



Pojęcie ciągu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Pierwsze rozważania prowadzące do pojęcia ciągu, można spotkać już w egipskich papyrusach.

Egipcjanie i Grecy badali tylko wybrane ciągi, pod kątem ich konkretnych zastosowań w teorii liczb, czy obliczeniach geometrycznych.

W XIII wieku pojęcie ciągu liczbowego stworzył włoski matematyk Leonardo z Pizy, zwany Fibonaccim. Przez kilka następných stuleci zainteresowanie ciągami było niewielkie.

Dopiero w XVII i XVIII wieku dynamicznie zaczęła rozwijać się teoria związana z ciągami i szeregami liczbowymi.

Obecnie teoria ciągów jest częścią analizy matematycznej.

W tym materiale poznamy pojęcie i przykłady ciągów.

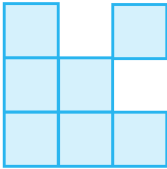
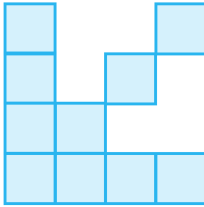
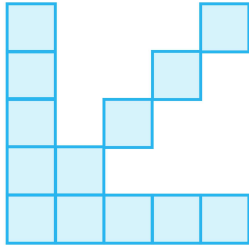
Twoje cele

- Podasz przykład ciągu.
- W ciągu danym za pomocą jego początkowych wyrazów, określisz pierwszy wyraz i kilka następnych wyrazów.
- Odkryjesz regułę według której budowane są figury, będące wyrazami ciągu.

Przeczytaj

Przykład 1

Figury na rysunku tworzone są według pewnej reguły. Odkryj tę regułę i narysuj według odkrytej reguły jeszcze kilka kolejnych figur.

Figury			
numer figury	1	2	3
figura			
liczba kwadratów, z których zbudowana jest figura	7	10	13

Kolejne figury 1, 2, 3, ... składają się odpowiednio z 7, 10, 13, ... kwadratów. Numerom figur wyrażonym przez kolejne liczby naturalne dodatnie przyporządkowane są liczby kwadratów, z których są zbudowane.

Możemy więc powiedzieć, że nadając figurom numery, ustawimy je w ciąg. Każdemu numerowi odpowiada jedna figura. Zatem utworzyliśmy w ten sposób pewną funkcję f określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich taką, że:

$$f(1) = 7, f(2) = 10, f(3) = 13, \dots$$

Przykład 2

Każdemu z pięciu laureatów konkursu matematycznego przypisujemy jego imię.

Laureaci konkursu matematycznego					
kolejność zdobytego miejsca	1	2	3	4	5
imię	Aleksandra	Szymon	Wojciech	Natalia	Grażyna

W ten sposób opisaliśmy funkcję określoną na podzbiorze zbioru liczb naturalnych: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Taki rodzaj funkcji to przykład **ciągu**, a wartości funkcji to **wyrazy ciągu**.

Wyrazy ciągu to w tym przypadku: *Aleksandra, Szymon, Wojciech, Natalia, Grażyna*.

Przykład 3

W tabelce przedstawiono prognozowane szanse opadów w miejscowości Kalino w dniach 1 – 6 października.

Prognozowane opady						
dzień października	1	2	3	4	5	6
szansa opadów w %	63	17	21	30	9	42

Tabelka opisuje funkcję p określoną na podzbiorze zbioru liczb naturalnych: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wiemy już, że jest to pewien **ciąg**.

Przyjmijmy za wyrazy ciągu, liczby określające poszczególne procenty (dla np. 63% przyjmijmy 63). Zatem wyrazy ciągu to w tym przypadku:

$$p(1) = 63$$

$$p(2) = 17$$

$$p(3) = 21$$

$$p(4) = 30$$

$$p(5) = 9$$

$$p(6) = 42$$

Dla ciągów przyjęto trochę inne oznaczenia niż dla funkcji.

