



Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając z wykresu funkcji?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając z wykresu funkcji?

Źródło: Clint Adair, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/photos/BW0vK-FA3eg>, domena publiczna.

Rachunek różniczkowy jest działem matematyki, który dostarcza wielu narzędzi do badania własności funkcji zmiennej rzeczywistej. Jednym z takich narzędzi jest iloraz różnicowy funkcji. W materiale omówimy, jak obliczyć iloraz różnicowy funkcji, gdy dany jest wykres tej funkcji. Bazując na wiedzy teoretycznej i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Odczytasz z wykresu funkcji informacje niezbędne do obliczenia ilorazu różnicowego funkcji.
- Wykorzystasz interpretację geometryczną ilorazu różnicowego funkcji.
- Obliczysz iloraz różnicowy funkcji, korzystając z wykresu funkcji.
- Zastosujesz pojęcie ilorazu różnicowego do rozwiązywania problemów matematycznych.

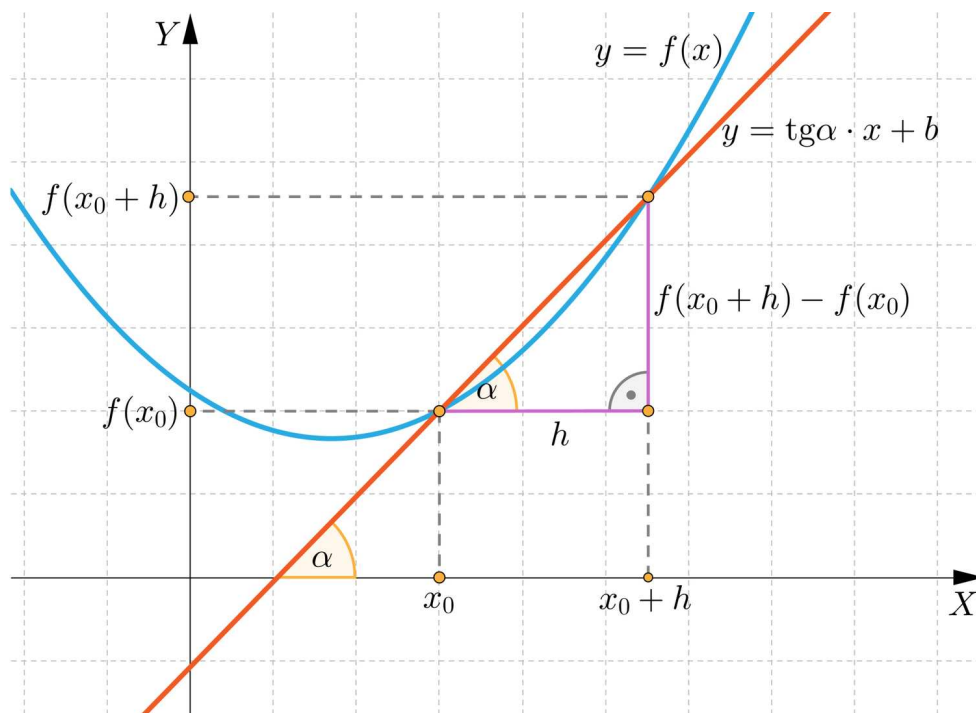
Przeczytaj

Do wyznaczania ilorazu różnicowego funkcji na podstawie jej wykresu wykorzystamy jego interpretację geometryczną.

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego funkcji

Założmy, że do prostej, która jest styczną do wykresu funkcji f , należą punkty o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0) + h)$, gdzie h nazywamy przyrostem argumentu oraz $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wówczas prosta przecina wykres funkcji w dwóch punktach, jak na poniższym rysunku.



Korzystając z trójkąta prostokątnego oraz definicji funkcji trygonometrycznej tangens, mamy zależność:

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Powyższe wyrażenie jest nazywane **ilorazem różnicowym funkcji**.

