b = 1,5 \cdot a \text{ oraz } c = 2 \cdot a$$

Ponieważ pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 52 cm^2 , zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$52 = 2 \cdot a \cdot 1,5a + 2 \cdot 1,5a \cdot 2a + 2 \cdot a \cdot 2a$$

$$52 = 3a^2 + 6a^2 + 4a^2$$

$$52 = 13a^2$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

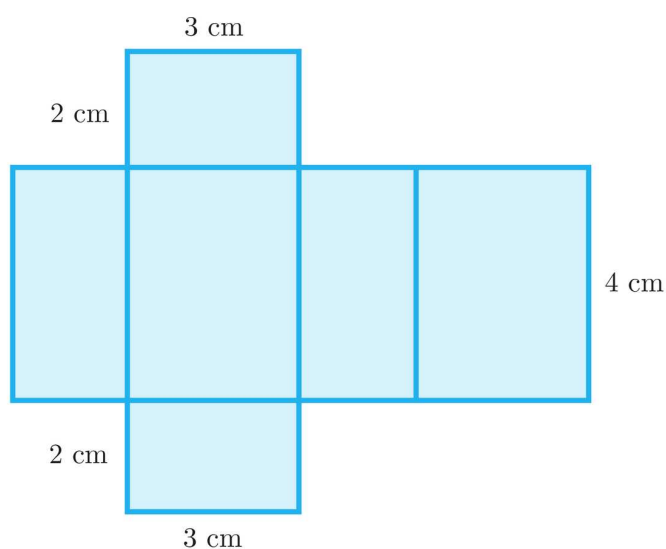
Zatem długości krawędzi prostopadłościanu wynoszą odpowiednio:

$$a = 2 \text{ cm}$$

$$b = 1,5 \cdot 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

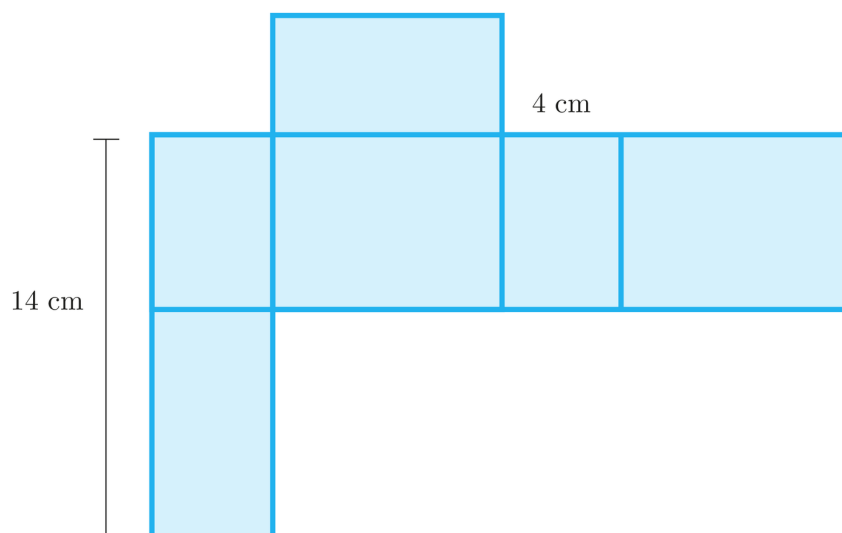
$$c = 2 \cdot 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Wobec tego rysunek siatki omawianego prostopadłościanu przedstawia się następująco:



Przykład 4

Obliczymy objętość prostopadłościanu, którego siatka została przedstawiona poniżej wiedząc, że pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 208 cm^2 .



Rozwiązanie:

Oznaczmy przez a i b długości krawędzi podstaw oraz przez c długość wysokości prostopadłościanu.

Z rysunku wynika, że $a = 4 \text{ cm}$ oraz $b + c = 14 \text{ cm}$.

Ponieważ pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi 208 cm^2 , wobec tego rozwiązujemy równanie:

$$208 = 2 \cdot 4 \cdot b + 2 \cdot 4 \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

Skoro $b + c = 14$, zatem $c = 14 - b$.