Zatem

$$p(1) \text{ oznaczamy } p_1 \text{ i zapisujemy } p_1 = 63$$

$$p(2) \text{ oznaczamy } p_2 \text{ i zapisujemy } p_2 = 17$$

$$p(3) \text{ oznaczamy } p_3 \text{ i zapisujemy } p_3 = 21$$

$$p(4) \text{ oznaczamy } p_4 \text{ i zapisujemy } p_4 = 30$$

$$p(5) \text{ oznaczamy } p_5 \text{ i zapisujemy } p_5 = 9$$

$$p(6) \text{ oznaczamy } p_6 \text{ i zapisujemy } p_6 = 42$$

Utworzony ciąg oznaczamy: (p_n) .

Zapisujemy:

$$(p_n) = (63, 17, 21, 30, 9, 42).$$

Definicja: Ciąg nieskończony

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Definicja: Ciąg skończony

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór n liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Ciąg jest to zatem pewna funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych lub na określonym podzbiore zbioru liczb naturalnych.

Ciąg $a : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczamy (a_n) .

Kolejne wyrazy ciągu oznaczamy: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

Liczba na dole litery w wyrazie ciągu to wskaźnik (indeks), określa numer wyrazu ciągu.

Zatem a_k oznacza k -ty wyraz ciągu (a_n) .

Ciąg (a_n) możemy zapisywać też w postaci: $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$.

Przykład 4

Przyporządkujemy każdej liczbie naturalnej dodatniej jej odwrotność.

Liczbie 1 przyporządkujemy 1.

Liczbie 2 przyporządkujemy $\frac{1}{2}$.

Liczbie 3 przyporządkujemy $\frac{1}{3}$.

Liczbie 4 przyporządkujemy $\frac{1}{4}$.

...

...

Zbudowany w ten sposób ciąg ma postać:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

Pierwszy wyraz tego ciągu to 1, a n -ty wyraz to $\frac{1}{n}$.

Jest to przykład **ciągu nieskończonego**. Taki ciąg ma pierwszy wyraz, ale nie ma wyrazu ostatniego.

Przykład 5

Tworzymy ciąg (a_n) , którego wyrazami są liczby przeciwne do kolejnych liczb naturalnych dodatnich parzystych mniejszych od 12.

$$(a_n) = (-2, -4, -6, -8, -10)$$

Jest to przykład ciągu skończonego, pięciowyrazowego.

W ciągu istotne są nie tylko jego wyrazy, ale też ich kolejność. Ciąg skończony ma pierwszy wyraz (w tym przypadku jest to (-2)) i ostatni wyraz (w tym przypadku jest to (-10)).

Słownik

ciąg nieskończony

ciągami nieskończonymi nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich

ciąg skończony

ciągami skończonymi nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór n liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

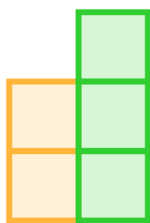
Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

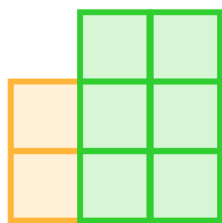
Z jednakowych sześciątów można tworzyć figury budowane według określonych reguł. Niektóre z takich figur zaprezentowane są w galerii zdjęć interaktywnych. Zastanów się, według jakich reguł budowane są te figury, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Polecenie 2

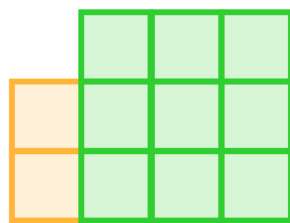
Na rysunku przedstawione są kolejne wyrazy ciągu (a_n) . Określ, z ilu kwadratów będą zbudowane dwa następne wyrazy tego ciągu.