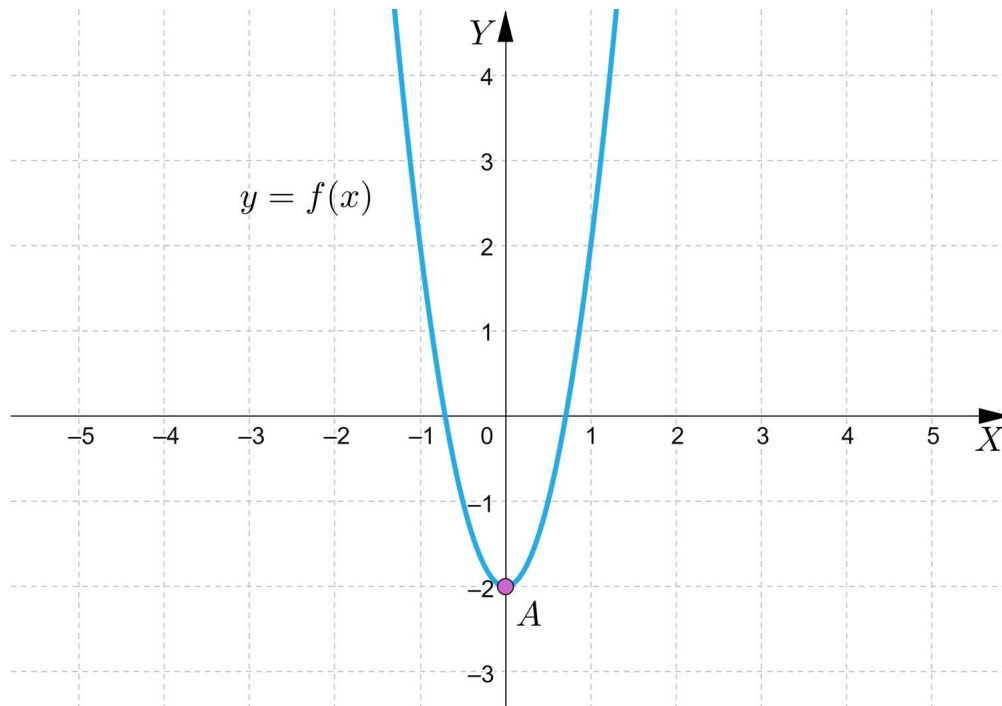
Wobec tego, aby wyznaczyć **iloraz różnicowy funkcji**, gdy dany jest **wykres tej funkcji**, musimy znać:

- współrzędne punktów przecięcia stycznej z wykresem funkcji lub

- współrzędne punktu, przez który ma być poprowadzona sieczna oraz wartość przyrostu h dla podanego argumentu.

