



Walec wpisany w graniastosłup

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Walec wpisany w graniastosłup

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

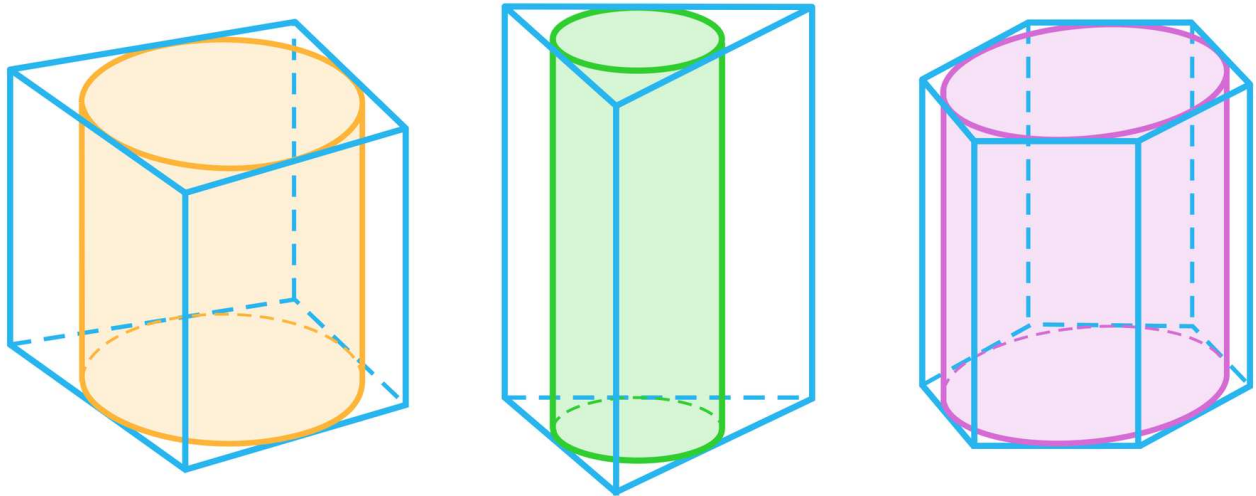
W prezentowanym materiale omówimy zagadnienia związane z walcem wpisanym w graniastosłup. Tę sytuację możemy porównać do próby wywiercenia okrągłego otworu w klocku o kształcie graniastosłupa. Przekonamy się o tym, że nie w każdy graniastosłup można wpisać walec, w taki sposób, aby podstawy walca były kołami wpisanymi w podstawy graniastosłupa. Wykorzystamy znane twierdzenia dotyczące trójkątów, czworokątów i figur foremnych.

Materiał ten wykracza poza podstawę programową i jest ciekawym uzupełnieniem wiadomości o bryłach.

Twoje cele

- Wymienisz własności graniastosłupów opisanych na walcu.
- Zastosujesz wzory na pole powierzchni i objętość brył oraz znane twierdzenia z geometrii płaskiej.

Przeczytaj



Graniastosłup jest opisany na walcu, jeśli jego podstawy są wielokątami opisanymi na podstawach walca. Zauważmy, że wysokość graniastosłupa jest taka sama jak wysokość walca.

Podstawą graniastosłupa musi być wielokąt, w który można wpisać okrąg. To kryterium spełniają wszystkie wielokąty foremne, a zatem w każdy **graniastosłup prawidłowy** można wpisać walec.

Przypomnimy najpierw podstawowe wzory:

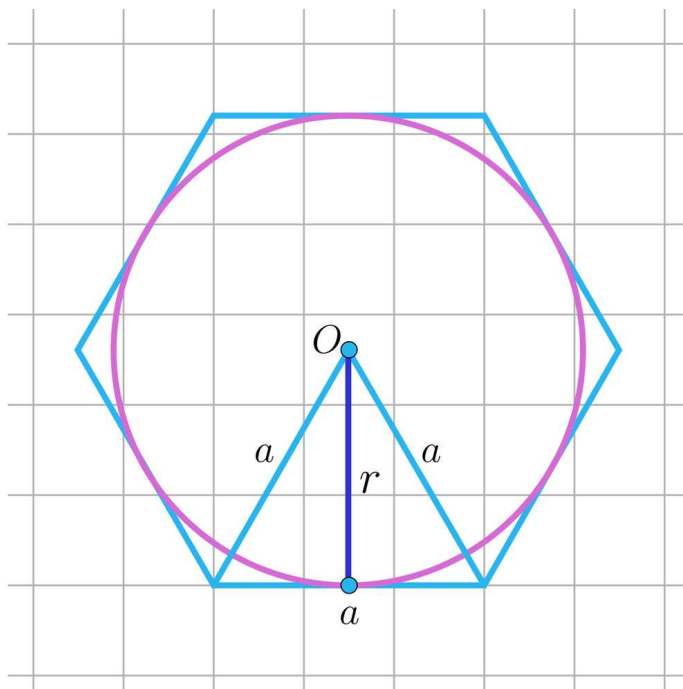
- długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości c i przyprostokątnych długości a i b wyraża się wzorem $r = \frac{a+b-c}{2}$
- długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku długości a , wyraża się wzorem $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
- długość promienia okręgu wpisanego w dowolny trójkąt wyraża się wzorem $r = \frac{P_{\Delta}}{p}$, gdzie P_{Δ} - pole trójkąta, p - połowa obwodu tego trójkąta
- długość promienia okręgu wpisanego w czworokąt o bokach długości a, b, c, d wyraża się wzorem $r = \frac{2P}{a+b+c+d}$, gdzie P oznacza pole czworokąta
- pole kwadratu o przekątnej długości d wyraża się wzorem $P = \frac{d^2}{2}$
- pole trójkąta o bokach długości a, b i c wyraża się wzorem $P_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p jest połową obwodu trójkąta
- objętość walca o promieniu długości r i wysokości długości H wyraża się wzorem $V = \pi r^2 H$
- pole powierzchni walca o promieniu długości r i wysokości długości H wyraża się wzorem $P = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot H$

Przykład 1

Rozważmy **graniastosłup prawidłowy sześciokątny**, którego wszystkie krawędzie mają długość a . Wykażemy, że stosunek objętości walca opisanego na tym graniastosłupie do objętości walca wpisanego w ten graniastosłup jest równy $\frac{4}{3}$.

Rozwiązanie:

Wykonajmy odpowiedni rysunek.



Promień podstawy walca wpisanego w ten graniastosłup jest wysokością w trójkącie równobocznym o boku długości a . Zatem $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Stąd objętość walca wpisanego w ten graniastosłup jest równa:

$$V_w = \pi \cdot r^2 \cdot a = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{3\pi a^3}{4}.$$

Promień podstawy walca opisanego na tym graniastosłupie jest równy długości krawędzi podstawy czyli $r = a$.

A zatem objętość walca opisanego na tym graniastosłupie jest równa $V_o = \pi \cdot a^2 \cdot a = \pi a^3$.

Otrzymujemy:

$$\frac{V_o}{V_w} = \pi a^3 \cdot \frac{4}{3\pi a^3} = \frac{4}{3}.$$

Przykład 2

Z kawałka drewna w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości trzy razy dłuższej niż krawędź podstawy i objętości $750\sqrt{3} \text{ dm}^3$ mamy wykonać klocek. Klocek ten ma mieć kształt walca wpisanego w graniastosłup (przy czym podstawy walca są wpisane w podstawy graniastosłupa). Oblicz objętość jaką zajmują odpady. Wartość podaj z dokładnością do 1 dm^3 . Przyjmij $\pi \approx 3,14$.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że $h = 3a$.

$$\text{Stąd } V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}.$$

A więc otrzymujemy równanie

$$\frac{3a^3\sqrt{3}}{4} = 750\sqrt{3}$$

$$a^3 = 1000$$

$$a = 10 \text{ [dm]}$$

$$\text{Stąd } h = 30 \text{ [dm]}.$$

Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a jest równa

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ [dm]}.$$

$$\text{Objętość walca jest równa } V_w = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot 30 = 250\pi \text{ [dm}^3\text{]}.$$

Objętość odpadów to różnica między objętością walca, a objętością graniastosłupa, czyli:

$$(750\sqrt{3} - 250\pi) \text{ dm}^3 \approx 1299 \text{ dm}^3 - 785 \text{ dm}^3 = 514 \text{ dm}^3.$$

Przykład 3

Podstawą **graniastosłupa prostego** jest trójkąt o bokach długości 4, 5 i 7. Wysokość tego graniastosłupa jest równa $H = 16$. Obliczymy pole przekroju osiowego walca wpisanego w ten graniastosłup.