Do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$$208 = 2 \cdot 4 \cdot b + 2 \cdot 4 \cdot (14 - b) + 2 \cdot b \cdot (14 - b)$$

$$208 = 8b + 112 - 8b + 28b - 2b^2$$

$$-2b^2 + 28b - 96 = 0$$

$$-b^2 + 14b - 48 = 0$$

Zatem

$$b_1 = \frac{-14-2}{-2} = 8$$

$$b_2 = \frac{-14+2}{-2} = 6$$

Ponieważ $c = 14 - b$, więc $c_1 = 6$ oraz $c_2 = 8$

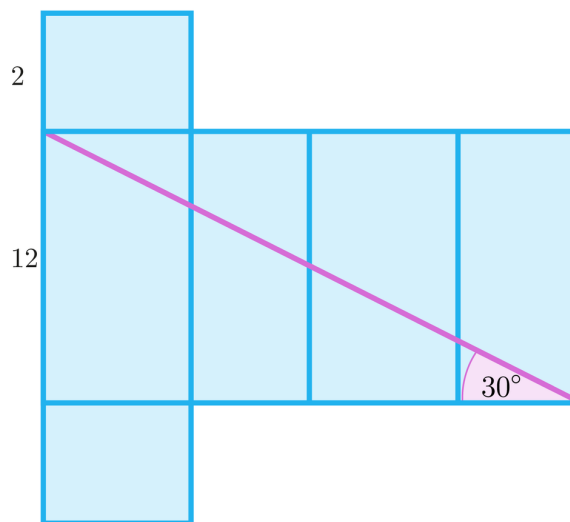
Objętość prostopadłościanu, którego siatkę przedstawiono na rysunku wynosi:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192 \text{ cm}^3$$

Przykład 5

Obliczymy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, którego siatkę przedstawiono na poniższym rysunku.



Rozwiązanie:

Z rysunku odczytujemy, że $b = 2$ oraz $c = 12$.

Niech a będzie długością nieznaną krawędzi podstawy, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

Wobec tego:

$$2 \cdot a + 2 \cdot 2 = 12\sqrt{3}$$

$$2a + 4 = 12\sqrt{3}$$

$$2a = 12\sqrt{3} - 4$$

$$\text{Zatem } a = 6\sqrt{3} - 2.$$

Skoro $a = 6\sqrt{3} - 2$, $b = 2$, $c = 12$, to pole powierzchni prostopadłościanu wynosi:

$$P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot (6\sqrt{3} - 2) \cdot 2 + 2 \cdot (6\sqrt{3} - 2) \cdot 12 + 2 \cdot 2 \cdot 12 = \\ &= 24\sqrt{3} - 8 + 144\sqrt{3} - 48 + 48 = 168\sqrt{3} - 8. \end{aligned}$$

Słownik

siatka bryły

przedstawienie bryły na płaszczyźnie w taki sposób, aby po wycięciu dało się złożyć model tej bryły

prostopadłościan

równoległościan, którego wszystkie ściany są prostokątami

Animacja 3D

Polecenie 1

Obejrzyj animację 3D. Zwróć uwagę, jak zmienia się rysunek prostopadłościanu i jego siatki wraz ze zmianą długości jego krawędzi.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D5H0qWIVN>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący siatki prostopadłościanu.

Polecenie 2

Zaznacz wszystkie zdania, które są prawdziwe.

- ☐ Ściany prostopadłościanu o tych samych wymiarach leżą naprzeciwko siebie.
- ☐ Znając długość przekątnej prostopadłościanu, jego wysokości oraz jedną z krawędzi podstawy, możemy narysować siatkę tego prostopadłościanu.
- ☐ Zmiana długości krawędzi prostopadłościanu nie zmienia jego pola powierzchni całkowitej.
- ☐ W każdym prostopadłościanie są dwie pary prostokątów przystających, które tworzą jego ściany.
- ☐ Siatka prostopadłościanu jest zbudowana z sześciu prostokątów.
- ☐ Istnieją trzy różne wymiary prostopadłościanu.
- ☐ Do wyznaczenia sumy długości krawędzi bocznych prostopadłościanu wystarczy znać długość jego wysokości.
- ☐ Suma długości krawędzi prostopadłościanu jest równa potrojonej sumie długości jego krawędzi podstawy i wysokości.