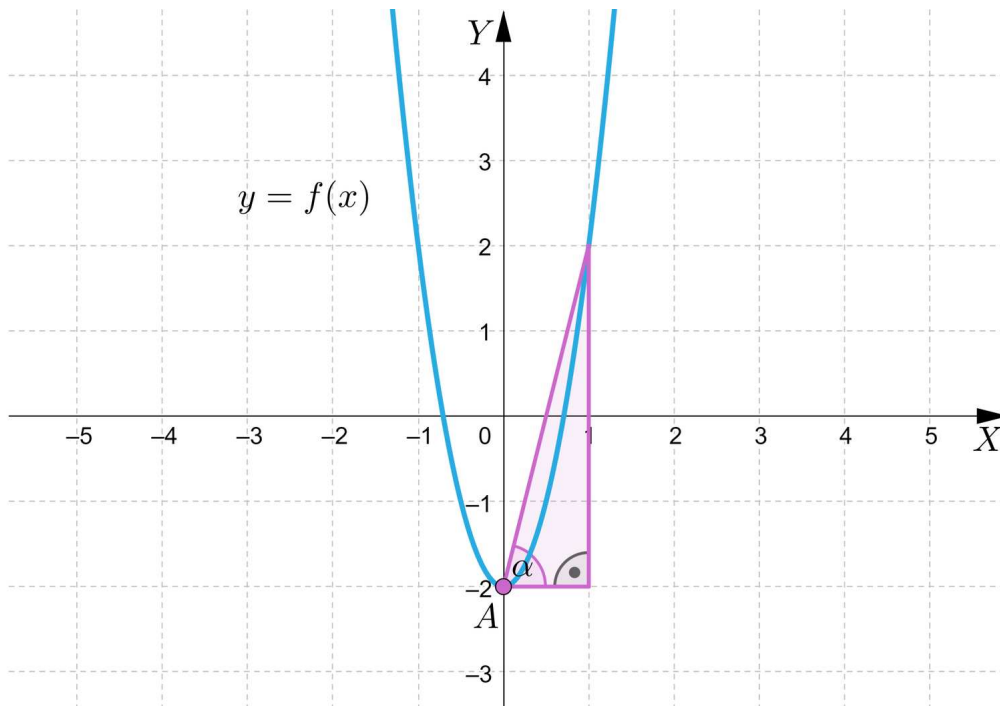
Przykład 1

Korzystając z wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = 4x^2 - 2$, wyznaczmy iloraz różnicowy tej funkcji w punkcie $A = (0, -2)$ i przyroście $h = 1$.



Rozwiązanie

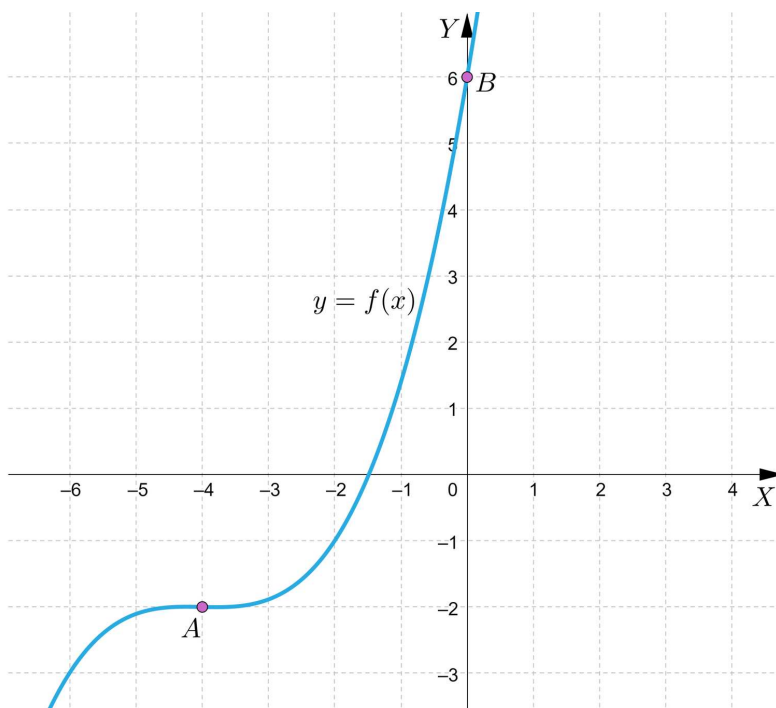
Zauważmy, że dla $h = 1$ możemy wyznaczyć trójkąt prostokątny, jak na poniższym rysunku.



Z rysunku odczytujemy, że $a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{1} = 4$, zatem iloraz różnicowy funkcji jest równy 4.

Przykład 2

Wyznamy iloraz różnicowy funkcji f , której wykres przedstawiono na poniższym rysunku, jeżeli sieczna do wykresu funkcji przechodzi przez punkty A i B .



Rozwiązanie

Z rysunku odczytujemy współrzędne zaznaczonych punktów: $A = (-4, -2)$, $B = (0, 6)$.

Zatem:

$$x_0 = -4,$$

$$f(x_0) = -2,$$

$$h = 4,$$

$$x_0 + h = 0,$$

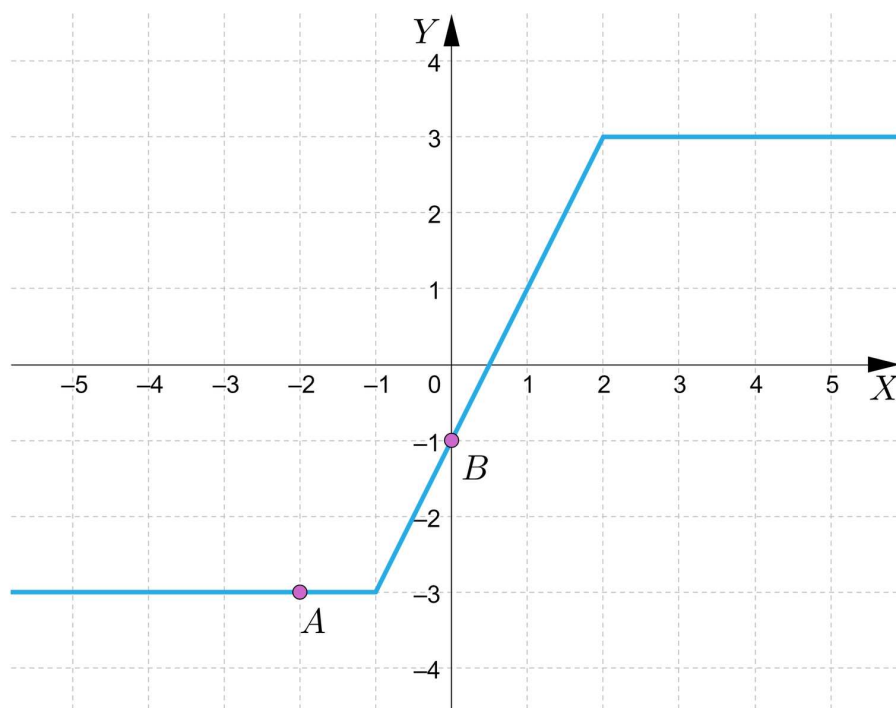
$$f(x_0 + h) = 6.$$

Wobec tego iloraz różnicowy funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku, jest równy:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{6-(-2)}{4} = 2.$$

Przykład 3

Obliczymy wartości ilorazów różnicowych funkcji w punkcie A i B z poniższego wykresu, gdy przyrost argumentu jest równy 4.



Rozwiązanie

Z rysunku odczytujemy, że $A = (-2, -3)$ oraz $B = (0, -1)$.

Gdy $A = (-2, -3)$ oraz $h = 4$ mamy:

$$x_0 = -2,$$

$$f(x_0) = -3,$$

$$x_0 + h = -2 + 4 = 2,$$

$$f(x_0 + h) = 3.$$

Wobec tego iloraz różnicowy funkcji w punkcie A wynosi:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{3-(-3)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Gdy $B = (0, -1)$ oraz $h = 4$ mamy:

$$x_0 = 0,$$

$$f(x_0) = -1,$$

$$x_0 + h = 4,$$

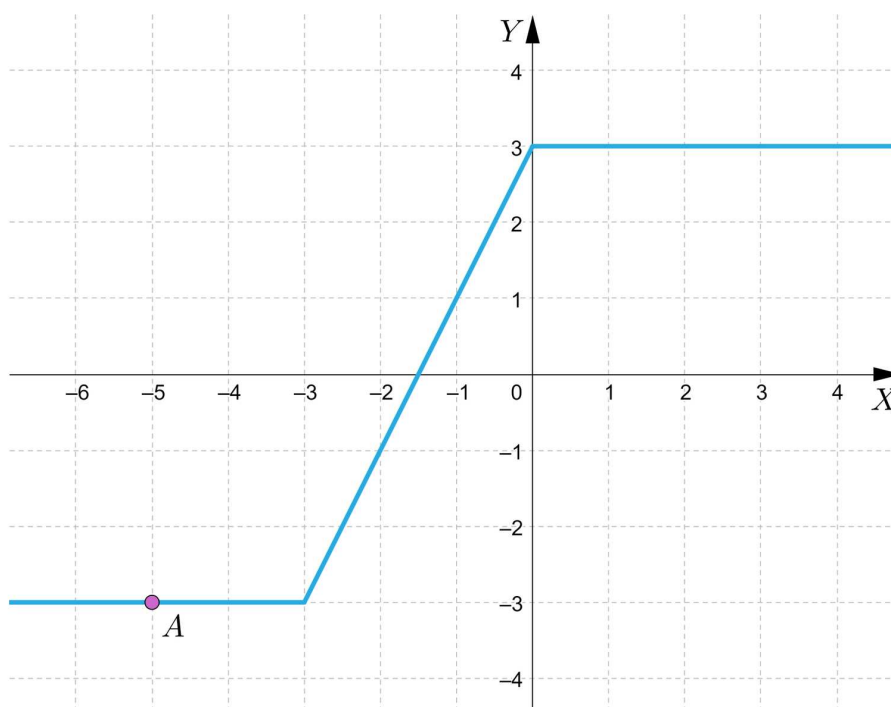
$$f(x_0 + h) = 3.$$

Wobec tego iloraz różnicowy funkcji w punkcie B wynosi:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{3-(-1)}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Przykład 4

Wyznamy wartość przyrostu h argumentu funkcji z rysunku, gdy $h > 5$ oraz iloraz różnicowy funkcji w punkcie A jest równy $\frac{1}{3}$.



