



Pochodna jako funkcja

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Pochodną funkcji możemy zdefiniować jako miarę szybkości zmian wartości funkcji w porównaniu do zmian jej argumentów. Ma ona szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach. Dzięki pochodnej obliczymy prędkość chwilową ciała w chwili t , chwilowe natężenie prądu, gęstość masy w punkcie. W naukach ekonomicznych dzięki pochodnej możemy policzyć maksymalny zysk przy minimalnym koszcie, koszt krańcowy produkcji czy też utarg krańcowy.

W tym materiale nauczysz się, jak wyznaczyć pochodne podstawowych funkcji. Wyznaczysz też optymalny rozmiar pewnej rabatki z kwiatami.

Twoje cele

- Wyznaczysz wzory na pochodne wybranych funkcji.
- Rozwiążesz proste zadanie optymalizacyjne.

Przeczytaj

Pochodna funkcji w punkcie

Zacniemy od przypomnienia definicji pochodnej funkcji w punkcie. Załóżmy, że mamy daną funkcję f oraz punkt x_0 , należący do jej dziedziny wraz ze swoim otoczeniem.

Pochodną funkcji w punkcie nazywamy granicę ilorazu różnicowego postaci

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

i oznaczamy przez $f'(x_0)$. Z geometrycznego punktu widzenia ilorazy różnicowe, które rozważamy, są współczynnikami kierunkowymi siecznych do wykresu funkcji, przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, a po przejściu granicznym przy h dążącym do zera wartość $f'(x_0)$ oznacza współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Przykład 1

Wyznamy wartość pochodnej funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie

Dla dowolnego h mamy $f(x_0 + h) = f(3 + h) = (3 + h)^3 = 27 + 27h + 9h^2 + h^3$, zatem

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{27 + 27h + 9h^2 + h^3 - 27}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (27 + 9h + h^2) = 27.$$

Pochodna jako funkcja

W powyższym przykładzie wyznaczaliśmy wartość pochodnej funkcji $f(x) = x^3$ dla jednego punktu, ale możemy ją obliczyć dla dowolnej wartości x_0 .

Dla dowolnego h mamy wówczas:

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3,$$

zatem

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2 \end{aligned}$$

Wartość x_0 była dowolna, możemy zatem powiedzieć, że skonstruowaliśmy funkcję f' , która każdemu rzeczywistemu argumentowi x_0 przyporządkowuje wartość pochodnej funkcji f

w punkcie x_0 , czyli $f'(x_0) = 3x_0^2$. Funkcję tę nazywamy funkcją pochodną funkcji f lub pochodną funkcji f .

Dla lepszej czytelności nie będziemy już używać oznaczenia x_0 na argumenty funkcji f' , ale będziemy pisać $f'(x) = 3x^2$. Możemy również pisać $(x^3)' = 3x^2$.

Podobnie moglibyśmy wyznaczyć pochodną dowolnej funkcji potęgowej, otrzymując

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Powyższy wzór zachodzi również dla niecałkowitych wartości wykładnika α .

Przykład 2

Wyznamy funkcję pochodną funkcji $f(x) = 2x^3$.

Rozwiązanie

Dla dowolnego h mamy:

$$h(x+h) = 2(x+h)^3 = 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3,$$

zatem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 2x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x^2 + 6xh + h^2) = 6x^2 \end{aligned}$$

Przykład 3

Wykażemy, że pochodna funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x \neq 0$; ma postać: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x^2+hx} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x^2+hx} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Przykład 4

Wykażemy, że pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x \neq 0$; ma postać: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h \cdot x^2 \cdot (x+h)^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h \cdot x^2 \cdot (x^2 + 2xh + h^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - h}{x^4 + 2x^3h + x^2h^2} = -\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Rozwiążemy na koniec zadanie o rabatkach z kwiatami.

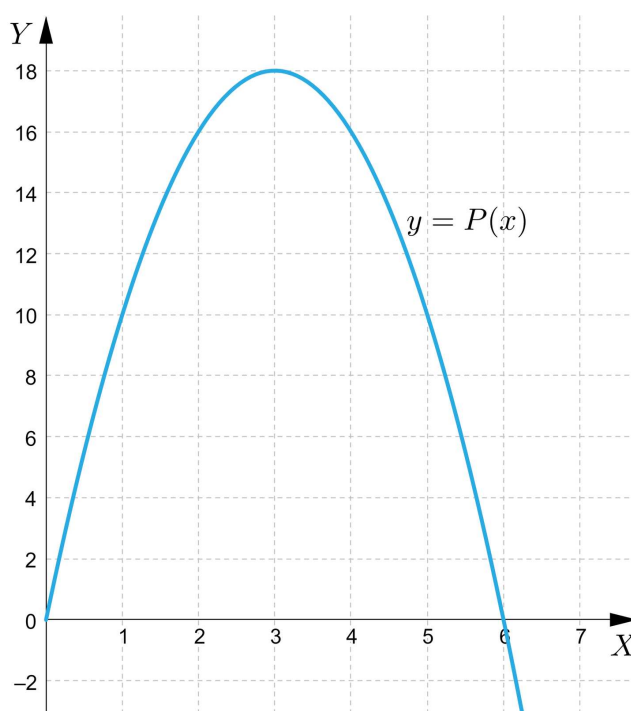
Przykład 5

Pewien ogrodnik zmuszony jest ogrodzić swoją rabatę z kwiatami przed kożą sąsiada. Chciałby postawić płot dookoła rabatki, ale ma do dyspozycji jedynie siatkę o długości 12 metrów. Wymyślił zatem, że postawi płot w taki sposób, żeby rabatka w kształcie prostokąta przylegała jednym bokiem do ściany szopy na narzędzia. Jakie powinny być wymiary boków prostokątnej rabatki, żeby obejmowała jak największe pole powierzchni upraw?