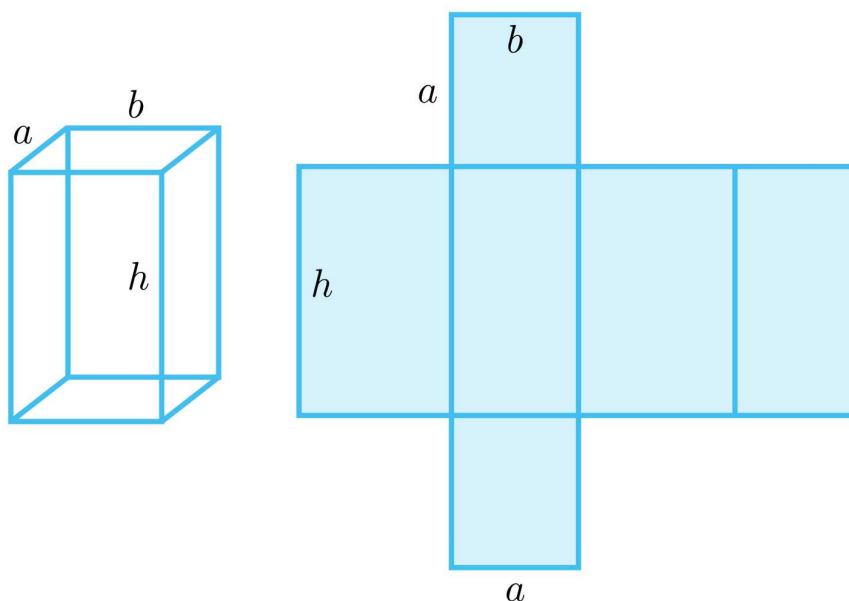
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku przedstawiono siatkę oraz model pewnego prostopadłościanu, którego krawędzie są różnej długości.



Zaznacz zdanie, które jest prawdziwe.



Suma pól powierzchni ścian o wymiarach $a \times b$ i $b \times h$ jest taka sama, jak suma pól powierzchni ścian o wymiarach $a \times h$ i $b \times h$.



Jeżeli d jest długością przekątnej prostopadłościanu, to $d = a + b + h$.

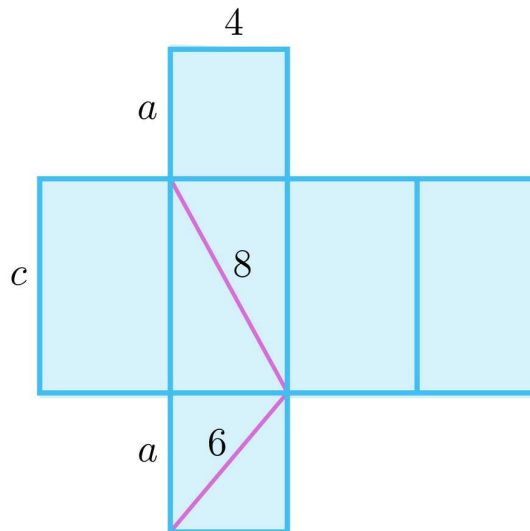


Suma długości krawędzi tego prostopadłościanu wynosi $4 \cdot (a + b + h)$.

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono siatkę pewnego prostopadłościanu.



Zaznacz wszystkie zdania, które są prawdziwe.

☐ Najkrótsza krawędź prostopadłościanu ma długość $2\sqrt{5}$.

☐ Przekątna ściany prostopadłościanu o najmniejszej powierzchni ma długość $2\sqrt{17}$.

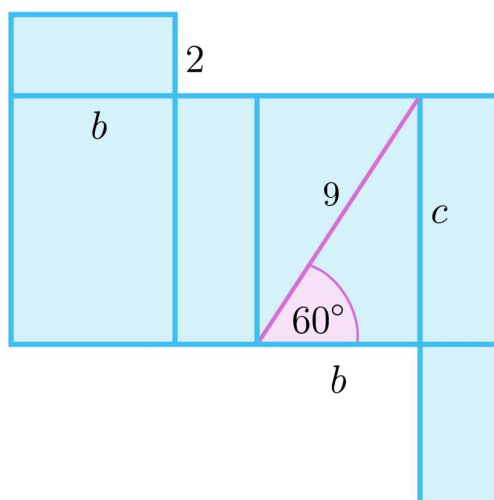
☐ Najdłuższa krawędź prostopadłościanu ma długość $4\sqrt{3}$.

☐ Prostopadłościan, którego siatkę przedstawiono na rysunku ma wymiary $2\sqrt{5} \times 4 \times 4\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono siatkę pewnego prostopadłościanu.



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

$$b = \boxed{}$$

$$c = \boxed{}$$

Suma długości krawędzi tego prostopadłościanu wynosi $\boxed{}$.

Objętość prostopadłościanu jest równa $\boxed{}$.