Rozwiązanie

Z rysunku odczytujemy, że: $x_0 = -5$, $f(x_0) = -3$.

Zauważmy, że jeżeli $h > 5$, to $f(x_0 + h) = 3$.

Zatem korzystając ze wzoru na iloraz różnicowy funkcji $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{3} = \frac{3-(-3)}{h}, \text{ czyli } h = 18.$$

Przykład 5

Wykażemy, że jeśli funkcja f jest stała, to wartość ilorazu różnicowego tej funkcji w dowolnym punkcie x_0 wynosi 0.

Rozwiązanie

Jeżeli funkcja f jest stała, to można ją opisać za pomocą wzoru $f(x) = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

Wtedy dla dowolnego x zachodzi własność $f(x) = f(x + h)$, gdy $h \neq 0$.

Korzystając ze wzoru na iloraz różnicowy funkcji, otrzymujemy:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)-f(x_0)}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Słownik

iloraz różnicowy funkcji

stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu

wykres funkcji

zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y) , gdzie x należy do dziedziny funkcji, natomiast y jest wartością funkcji dla argumentu x

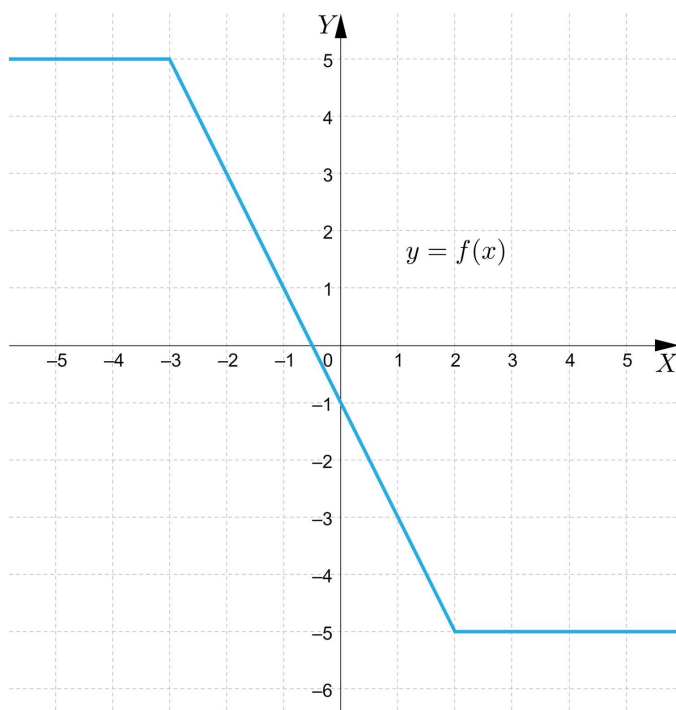
Aplet

Polecenie 1




Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w aplecie, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Polecenie 2

Na podstawie poniższego wykresu funkcji f wyznacz iloraz różnicowy, gdy $x_0 = -4$ oraz $h = 8$.



