



Równanie okręgu w postaci ogólnej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Równanie okręgu w postaci ogólnej

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Co wspólnego w matematyce mają jednowymiarowa hipersfera oraz elipsa o równych półosiach? Definiują one w szczególny sposób okrąg, rozumiany potocznie jako brzeg koła. W trakcie tej lekcji zajmiesz się równaniem okręgu w postaci ogólnej. Wykorzystasz w tym celu zdobytą wcześniej wiedzę dotyczącą równania okręgu w postaci kanonicznej.

Twoje cele

- Dowiesz się, jak przedstawić równanie okręgu w postaci ogólnej.
- Nauczysz się, jak na podstawie równania okręgu w postaci ogólnej obliczyć współrzędne jego środka oraz długość promienia.
- Wykorzystasz równanie okręgu w postaci ogólnej do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Okręgiem o środku w punkcie O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległości od punktu O są równe długości promienia r .

Równanie okręgu na płaszczyźnie możemy zapisać w postaci kanonicznej.

Już wiesz

Postać kanoniczną równania okręgu zapisujemy następująco:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \text{ gdzie } S = (a, b) - \text{środek okręgu oraz } r - \text{promień okręgu.}$$

Równanie okręgu w **postaci kanonicznej** możemy sprowadzić do następującej postaci (poprzez wykonanie działań i uporządkowanie):

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

Odejmując następnie stronami wyraz r^2 , otrzymujemy:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0.$$

Porządkując, otrzymujemy:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0.$$

Oznaczmy teraz $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Otrzymamy wyrażenie, które nazywamy **postacią ogólną równania okręgu**:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli $c = a^2 + b^2 - r^2$, to

$$r^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Zatem **promień okręgu** obliczamy ze wzoru $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, przy czym $r > 0$.

Z dziedziny pierwiastka oraz warunku, że $r > 0$ otrzymujemy nierówność: $a^2 + b^2 > c$.

Zauważmy, że jeżeli wykonamy podstawienie $A = -2a$ i $B = -2b$, to postać ogólną równania okręgu możemy zapisać jako:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ przy czym } r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \text{ oraz środek okręgu } S = (a, b).$$

Przykład 1

Wyznamy środek i promień okręgu o równaniu:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0.$$

Odwołując się do postaci ogólnej równania okręgu, z podanego równania możemy odczytać, że $-2a = -4$, $-2b = 2$ oraz $c = -1$.

Otrzymujemy: $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$.

Zatem środek okręgu ma współrzędne $S = (2, -1)$.

Promień okręgu wynosi: $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - (-1)} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$.

Przykład 2

Zapiszemy postać ogólną okręgu o środku w punkcie $S = (3, -2)$ i promieniu $r = 3$.

Zauważmy, że dane są $a = 3$ i $b = -2$ oraz $r = 3$.

Wartość współczynnika c obliczymy ze wzoru $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Zapisujemy zatem: $c = 3^2 + (-2)^2 - 3^2$.

Stąd $c = 4$.

Po podstawieniu do równania okręgu otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0.$$

Przykład 3

Wyznamy równanie okręgu w postaci ogólnej, jeżeli końce jego średnicy to punkty $A = (-1, 5)$ oraz $B = (5, 3)$.

Zauważmy, że środek odcinka AB jest środkiem danego okręgu.

Oznaczmy $S = (a, b)$ – środek okręgu.

Wykorzystamy wzór na środek S odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Po podstawieniu do wzoru mamy $S = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (2, 4)$.

Zatem $a = 2$ i $b = 4$.

Długość promienia r jest równa połowie długości średnicy AB .

Długość odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$ obliczamy ze wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Zatem

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(-1 - 5)^2 + (5 - 3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4} = \sqrt{10}$$

Obliczamy wartość współczynnika c .

$$c = 2^2 + 4^2 - (\sqrt{10})^2 = 10$$

Otrzymane wartości współczynników podstawiamy do równania okręgu w postaci ogólnej.

Otrzymujemy równanie: $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$.

Przykład 4

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + y^2 - 4x + 4y + m = 0$ przedstawia okrąg.

Z równania możemy odczytać, że $-2a = -4$, $-2b = 4$ oraz $c = m$.

Zatem $a = 2$, $b = -2$ oraz $c = m$.

Po podstawieniu do wzoru na r otrzymujemy: $r = \sqrt{4 + 4 - m} = \sqrt{8 - m}$.

Ponieważ $r > 0$, zatem $8 - m > 0$.

Równanie przedstawia okrąg dla $m \in (-\infty, 8)$.

Przykład 5

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + y^2 - m^2 - m + 12 = 0$ przedstawia okrąg.

Z podanego równania otrzymujemy warunki:

$$-2a = 0 \text{ i } -2b = 0 \text{ oraz } c = -m^2 - m + 12.$$

Zatem $a = 0$, $b = 0$ oraz $c = -m^2 - m + 12$.

Podstawiamy otrzymane wartości do wzoru na promień r okręgu.

$$\text{Stąd } r = \sqrt{-(-m^2 - m + 12)} = \sqrt{m^2 + m - 12}.$$

Ponieważ $r > 0$, zatem $m^2 + m - 12 > 0$.

Obliczamy:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7$$

$$m_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$$

$$m_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$$

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $m \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$. Dla tych wartości parametru m , zadane równanie przedstawia okrąg.

Słownik

postać ogólna równania okręgu

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, gdzie $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, przy czym $r > 0$ oraz środek okręgu $S = (a, b)$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenie.

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + y^2 - 6x + 8y + m^2 = 0$ przedstawia okrąg?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie okręgu w postaci ogólnej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna równanie okręgu w postaci ogólnej;
- potrafi wyznaczyć środek i promień okręgu na podstawie równania w postaci ogólnej;
- wykorzystuje równanie okręgu w postaci ogólnej do rozwiązywania zadań z parametrami.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązując i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Koła i okręgi](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Infografika” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Równanie okręgu w postaci ogólnej”.