Metoda przeciwnych współczynników rozwiazywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi zapisanego w postaci ogólnej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Metoda przeciwnych współczynników rozwiazywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi zapisanego w postaci ogólnej

Źródło: Denys Rodionenko, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Aby rozwiązać algebraicznie układ równań liniowych, możemy przekształcać ten układ równoważnie tak, aby został doprowadzony do najprostszej postaci.

Postępując w ten sposób, po każdym przekształceniu otrzymujemy układ prostszy, ale równoważny danemu. Istnieje kilka metod algebraicznych pozwalających rozwiązać układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

W tym materiale zajmiemy się jedną z nich – metodą przeciwnych współczynników.

> **Twoje cele**
>
> - Przekształcisz układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny.
> - Rozwiążesz układ równań liniowych metodą przeciwnych współczynników.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdzie a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 nie są równocześnie równe zero. W powyższym układzie x oraz y oznaczają niewiadome, a_1, a_2, b_1 oraz b_2 – współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y, natomiast c_1 i c_2 nazywamy wyrazami wolnymi.

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem takiego układu równań jest każda para liczb spełniających jednocześnie wszystkie równania danego układu równań.

Przy czym taki układ równań może mieć jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub może nie mieć rozwiązania.

Definicja: Równoważne układy równań

Dwa układy równań liniowych nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Twierdzenie: Równoważny układ równań

Jeśli obie strony każdego z równań (lub jednego z nich) danego układu równań pomnożymy przez dowolne liczby różne od zera, a następnie równania te dodamy stronami i tak otrzymanym równaniem zastąpimy jedno z równań układu, to otrzymany układ równań jest równoważny danemu.

Przykład 1

Rozwiążemy układ równań, stosując powyższe twierdzenie.

$$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez liczbę (-1).

$$\begin{cases} -2x + y = 3 \mid \cdot (-1) \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Równania dodajemy stronami. Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$+\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$3x = 6 \mid : 3$$

$x = 2$

Otrzymanym w ten sposób równaniem zastępujemy pierwsze z równań układu.

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Postawiamy otrzymaną wartość x do drugiego z równań układu.

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 + y = 9 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb będącą rozwiązaniem danego układu równań.

(Sprawdź!)
Przykład 2

Dany jest układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$.

Rozwiążemy ten układ, stosując poznane twierdzenie.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez liczbę (-2), a obie strony drugiego równania przez liczbę 3.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \mid \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 10 \mid \cdot 3 \end{cases}$$

Wówczas współczynniki przy niewiadomej x będą liczbami przeciwnymi.

Otrzymane równania dodajemy stronami. Rozwiązujemy równanie z niewiadomą y.

$$+\begin{cases} -6x + 4y = -4 \\ 6x + 9y = 30 \end{cases}$$

$$13y = 26 \mid : 13$$

$y = 2$

Otrzymanym w ten sposób równaniem zastępujemy pierwsze z równań układu.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

Postawiamy otrzymaną wartość y do drugiego z równań układu.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 6 = 10 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb będącą rozwiązaniem danego układu równań.

(Sprawdź!)
Ważne!

Rozwiazywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników polega na:

1. pomnożeniu obu stron jednego lub każdego równania przez dowolną liczbę różną od zera, tak aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki;
2. dodaniu do siebie równań stronami i obliczeniu jednej z niewiadomych;
3. zapisaniu układu równań, w którym jedno z równań zastępujemy otrzymanym równaniem;
4. obliczeniu jednej niewiadomej;
5. podstawieniu otrzymanej wartości niewiadomej do drugiego równania;
6. obliczeniu wartości drugiej niewiadomej.

Przykład 3

Aby rozwiązać bardziej skomplikowany układ dwóch równań liniowych, musimy każde z równań układu doprowadzić do najprostszej postaci. Możemy dodawać do obu stron równania to samo wyrażenie oraz mnożyć obie strony równania przez to samo niezerowe wyrażenie.

Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{4x-y}{3} = 1 \\ 2(x-y) + 3 = x - 3y + 1 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez liczbę 6, a w drugim równaniu opuszczamy nawias.

$$\begin{cases} 3x+3y+8x-2y=6 \\ 2x-2y+3=x-3y+1 \end{cases}$$

Redukujemy wyrazy podobne w każdym z równań.

$$\begin{cases} 11x+y=6 \\ x+y=-2 \end{cases}$$

Po doprowadzeniu układu równań do najprostszej postaci, znajdziemy jego rozwiązanie stosując metodę przeciwnych współczynników.

