



## Równanie okręgu w postaci ogólnej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Równanie okręgu w postaci ogólnej

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Co wspólnego w matematyce mają jednowymiarowa hipersfera oraz elipsa o równych półosiach? Definiują one w szczególny sposób okrąg, rozumiany potocznie jako brzeg koła. W trakcie tej lekcji zajmiesz się równaniem okręgu w postaci ogólnej. Wykorzystasz w tym celu zdobytą wcześniej wiedzę dotyczącą równania okręgu w postaci kanonicznej.

### Twoje cele

- Dowiesz się, jak przedstawić równanie okręgu w postaci ogólnej.
- Nauczysz się, jak na podstawie równania okręgu w postaci ogólnej obliczyć współrzędne jego środka oraz długość promienia.
- Wykorzystasz równanie okręgu w postaci ogólnej do rozwiązywania problemów matematycznych.

# Przeczytaj

---

**Okręgiem** o środku w punkcie  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległości od punktu  $O$  są równe długości promienia  $r$ .

Równanie okręgu na płaszczyźnie możemy zapisać w postaci kanonicznej.

## Już wiesz

**Postać kanoniczną** równania okręgu zapisujemy następująco:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \text{ gdzie } S = (a, b) - \text{środek okręgu oraz } r - \text{promień okręgu.}$$

Równanie okręgu w **postaci kanonicznej** możemy sprowadzić do następującej postaci (poprzez wykonanie działań i uporządkowanie):

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

Odejmując następnie stronami wyraz  $r^2$ , otrzymujemy:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0.$$

Porządkując, otrzymujemy:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0.$$

Oznaczmy teraz  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .

Otrzymamy wyrażenie, które nazywamy **postacią ogólną równania okręgu**:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli  $c = a^2 + b^2 - r^2$ , to

$$r^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Zatem **promień okręgu** obliczamy ze wzoru  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ , przy czym  $r > 0$ .

Z dziedziny pierwiastka oraz warunku, że  $r > 0$  otrzymujemy nierówność:  $a^2 + b^2 > c$ .

Zauważmy, że jeżeli wykonamy podstawienie  $A = -2a$  i  $B = -2b$ , to postać ogólną równania okręgu możemy zapisać jako:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ przy czym } r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \text{ oraz środek okręgu } S = (a, b).$$

## Przykład 1

Wyznamy środek i promień okręgu o równaniu:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0.$$

Odwołując się do postaci ogólnej równania okręgu, z podanego równania możemy odczytać, że  $-2a = -4$ ,  $-2b = 2$  oraz  $c = -1$ .

Otrzymujemy:  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = -1$ .

Zatem środek okręgu ma współrzędne  $S = (2, -1)$ .

Promień okręgu wynosi:  $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - (-1)} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$ .

### Przykład 2

Zapiszemy postać ogólną okręgu o środku w punkcie  $S = (3, -2)$  i promieniu  $r = 3$ .

Zauważmy, że dane są  $a = 3$  i  $b = -2$  oraz  $r = 3$ .

Wartość współczynnika  $c$  obliczymy ze wzoru  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .

Zapisujemy zatem:  $c = 3^2 + (-2)^2 - 3^2$ .

Stąd  $c = 4$ .

Po podstawieniu do równania okręgu otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0.$$

### Przykład 3

Wyznamy równanie okręgu w postaci ogólnej, jeżeli końce jego średnicy to punkty  $A = (-1, 5)$  oraz  $B = (5, 3)$ .

Zauważmy, że środek odcinka  $AB$  jest środkiem danego okręgu.

Oznaczmy  $S = (a, b)$  – środek okręgu.

Wykorzystamy wzór na środek  $S$  odcinka o końcach  $A = (x_1, y_1)$  oraz  $B = (x_2, y_2)$ :

$$S = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Po podstawieniu do wzoru mamy  $S = \left( \frac{-1+5}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (2, 4)$ .

Zatem  $a = 2$  i  $b = 4$ .

Długość promienia  $r$  jest równa połowie długości średnicy  $AB$ .

Długość odcinka o końcach  $A = (x_1, y_1)$  oraz  $B = (x_2, y_2)$  obliczamy ze wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Zatem

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(-1 - 5)^2 + (5 - 3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4} = \sqrt{10}$$

Obliczamy wartość współczynnika  $c$ .

$$c = 2^2 + 4^2 - (\sqrt{10})^2 = 10$$

Otrzymane wartości współczynników podstawiamy do równania okręgu w postaci ogólnej.