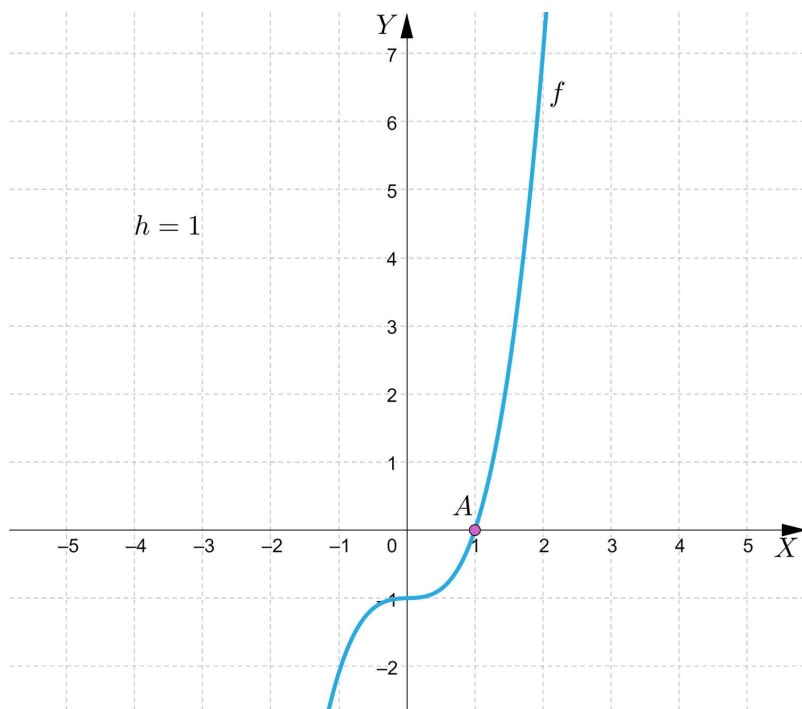
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest wykres funkcji f .



Zaznacz wartość ilorazu różnicowego w punkcie $A = (1, 0)$, gdy $h = 1$ oraz $f(2) = 7$:

$\frac{1}{7}$

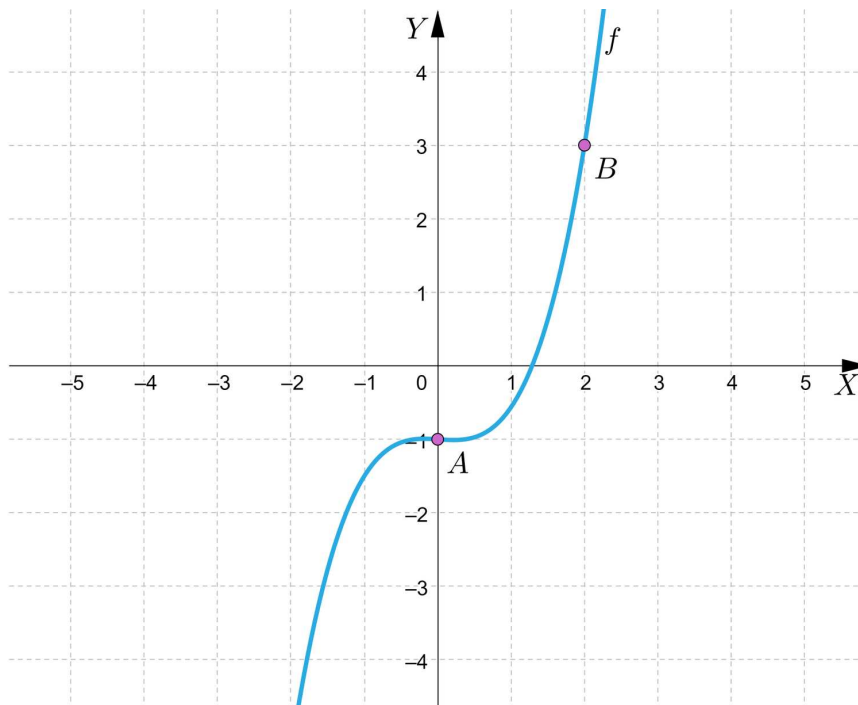
2

7

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji oraz zaznaczono punkty A i B , które należą do tego wykresu.



Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

Dla punktów A i B zachodzi równość: $f(x_0 + h) - f(x_0) = x - x_0$.

Tangens kąta nachylenia siecznej AB do osi odciętych jest równy 2.