Mnożymy więc drugie równanie przez liczbę (-1).

$$\begin{cases} 11x+y=6 \\ x+y=-2 \mid \cdot (-1) \end{cases}$$

Otrzymane równania dodajemy stronami. Rozwiązujemy równanie z niewiadomą y.

$$+\begin{cases} 11x+y=6 \\ -x-y=2 \end{cases}$$

$$10x=8 \mid : 10$$

$$x=0,8$$

Otrzymanym w ten sposób równaniem zastępujemy jedno z równań układu.

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x=0,8 \end{cases}$$

Postawiamy otrzymaną wartość x do drugiego z równań układu.

$$\begin{cases} y+0,8=-2 \\ x=0,8 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} y=-2,8 \\ x=0,8 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb

$$\begin{cases} y=-2,8 \\ x=0,8 \end{cases}$$

będącą rozwiązaniem danego układu równań.

Przykład 4

Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} -\sqrt{3}x + 2y = 3 \\ x - \frac{2\sqrt{3}}{3}y = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez $\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} -\sqrt{3}x + 2y = 3 \\ \sqrt{3}x - 2y = -3 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami.

$$\frac{+\begin{cases} -\sqrt{3}x + 2y = 3 \\ \sqrt{3}x - 2y = -3 \end{cases}}{0 = 0}$$

Otrzymaliśmy tożsamość $0 = 0$.

Oznacza to, że układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań postaci

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Jest to układ równań nieoznaczony (układ równań zależnych).
Przykład 5

Znajdź rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{3} - \frac{2y+3x}{5} = \frac{1}{15} \\ (x+1)^2 - (y+1)^2 = x^2 - y^2 + 15 \end{cases}.$$

Przekształcając równoważnie każde z równań, doprowadzamy układ równań do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{3} - \frac{2y+3x}{5} = \frac{1}{15} \;\Big|\cdot 15 \\ x^2 + 2x + 1 - y^2 - 2y - 1 = x^2 - y^2 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 5y - 6y - 9x = 1 \\ 2x - 2y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 15 \end{cases}$$

Zastosujemy teraz metodę przeciwnych współczynników, aby znaleźć rozwiązanie tego układu.

Aby otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej x, pomnożymy pierwsze równanie przez liczbę (-2).

$$\begin{cases} x - y = 1 \mid \cdot (-2) \\ 2x - 2y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = -2 \\ 2x - 2y = 15 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ równań, w którym przeciwne współczynniki znajdują się zarówno przy niewiadomej x, jak i przy niewiadomej y.

Dodając równania stronami otrzymujemy:

$$\frac{+\begin{cases} -2x + 2y = -2 \\ 2x - 2y = 15 \end{cases}}{0 = 13}$$

A zatem ten układ równań jest sprzeczny i nie posiada rozwiązania.

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań postaci

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

równoważne układy równań

układy równań, które mają ten sam zbiór rozwiązań

metoda przeciwnych współczynników

metoda polegająca na pomnożeniu obu stron jednego lub każdego równania przez dowolną liczbę różną od zera, tak aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki, dzięki czemu po dodaniu do siebie równań stronami można obliczyć jedną z niewiadomych

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zastosowania metody przeciwnych współczynników do rozwiązywania układów równań przedstawionymi w animacji. Następnie wykonaj samodzielnie polecenie 2.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1C2B2dg4

Film nawiązujący do treści materiału na temat metod przeciwnych współczynników rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Polecenie 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{5}{6} \\ x - y = 0,5 \end{cases}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} \frac{y+x}{2} + \frac{-2x-1}{5} = 1 \\ (x-1)(y+2) = xy - 11 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz miary kątów trójkąta ABC, wiedząc, że $|AC| = |BC|$ oraz $|\sphericalangle ABC| = x + 3y$, $|\sphericalangle ACB| = 60 - 2y$, $|\sphericalangle BAC| = 2x + 20$.

Ułóż odpowiednie układy równań i rozwiąż je metodą przeciwnych współczynników.

Ćwiczenie 8

Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia prostych, należy rozwiązać układ równań zbudowany ze wzorów tych funkcji. Korzystając z metody przeciwnych współczynników rozwiązywania układów równań, znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki zawierają się w prostych a, b, c danych równaniami:

$$a:\ x - 5y = 8,$$

$$b:\ x = -2,$$

$$c:\ 4x + 5y = 7.$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Metoda przeciwnych współczynników rozwiązywania układu równań z dwiema niewiadomymi zapisanego w postaci ogólnej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny
- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewidomymi metodą przeciwnych współczynników
- tworzy algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane z poznanymi sposobami rozwiązania układów równań.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” .
2. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.
3. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają animację i konsultują wykonanie umieszczonego pod nim polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1- 4.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 5-8.

Materiały pomocnicze:

Metoda przeciwnych współczynników rozwiązywania układów równań

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez uczniów do utrwalenia wiadomości z lekcji oraz podczas lekcji podsumowujących metody rozwiązywania układów równań.