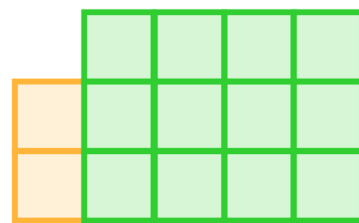
a_1



a_2



a_3



a_4

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



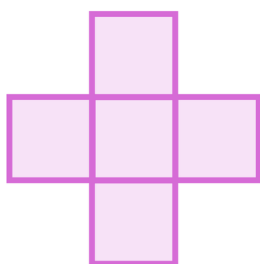
Ćwiczenie 6



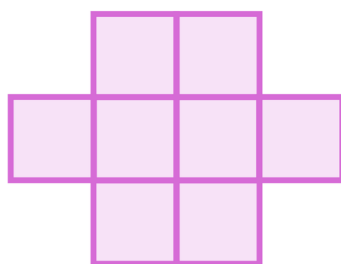
Ćwiczenie 7



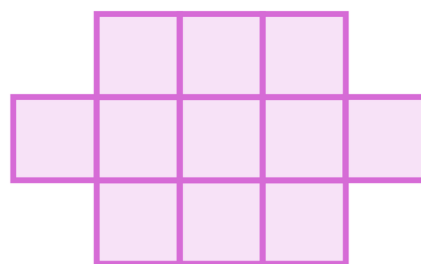
Na rysunku przedstawiono trzy początkowe wyrazy ciągu figur (a_n) tworzonych według pewnej reguły. Odkryj tę regułę i określ 10 początkowych wyrazów ciągu (b_n), którego wyrazami są liczby kwadratów, z których składają się kolejne figury.



a_1



a_2



a_3

Ćwiczenie 8



Ciąg liczb 50, 49, 46, 41, 34, . . . został utworzony według pewnej reguły. Odkryj tę regułę.

- a) Zapisz szósty wyraz tego ciągu.
- b) Określ, ile jest dodatnich wyrazów tego ciągu.
- c) Podaj największy ujemny wyraz ciągu.
- d) Ile wyrazów tego ciągu to kwadraty liczb naturalnych?

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pojęcie ciągu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa II lub III, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje przykłady ciągów
- w ciągu danym za pomocą jego początkowych wyrazów, określa pierwszy wyraz i kilka następnych wyrazów
- odkrywa regułę, według której budowane są figury, będące wyrazami ciągu
- współpracuje w grupie, pełniąc w niej określone role
- tworzy modele algebraiczne figur geometrycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- bank zadań
- grupa dla grupy

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Z przygotowanego wcześniej przez nauczyciela banku zadań, dwaj wybrani uczniowie losują kolejno zadania i rozwiązują je na tablicy lub ustnie, podając głośno odpowiedź. Zadania mają na celu powtórzenie wiadomości dotyczących tworzenia „wzorków” geometrycznych i opisywania ich językiem arytmetyki. Powinny też przypominać sposób tworzenia zadań wielopoziomowych opartych na analogii.
2. Pozostali uczniowie oceniają pracę kolegów, jednocześnie uzupełniając ich odpowiedzi.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach. Zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” i z galerią zdjęć interaktywnych. Następnie metodą *grupa dla grupy* opracowują zadania podobne do prezentowanych w galerii. Każda grupa przygotowuje 3 ciągi zbudowane z figur geometrycznych według ustalonej przez siebie reguły.
2. Grupy wymieniają się zadaniami i dorysowują dwie następne figury i ustalają rekurencyjny sposób tworzenia następnych figur.
3. Każda grupa powinna rozwiązać wszystkie zadania przygotowane przez pozostałe grupy.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy grup omawiają sposób pracy w grupach, sposób pełnienia ról w grupie. Prezenterzy pokazują rozwiązania wypracowane przez grupy.
Dyskusja – czy można tak zbudować wyrazy ciągu, aby określała je nie tylko jedna reguła.
Podsumowaniem dyskusji powinno być wspólne wytworzenie kilku wyrazów takiego właśnie ciągu.

2. Nauczyciel podsumowuje przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej](#)

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać na zajęciach poświęconych ustalaniu wzoru ogólnego ciągu, w szczególności podanego w sposób rekurencyjny.