Rozwiązanie:

Ponieważ podstawą tego graniastosłupa jest trójkąt o bokach długości $a = 4$, $b = 5$ i $c = 7$, który nie jest trójkątem prostokątnym ponieważ $7^2 \neq 4^2 + 5^2$, jego pole policzymy ze wzoru Herona:

$$p = \frac{4+5+7}{2} = 8$$

$$P_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = 4\sqrt{6}$$

Obliczymy długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt:

$$\text{Otrzymujemy } r = \frac{P_{\Delta}}{p} = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

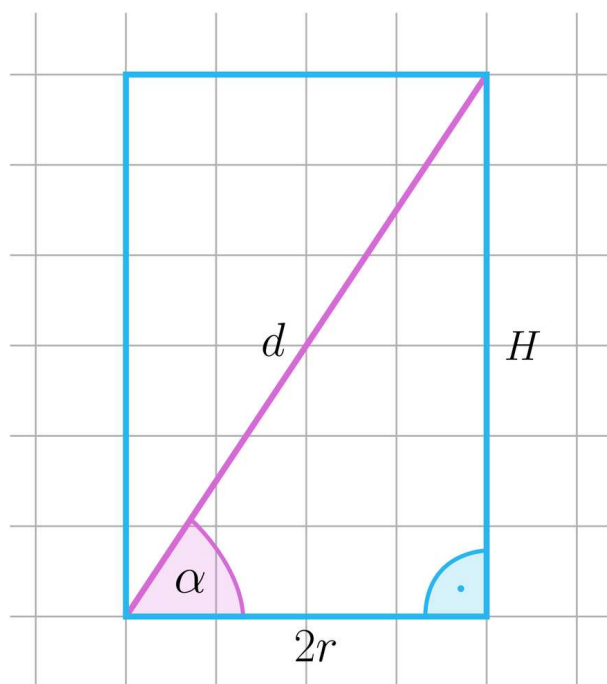
Przekrój osiowy walca jest prostokątem o bokach długości $2r$ i H , czyli jego pole jest równe $P = 2rH = 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 16 = 16\sqrt{6}$.

Przykład 4

Przekątna przekroju osiowego walca, równa d nachylona jest do płaszczyzny podstawy walca pod kątem α . Wykażemy, że objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego opisanego na tym walcu jest równa $\frac{1}{2}d^3 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu posłużymy się przekrojem osiowym walca, który jest prostokątem o bokach H i $2r$.



Z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\sin \alpha = \frac{H}{d}$$

$$H = d \sin \alpha$$

oraz

$$\cos \alpha = \frac{2r}{d}$$

$$2r = d \cos \alpha$$

Ponieważ średnica okręgu wpisanego w kwadrat jest równa długości jego boku, objętość graniastosłupa możemy obliczyć następująco:

$$\begin{aligned} V &= (2r)^2 \cdot H = d^2 \cos^2 \alpha \cdot d \sin \alpha = d^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{2} d^3 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} d^3 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Słownik

graniastosłup opisany na walcu

graniastosłup, którego podstawy są wielokątami opisanymi na podstawach walca

graniastosłup prawidłowy

graniastosłup prosty, którego podstawami są wielokąty foremne

graniastosłup prosty

graniastosłup, którego ściany boczne są prostokątami

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną przedstawiającą wielokąty, które mogą być podstawami graniastoslupa opisanego na walcu, a następnie rozwiąż polecenia.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Di7lJInuW>

Polecenie 2

Na podstawie informacji zawartych w prezentacji multimedialnej oceń prawdziwość zdań.

