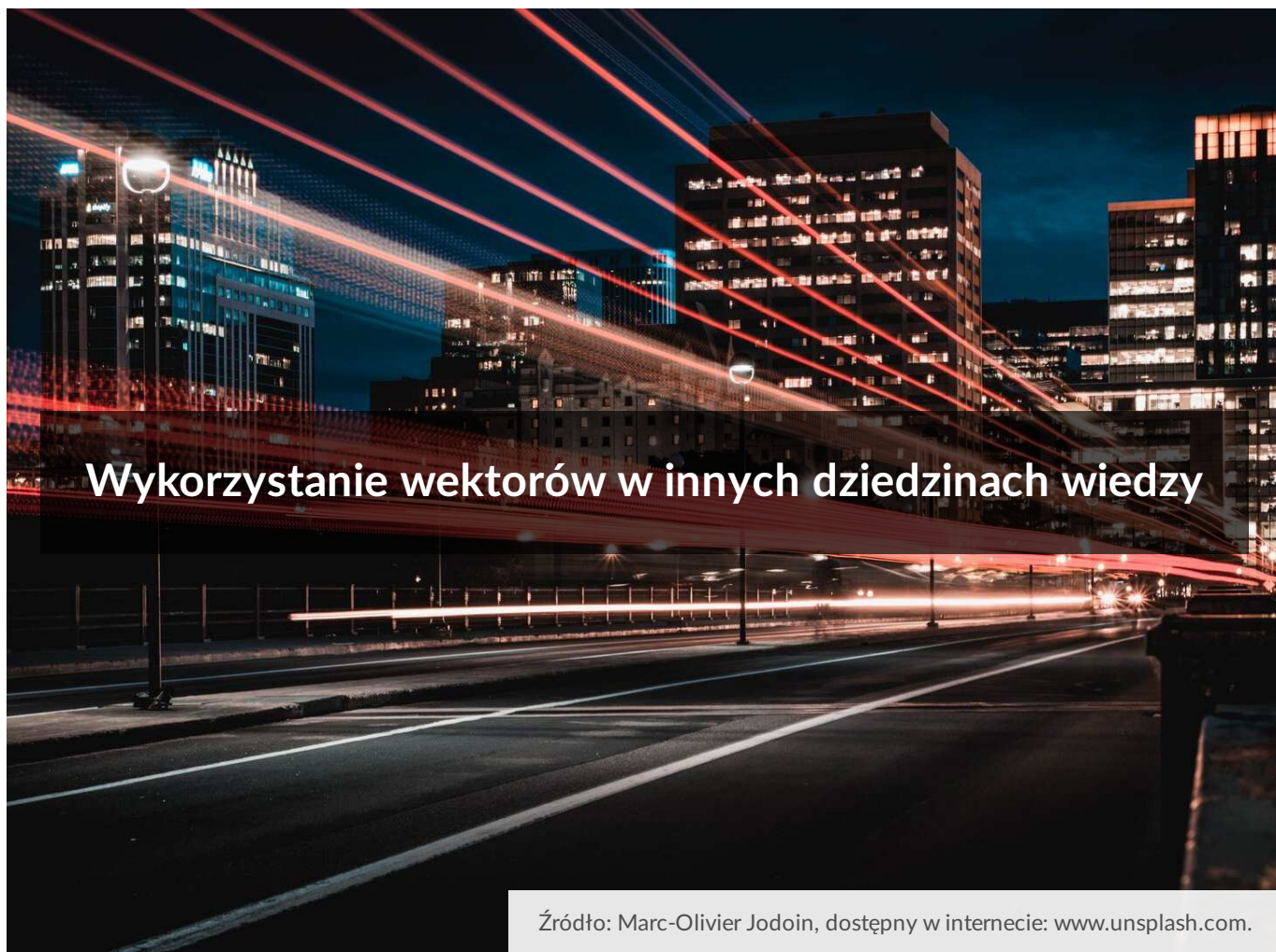




Wykorzystanie wektorów w innych dziedzinach wiedzy

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie wektorów w innych dziedzinach wiedzy

Źródło: Marc-Olivier Jodoin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym rozdziale poznamy kilka zastosowań wektorów poza matematyką. Są one bardzo często używane do opisu pojęć fizycznych ze względu na cechy, które posiadają: kierunek, zwrot i wartość.