Rozwiązanie

Rozwiązanie rozpoczniemy od oznaczenia długości obydwu boków przylegających do ściany szopy przez x . Wtedy długość boku równoległego do ściany będzie równa $12 - 2x$ metrów, gdyż z 12 metrów siatki zabieramy dwa boki o długości x metrów.

Pole ogrodzonej powierzchni zależało będzie wówczas jedynie od wartości x i wynosić będzie $P(x) = x \cdot (12 - 2x) = 12x - 2x^2$.



Wykres zależności pola rabatki A od długości jednego z boków x

Po narysowaniu wykresu tej funkcji widzimy, że dla $x = 0$ oraz $x = 6$ mamy sytuacje skrajne o zerowym polu, ujemne wartości dla $x > 6$, oznaczające brak siatki na stworzenie płotu takich rozmiarów i dodatnie wartości dla argumentów pomiędzy 0 i 6.

Widzimy również, że dla małych wartości x wartość funkcji rośnie, a później zaczyna maleć. Optymalnym wymiarem dla x będzie zatem taki punkt, w którym funkcja przestaje rosnąć i zaczyna maleć.

Z geometrycznego punktu widzenia oznacza to punkt, w którym styczna do wykresu jest pozioma, czyli jej współczynnik kierunkowy jest równy zero, a to oznacza, że pochodna P' funkcji P musi być równa zero. Wyznamy zatem wzór na pochodną P' :

$$\begin{aligned} P'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12(x+h) - 2(x+h)^2 - 12x + 2x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12x + 12h - 2x^2 - 4xh - 2h^2 - 12x + 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h - 4xh - 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 - 4x - 2h) = 12 - 4x \end{aligned}$$

Znalezienie punktu, w którym pochodna się zeruje, oznacza rozwiązanie równania $12 - 4x = 0$, czyli $x = 3$. Ostatecznie możemy powiedzieć, że optymalna rabatka będzie miała boki długości 3 metry i 6 metrów i pole równe 18 m^2 .

Słownik

funkcja pochodna

funkcja przyporządkowująca każdemu argumentowi x wartość pochodnej zadanej funkcji w danym punkcie x

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną na filmie metodą wyznaczania pochodnej funkcji $f(x) = x^2$. Spróbuj zapamiętać pochodne funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz $f(x) = \sqrt{x}$.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DK8DzXEEM>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego pochodnej jako funkcji.

Polecenie 2

Wyprowadź wzór na pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i swój wynik porównaj ze wzorem przedstawionym w filmie.

Polecenie 3

Wyprowadź wzór na pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ i swój wynik porównaj ze wzorem przedstawionym w filmie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wpisz poprawną liczbę.

Pochodna funkcji $f(x) = x^4$ wynosi $\cdot x^3$.

Ćwiczenie 2



Wpisz poprawną liczbę.

Wartość pochodnej funkcji $y = x^3$ w punkcie $x_0 = 1$ wynosi .

Ćwiczenie 3



Jaka będzie wartość pochodnej funkcji $y = \frac{1}{x}$ w punkcie $x_0 = -1$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ -1

☐ 2

☐ żadna z przedstawionych

☐ -3

Ćwiczenie 4



Wskaż prawidłową odpowiedź. Pochodną funkcji $y = f(x)$ możemy policzyć ze wzoru:

☐ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow -\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

☐ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x+h)}{h}$

☐ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

☐ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Ćwiczenie 5



Wskaż pochodną funkcji $f(x) = 2x^7$.

☐ $f'(x) = 6x^7$

☐ $f'(x) = 7x^6$

☐ $f'(x) = 14x^6$

☐ $f'(x) = 2x^6$

Ćwiczenie 6



Połącz w pary wzory funkcji i ich pochodne.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = 1$$

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Ćwiczenie 7



Wyznacz funkcję pochodną funkcji $f(x) = 3x - x^2$.

Ćwiczenie 8



Wyznacz funkcję pochodną funkcji $f(x) = x^3 + x^2$.

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pochodna jako funkcja

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza wzory na pochodne wybranych funkcji;
- rozwiązuje proste zadanie optymalizacyjne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku;
- dyskusja;

- pogadanka z wykorzystaniem filmu.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Wybrany uczeń przypomina definicję pochodnej funkcji w punkcie.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta treść polecenia 1 i wyświetla film samouczek.
2. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady 2 – 5 zawarte w części „Przeczytaj”.
3. Po omówieniu przykładów w grupach nauczyciel sprawdza zrozumienie sposobu wyznaczania funkcji pochodnej.
4. Nauczyciel prosi uczniów, aby w parach rozwiązali polecenie 2 z sekcji „Film samouczek”.
5. Uczniowie wspólnie z nauczycielem konsultują poprawność wykonania polecenia.
6. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1, 2, 5, 6 i 7.

Faza podsumowująca:

- Po ustalonym czasie nauczyciel sprawdza odpowiedzi uczniów, wyjaśnia pomyłki, omawia poprawne rozwiązania na forum klasy.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują pozostałe ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się” oraz polecenie 3 z sekcji „Film samouczek”.

Materiały pomocnicze:

- [Granica funkcji w punkcie według Heinego](#)

- Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach
- Jak obliczyć pochodną funkcji w punkcie, korzystając z definicji?
- Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Film może zostać wykorzystany jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem lub jako pomoc w realizacji tematu „Pochodne funkcji elementarnych”.