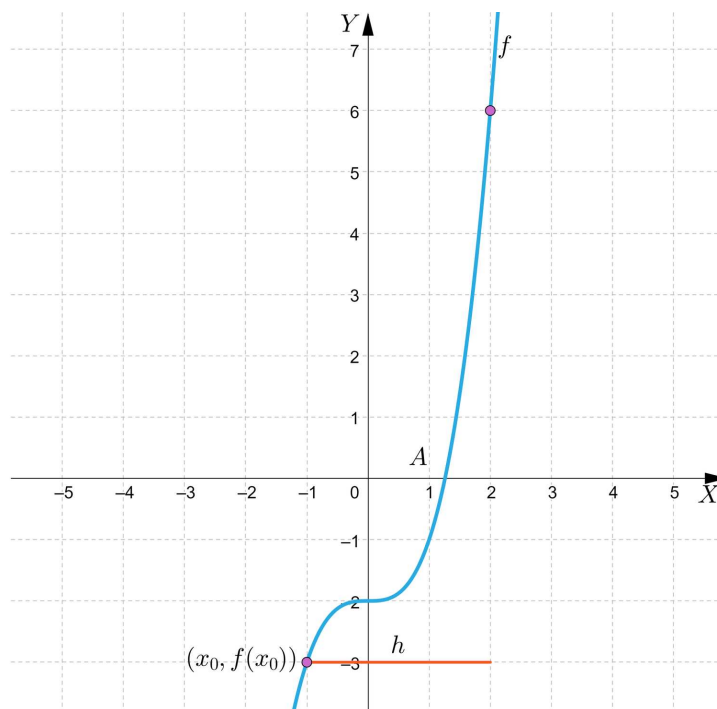
Tangens kąta nachylenia siecznej AB do osi odciętych jest równy $\frac{1}{2}$.

Jeżeli przyrost $h = 2$, to iloraz różnicowy funkcji w punkcie A wynosi 2.

Ćwiczenie 3



Dany jest wykres funkcji f .



Na podstawie rysunku wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Z wykresu funkcji odczytujemy:

$$x_0 = \boxed{},$$

$$f(x_0) = \boxed{},$$

$$x_0 + h = \boxed{},$$

$$f(x_0 + h) = \boxed{}.$$

Zatem:

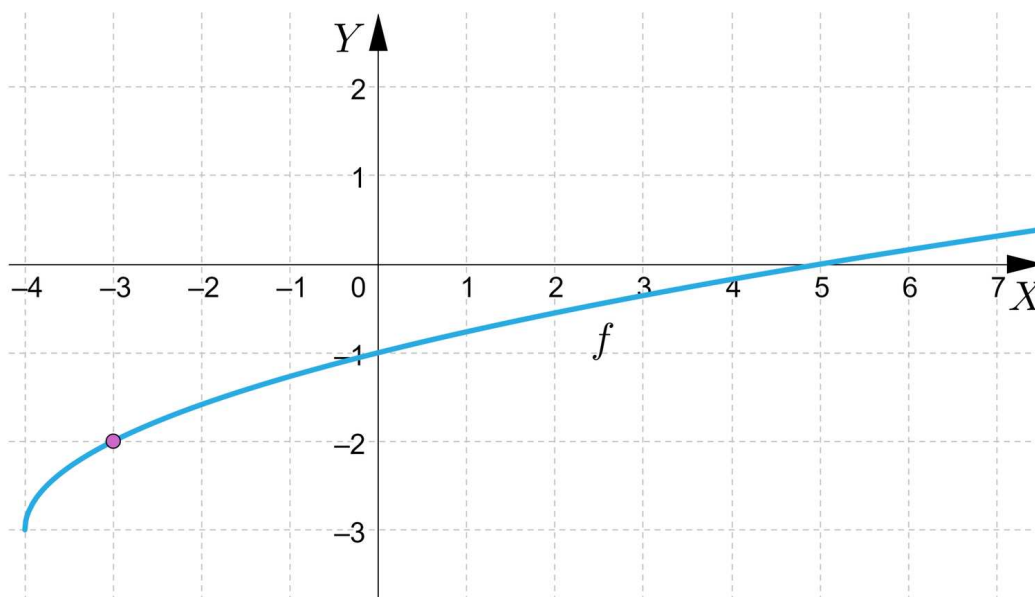
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \boxed{}.$$

-

Ćwiczenie 4



Na podstawie rysunku uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.



Jeżeli $x_0 = -3$, to $f(x_0) =$. Gdy przyrost argumentu $h = 8$, to $x_0 + h =$ oraz $f(x_0 + h) =$.

Wtedy iloraz różnicowy funkcji wynosi $\frac{1}{4}$.

Jeżeli $x_0 = 0$, to $f(x_0) =$. Gdy przyrost argumentu $h = 5$, to $x_0 + h =$ oraz $f(x_0 + h) =$.

Wtedy iloraz różnicowy funkcji wynosi $\frac{1}{5}$.