Otrzymujemy równanie:  $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ .

#### Przykład 4

Wyznamy, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + y^2 - 4x + 4y + m = 0$  przedstawia okrąg.

Z równania możemy odczytać, że  $-2a = -4$ ,  $-2b = 4$  oraz  $c = m$ .

Zatem  $a = 2$ ,  $b = -2$  oraz  $c = m$ .

Po podstawieniu do wzoru na  $r$  otrzymujemy:  $r = \sqrt{4 + 4 - m} = \sqrt{8 - m}$ .

Ponieważ  $r > 0$ , zatem  $8 - m > 0$ .

Równanie przedstawia okrąg dla  $m \in (-\infty, 8)$ .

#### Przykład 5

Wyznamy, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + y^2 - m^2 - m + 12 = 0$  przedstawia okrąg.

Z podanego równania otrzymujemy warunki:

$$-2a = 0 \text{ i } -2b = 0 \text{ oraz } c = -m^2 - m + 12.$$

Zatem  $a = 0$ ,  $b = 0$  oraz  $c = -m^2 - m + 12$ .

Podstawiamy otrzymane wartości do wzoru na promień  $r$  okręgu.

$$\text{Stąd } r = \sqrt{-(-m^2 - m + 12)} = \sqrt{m^2 + m - 12}.$$

Ponieważ  $r > 0$ , zatem  $m^2 + m - 12 > 0$ .

Obliczamy:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7$$

$$m_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$$

$$m_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$$

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór  $m \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ . Dla tych wartości parametru  $m$ , zadane równanie przedstawia okrąg.

## Słownik

**postać ogólna równania okręgu**

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , gdzie  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ , przy czym  $r > 0$  oraz środek okręgu  $S = (a, b)$

# Infografika

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenie.

## Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + m^2 = 0$  przedstawia okrąg?

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Promień okręgu  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 4 = 0$  ma długość:

2

6

$\sqrt{6}$

## Ćwiczenie 2



Połącz w pary równanie okręgu z odpowiadającym mu środkiem  $S$ :

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$S = (0, 3)$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

$$S = (1, 2)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$$

$$S = (-1, 0)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$$

$$S = (-2, 1)$$

## Ćwiczenie 3



Równanie  $x^2 + y^2 - m^2 + 1 = 0$  przedstawia okrąg dla:

$m \in (-1, \infty)$

$m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$m \in (-1, 1)$





## Ćwiczenie 6



Pogrupuj elementy zgodnie z podanym opisem:

Równania, które przedstawiają okrąg na płaszczyźnie:

$$x^2 + y^2 + 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 20 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 11 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

Równania, które nie przedstawiają okręgu na płaszczyźnie:

## Ćwiczenie 7



Okrąg o środku  $S = (2, -5)$  i promieniu  $r = 4$  przedstawia równanie:

$x^2 + y^2 - 4x + 10y - 13 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

## Ćwiczenie 8



Uzupełnij rozwiązanie zadania:

Wyznacz równanie okręgu, jeżeli do końców jego średnicy należą punkty  $A = (3, -2)$  i  $B = (-3, 6)$ .

Rozwiązanie:

Wyznaczamy długość średnicy:  $|AB| = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (6 + 2)^2} =$

Zatem długość promienia wynosi .

Środek okręgu jest środkiem odcinka  $AB$ , zatem:

$S = (0, \text{})$ . Otrzymujemy, że  $a = 0$  i  $b =$  .

Obliczamy wartość współczynnika  $c$  ze wzoru  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .

Zatem  $c =$  .

Po podstawieniu do równania okręgu w postaci ogólnej otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0.$$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Równanie okręgu w postaci ogólnej

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zna równanie okręgu w postaci ogólnej;
- potrafi wyznaczyć środek i promień okręgu na podstawie równania w postaci ogólnej;
- wykorzystuje równanie okręgu w postaci ogólnej do rozwiązywania zadań z parametrami.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- objaśnienie nowej wiedzy.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

### **Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązując i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Materiały pomocnicze:**

- [Koła i okręgi](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Infografika” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Równanie okręgu w postaci ogólnej”.