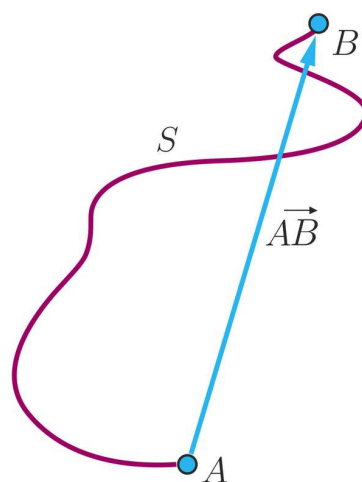
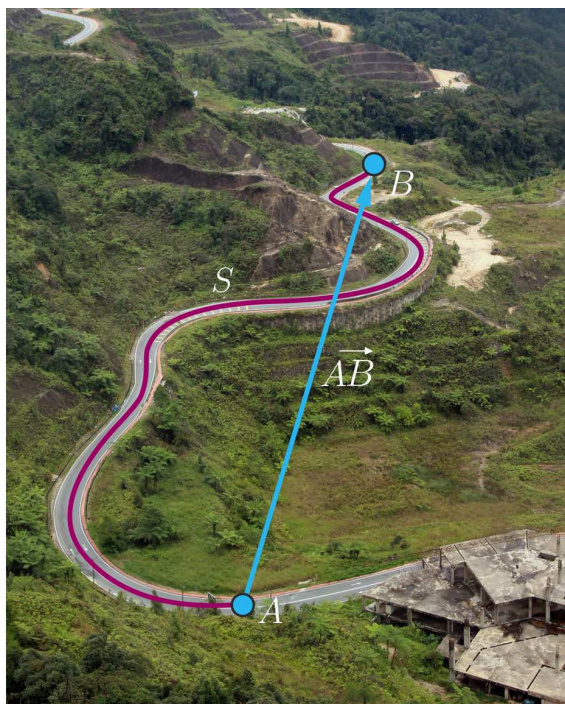
Twoje cele

- Poznasz zastosowanie wektorów w fizyce.
- Zastosujesz wektory do rozwiązywania zadań z fizyki.

Przeczytaj

WEKTOR JAKO PRZEMIESZCZENIE

Jedną z podstawowych wielkości fizycznych jest **przemieszczenie**, czyli wektor o początku w punkcie będącym położeniem początkowym ciała i końcu w punkcie będącym położeniem końcowym.



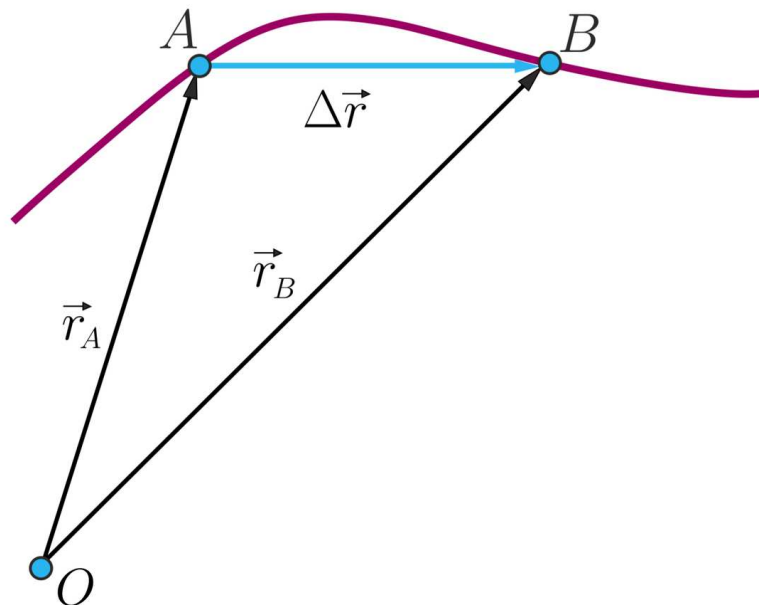
Jeżeli wektor przemieszczenia ma tę samą długość co tor ruchu, to taki ruch nazywamy **ruchem prostoliniowym**. W przypadku **ruchu krzywoliniowego** długość toru ruchu jest większa niż długość wektora przemieszczenia.

Przemieszczenie opisane jako “5 metrów” możemy utożsamić z wektorem na osi o współrzędnej [5], jeśli przemieszczenie nastąpiło w stronę, w którą liczby rosną (zwyczajowo w prawo), lub [−5], jeśli **przemieszczenie** nastąpiło w stronę, w którą liczby maleją (zwyczajowo w lewo). W obu przypadkach długość wektora przemieszczenia jest równa 5.