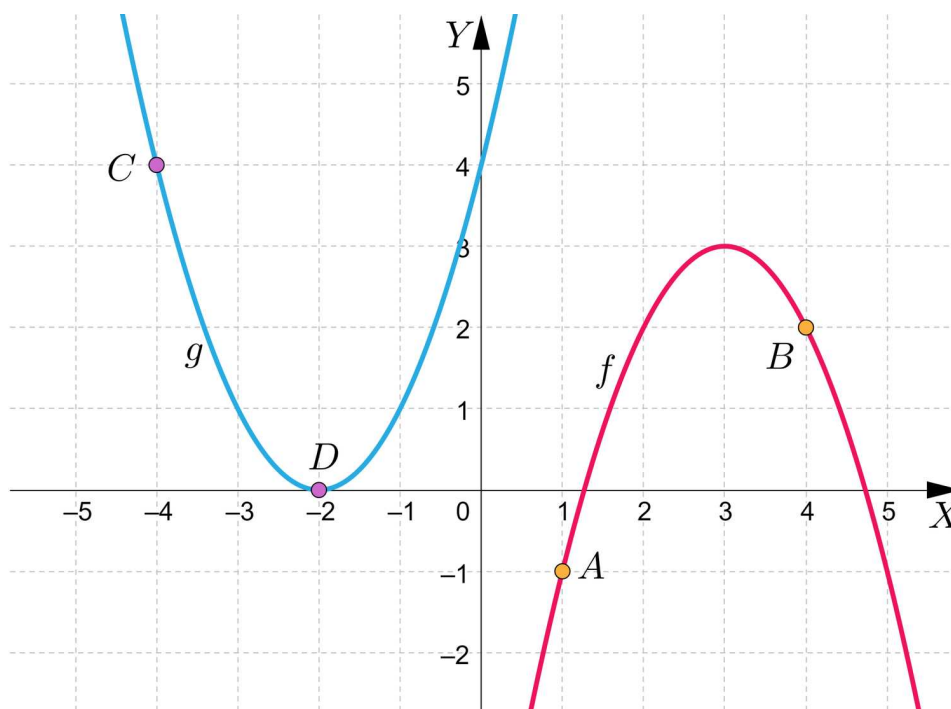
Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g .



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Dla wykresu funkcji g mamy:

wartość współczynnika b
równania siecznej
poprowadzonej przez
zaznaczone punkty wynosi (-2)

Dla wykresu funkcji f mamy:

wartość współczynnika b
równania siecznej
poprowadzonej przez
zaznaczone punkty wynosi (-4)

jeżeli $x_0 = 1$ oraz $h = 3$, to
iloraz różnicowy funkcji wynosi
1

kąt nachylenia do osi X siecznej
przechodzącej przez zaznaczone
punkty ma miarę 45°

jeżeli $x_0 = -4$ i $h = 2$, to iloraz
różnicowy funkcji wynosi (-2)

kąt nachylenia do osi X stycznej przechodzącej przez zaznaczone punkty ma miarę około 64°

Ćwiczenie 7



Prosta o równaniu $y = -x$ jest styczną do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Wyznacz wartość przyrostu h , dla którego dana prosta jest styczną do wykresu funkcji f .

Ćwiczenie 8



Wykaż, że jeśli zachodzi równość $3f(x_0 + h) - 3f(x_0) = \sqrt{3}h$, to styczna AB do wykresu funkcji poprowadzona w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i zadany przyrost h , gdy $h \neq 0$ jest nachylona do osi X pod kątem 30° .

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając z wykresu funkcji?

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony 3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odczytuje z wykresu funkcji informacje niezbędne do obliczenia ilorazu różnicowego funkcji;
- korzysta z interpretacji geometrycznej ilorazu różnicowego funkcji;
- oblicza iloraz różnicowy funkcji, korzystając z wykresu funkcji;
- stosuje pojęcie ilorazu różnicowego do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda krokodyla;

- burza mózgów;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając z wykresu funkcji?” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Infografika”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne treści, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”; po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Jak obliczyć iloraz różnicowy korzystając z wykresu funkcji?” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Sposoby opisywania funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie wykorzystania pojęcia ilorazu różnicowego.