Walec można wpisać w graniastosłup prosty o podstawie:

Zdanie	Prawda	Fałsz
kwadratu o boku 5 cm	☐	☐
rombu o boku 5 cm	☐	☐
trapezu o bokach 5 cm, 5 cm, 6 cm, 10 cm	☐	☐
czworokąta o bokach 7 cm, 2 cm, 5 cm, 10 cm	☐	☐

Polecenie 3

Przypomnij sobie własności wielokątów foremnych. Odpowiedz na pytanie.

Czy w każdy graniastosłup prawidłowy można wpisać walec? Kliknij w odpowiednie pole wyboru.

Tak	Nie
☐	☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



W graniastosłup prawidłowy czworokątny o przekątnej podstawy równej 6 i wysokości 8 wpisano walec. Objętość tego walca jest równa:

☐ 16π

☐ 36π

☐ 18π

☐ 24π

Ćwiczenie 2



Objętość walca wpisanego w sześćcian o przekątnej długości 6 jest równa:

☐ $5\pi\sqrt{3}$

☐ $\frac{27}{4}\pi$

☐ $12\pi\sqrt{3}$

☐ $6\pi\sqrt{3}$

Ćwiczenie 3



Podstawą graniastopu prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 12 cm i 6 cm oraz ramionach długości 10 cm. Wysokość graniastopu ma długość 20 cm. Oceń prawdziwość zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Objętość graniastopu jest liczbą większą od 1800 cm^3 .	☐	☐
Graniastop ten można opisać na walcu.	☐	☐
Graniastop ten można wpisać w walec.	☐	☐

Ćwiczenie 4



W graniastop prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 6 i wysokości 12 wpisano walec. Oceń prawdziwość następujących zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Promień podstawy walca jest równy 6.	☐	☐
Promień podstawy walca jest równy $3\sqrt{3}$.	☐	☐
Pole powierzchni bocznej walca jest równe 144π .	☐	☐

Ćwiczenie 5



Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o boku 16. Oblicz objętość graniastopu prawidłowego trójkątnego opisanego na tym walcu. Podaj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku. Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.

	Odpowiedź
cyfra setek	
cyfra dziesiątek	
cyfra jedności	

Ćwiczenie 6



Podstawą graniastopu prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 10 i 20. W graniastopu ten wpisano walec o objętości 300π . Oblicz wysokość tego walca.

Ćwiczenie 7



Podstawą graniastopu jest deltoid o bokach długości 4, 4, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$. Krótsza przekątna deltoidu dzieli go na dwa trójkąty: prostokątny i równoboczny. Krótsza przekątna tego graniastopu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole przekroju osiowego walca wpisanego w ten graniastop.

Ćwiczenie 8



Podstawą graniastopu prostego o wysokości długości h jest romb o kącie ostrym α . Krótsza przekątna tego graniastopu jest nachylona do płaszczyzny podstawy również pod kątem α . Oblicz objętość walca wpisanego w ten graniastop.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kantor – Szczęśniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Walec wpisany w graniastosłup

Grupa docelowa: Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony.

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wymienia własności graniastosłupa opisanego na walcu,
- stosuje wzory na pola powierzchni i objętość graniastosłupów oraz walca.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- lekcja odwrócona,
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca w parach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- projektor multimedialny/ tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz przypomnienie wiadomości o objętości graniastosłupa, okręgu wpisanym w trójkąt równoboczny, prostokątny i dowolny.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat: „Walec wpisany w graniastosłup” i cele zajęć. Razem z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach analizują informacje zawarte w prezentacji multimedialnej. Rozwiązują polecenie 2 i polecenie 3. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów i wyjaśnia wątpliwości.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 4 grupy. Uczniowie, metodą ligi zadaniowej, rozwiązują ćwiczenia 1 – 6 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa i zostaje nagrodzona za aktywność. Wybrani uczniowie omawiają rozwiązania na forum klasy. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Po dzisiejszej lekcji powinienem/ powinnam zapamiętać, że...”.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Modele brył](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana jako uzupełnienie lekcji „Okrąg wpisany w wielokąt”.