$9\sqrt{3}$

$\frac{9}{2}$

$\frac{81\sqrt{3}}{2}$

$18 + 26\sqrt{3}$

$26 + 18\sqrt{3}$

$\frac{9\sqrt{3}}{2}$

2

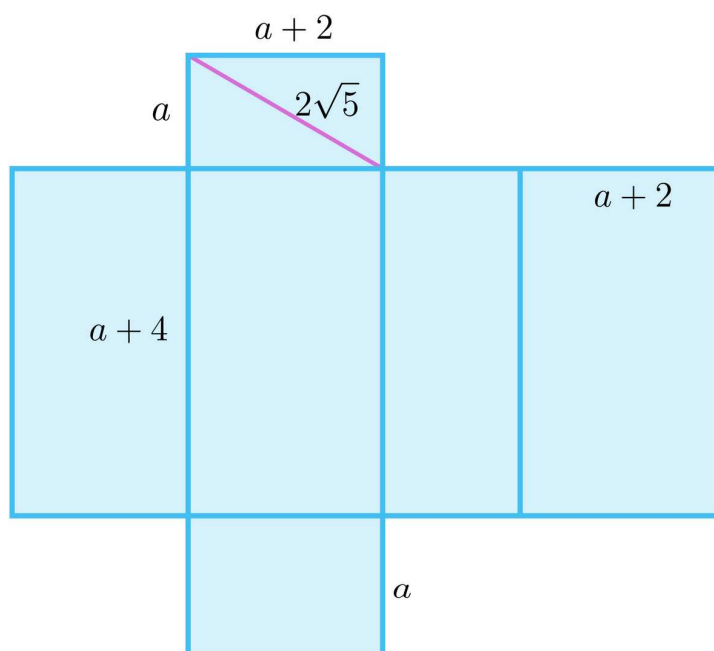
Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Na podstawie rysunku siatki prostopadłościanu uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.



Najkrótsza krawędź prostopadłościanu ma długość .

Najdłuższa krawędź prostopadłościanu ma długość .

Suma długości krawędzi prostopadłościanu, którego siatkę przedstawiono na rysunku wynosi

.

Pole powierzchni prostopadłościanu wynosi .

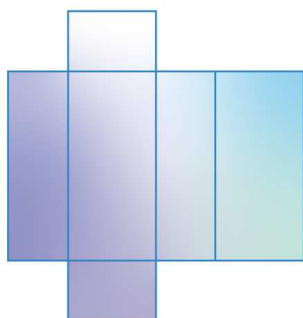
Objętość prostopadłościanu jest równa .

Ćwiczenie 6

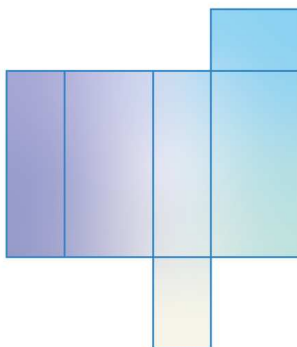


Na podstawie rysunków zaznacz zdanie, które jest prawdziwe.

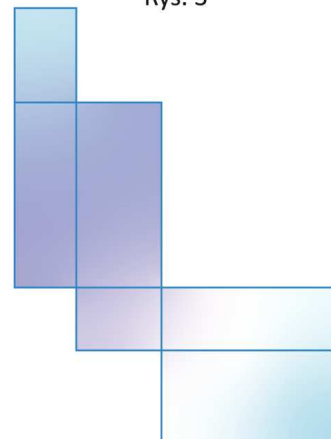
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



- ☐ Niemożliwe jest złożenie prostopadłościanu z siatki z Rys. 3.
- ☐ Tylko dwa spośród rysunków przedstawiają siatkę prostopadłościanu.
- ☐ Każdy z rysunków przedstawia siatkę prostopadłościanu.

Ćwiczenie 7



Narysuj siatkę prostopadłościanu o długościach krawędzi, które są kolejnymi liczbami parzystymi, a suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 72 cm.

Ćwiczenie 8



Narysuj siatkę prostopadłościanu, w którym jedna z krawędzi jest o 1 cm dłuższa od drugiej, najdłuższa krawędź ma długość 5 cm, a przekątna prostopadłościanu wynosi $\sqrt{38}$ cm.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Siatki prostopadłościanu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 3) rozpoznaje w graniastopach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
- 6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastopów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje siatkę prostopadłościanu;
- ocenia, czy rysunek przedstawia siatkę prostopadłościanu;
- rysuje siatkę prostopadłościanu o zadanych warunkach;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa;
- metoda krokodyla;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Siatki prostopadłościanu” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań z sekcji „Przeczytaj”. W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja 3D”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Siatki prostopadłościanu” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Siatki prostopadłościanu”).

Materiały pomocnicze:

- [Siatki i modele prostopadłościanów i sześciątów.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Animacja 3D” do realizacji tematu „Pole powierzchni prostopadłościanu” lub do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązywać zadania dotyczące siatki prostopadłościanu.