WEKTOR POŁOŻENIA

Jeśli na płaszczyźnie wyróżnimy jeden punkt, nazwijmy go O , to położenie wszystkich pozostałych punktów możemy określać względem tego wyróżnionego punktu. To znaczy: wektor o początku w punkcie O i końcu w punkcie A ($\overrightarrow{OA}$) nazywamy wektorem położenia lub wektorem wodzącym punktu A . Jeżeli punkt zmienia swoje położenie względem

wyróżnionego punktu, dochodzi jednocześnie do zmiany wektora położenia. Na rysunku poniżej obiekt znajdujący się w punkcie A przemieścił się do punktu B . Jeśli przez $\vec{r}_A$ oznaczmy wektor położenia punktu A , przez wektor $\vec{r}_B$ położenia punktu B , zaś przez $\Delta \vec{r}$ wektor $\overrightarrow{AB}$, wówczas $\vec{r}_A + \Delta \vec{r} = \vec{r}_B$, czyli $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Wektor $\Delta \vec{r}$ nazywamy zmianą wektora położenia.



PRĘDKOŚĆ WEKTOROWA

Prędkość wektorową średnią ($\vec{v}_s$) definiujemy jako iloraz zmiany wektora położenia ($\Delta \vec{r}$) do czasu (Δt), w jakim ta zmiana nastąpiła.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad \vec{v}_s = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Długość wektora opisującego prędkość nazywamy **szybkością**.

Przykład 1

Obliczymy średnią prędkość wektorową, jeśli ciało porusza się z punktu $A = (2; 1)$ do punktu $B = (5; -3)$ w czasie $\Delta t = 2$.

Obliczymy współrzędne zmiany wektora położenia $\Delta \vec{r} = [5; -3] - [2; 1] = [3; -4]$.

Ponieważ średnia prędkość wektorowa to iloraz zmiany wektora przemieszczenia przez czas, w którym ta zmiana zachodzi otrzymujemy $\vec{v}_s = \frac{[3; -4]}{2} = [1,5; -2]$. Zatem średnia prędkość wektorowa ma współrzędne $[1,5; -2]$.

PRZYSPIESZENIE JAKO WEKTOR

Przyspieszenie średnie (ozn. $\vec{a}$) definiujemy jako stosunek zmiany wektora prędkości (ozn. $\Delta \vec{v}$) do czasu (ozn. Δt), w jakim ta zmiana nastąpiła.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

SIŁA JAKO WEKTOR

W mechanice klasycznej siłę (ozn. $\vec{F}$) można zdefiniować jako iloczyn masy (ozn. m) i przyspieszenia (ozn. $\vec{a}$):

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Przykład 2

Obliczymy współrzędne wektora siły, która ciała o masie 5 kg nadaje przyspieszenie opisujące się wektorem o współrzędnych $[3; 2]$.

Ponieważ siła jest iloczynem masy i wektora przyspieszenia, więc

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = 5 \cdot [3; 2] = [15; 10]. \text{ Zatem opisana siła ma współrzędne } [15; 10].$$

PRACA JAKO ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW

Ogólnie praca to miara ilości energii przekazywanej między układami. Jeżeli ruch ciała jest prostoliniowy a wektor siły ($\vec{F}$) jest stały, pracę (W) tej siły określa wzór

$$W = \vec{F} \circ \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \angle(\vec{F}, \vec{s}), \text{ gdzie } \vec{s} \text{ jest wektorem przemieszczenia, zaś}$$

$\angle(\vec{F}, \vec{s})$ jest kątem między wektorem siły a wektorem przemieszczenia. W lekcji

o temacie "Działania na wektorach w układzie współrzędnych" opisaliśmy szczegółowo zagadnienie iloczynu skalarnego, który pojawia się w tym wzorze.

Przykład 3

Obliczymy pracę wykonaną nad ciałem, które przemieściło się z punktu $A = (-2; 3)$ do punktu $B = (3; 1)$ pod wpływem siły o współrzędnych $[3; 4]$.

Wektor przemieszczenia ma współrzędne $[3 - (-2); 1 - 3] = [5; -2]$. Zatem praca wykonana pod wpływem tej siły ma wartość

$$[3; 4] \circ [5; -2] = 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) = 15 - 8 = 7.$$

Słownik

premieszczenie

wektor o początku w punkcie będącym położeniem początkowym ciała i końcu w punkcie będącym położeniem końcowym

ruch prostoliniowy, ruch krzywoliniowy

jeżeli wektor przemieszczenia ma tę samą długość co tor ruchu, to taki ruch nazywamy ruchem prostoliniowym; jeśli długość toru ruchu jest większa niż długość wektora przemieszczenia, mówimy o ruchu krzywoliniowym

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w galerii i na ich podstawie rozwiąż test. Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Cechy potrzebne do opisu siły to:

☐ wartość/liczba

☐ kierunek

☐ zwrot

Cechy potrzebne do opisu masy to:

☐ kierunek

☐ zwrot

☐ wartość/liczba

Wartość wektora przemieszczenia jest zawsze:

☐ większa lub równa drodze pokonanej przez ciało

☐ mniejsza lub równa drodze pokonanej przez ciało

☐ równa drodze pokonanej przez ciało

Prędkość wektorowa ciała, które przemieściło się z punktu $A = (-3;1)$ do punktu $B = (3;5)$ w czasie 2 to:

☐ $[0;3]$

☐ $[-3; -2]$

☐ $[3;2]$

Wektor przyspieszenia ciała o masie 5 pod wpływem siły o wektorze $[5;10]$ to:

☐ $[5;10]$

☐ $[1;2]$

☐ $[25;50]$

Praca wykonana przez siłę o wektorze $[2;1]$ wykonana nad ciałem, którego przemieszczenie wyraża się wektorem $[4;3]$ ma wartość:

☐ 5

☐ 2

☐ 11

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary pojęcie z jego definicją.

prędkość wektorowa

wektor o początku w punkcie początkowym drogi i końcu w punkcie końcowym drogi

siła

zmiana prędkości w czasie

przyspieszenie

wektor o początku w pewnym wyróżnionym punkcie i końcu w punkcie A

przemieszczenie

zmiana wektora położenia w czasie

wektor położenia punktu A

iloczyn skalarny siły i przemieszczenia

praca

iloczyn masy i przyspieszenia

Ćwiczenie 2



Uzupełnij tekst brakującymi słowami. Przeciągnij i upuść.

Przemieszczenie (wektor) to wektor łączący położenie początkowe z . Dla dowolnego ruchu krzywoliniowego wartość tego wektora jest bądź równa pokonanej przez ciało. Równość ma miejsce wówczas, gdy ruch odbywa się po linii .

Jeżeli punkt materialny porusza się od położenia A do położenia B , jego przemieszczenie przedstawia wektor $\vec{AB}$. Tor ruchu punktu materialnego w ruchu nie pokrywa się z wektorem przemieszczenia $\vec{AB}$, a droga S będąca długością tego fragmentu toru, jest lub równa wartości .

końcowym

przemieszczenia

większa

mniej

krzywoliniowym

drodze

przesunięcia

prostej

Ćwiczenie 3



Uzupełnij tekst brakującymi słowami. Przeciągnij i upuść.

Położenie – wielkość fizyczna określająca danego ciała w przestrzeni względem wybranego układu . Wielkość ta, w zależności od kontekstu, w jakim jest użyta, może występować jawnie jako wielkość fizyczna określająca kierunek i odległości danego obiektu od wybranego punktu , który umiejscawia się zwykle w początku układu współrzędnych. Wówczas wektor punktu odniesienia do tego ciała nosi nazwę wektora .

odniesienia

umiejscowienie

współrzędnych

wodzącego

wektorowa

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Można udowodnić twierdzenie: Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u} = [a;b]$, $\vec{v} = [c;d]$ jest równy $\vec{u} \circ \vec{v} = ac + bd$. Korzystając z przytoczonego twierdzenia i definicji pracy podanej w lekcji, oblicz pracę wykonaną przez daną siłę, jeśli zaszło dane przesunięcie.

Wektor siły $\vec{F}$	Wektor przesunięcia $\vec{s}$	Praca wykonana przez siłę $W = \vec{F} \circ \vec{s}$
$[2; 0]$	$[1; 3]$	
$[3; 2]$	$[2; -1]$	
$[-2; 3]$	$[2; 1]$	
$[3; -4]$	$[8; 6]$	

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie prawidłowe zastosowania siły w mechanice klasycznej.

☐ Dla masy $m = 3$ oraz przyspieszenia $\vec{a} = [2; 3]$ siła wynosi $\vec{F} = [6; 3]$

☐ Dla masy $m = 4$ oraz przyspieszenia $\vec{a} = [1; 3]$ siła wynosi $\vec{F} = [4; 1]$

☐ Dla masy $m = 5$ oraz przyspieszenia $\vec{a} = [2; 1]$ siła wynosi $\vec{F} = [10; 5]$

☐ Dla masy $m = 6$ oraz przyspieszenia $\vec{a} = [2; 1]$ siła wynosi $\vec{F} = [12; 6]$

Ćwiczenie 7



Korzystając z definicji siły w mechanice klasycznej, uzupełnij tabelkę.

przyspieszenie ciała $\vec{a}$	siła $\vec{F}$	m - masa ciała
[2; 4]	[6; 12]	
[2; 3]	[8; 12]	
[4; 3]	[16; 12]	
[3; 4]	[6; 8]	

Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie wektorów w innych dziedzinach wiedzy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Poznasz zastosowanie wektorów w fizyce.
- Zastosujesz wektory do rozwiązywania zadań z fizyki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
2. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
3. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie wektora

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Wykorzystanie wektorów w innych dziedzinach wiedzy”.