Wektory równoległe w układzie współrzędnych

Źródło: DC Irving, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Jednym z najważniejszych pojęć geometrii jest równoległość. To z nią matematycy zmagali się od starożytności i to ona doprowadziła do wyodrębnienia nowych działów matematyki. W tej lekcji dowiesz się, jak poznać, czy wektory o danych współrzędnych są równoległe. Wykorzystamy również poznane kryterium do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Twoje cele

- Rozpoznasz, czy wektory są równoległe po ich współrzędnych.
- Wykorzystasz warunek równoległości wektorów do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw, że niezerowe wektory nazywamy równoległymi jeśli ich kierunki są równoległe (są zawarte w prostych równoległych).

Poznaliśmy już kryterium równoległości wektorów umieszczonych na płaszczyźnie bez układu współrzędnych. Przypomnijmy, że niezerowe wektory są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista $k \neq 0$, że jeden z nich jest iloczynem drugiego przez liczbę k.

Uzasadnimy teraz kryterium równoległości wektorów w układzie współrzędnych.

Rozważmy niezerowe wektory $\overrightarrow{u} = [a; b]$ i $\overrightarrow{v} = [c; d]$ oraz załóżmy, że są one równoległe. Może zajść jedna z możliwości:

1. Jeśli $a = 0$, to wektor $\overrightarrow{u}$ jest równoległy do osi y, zatem wektor $\overrightarrow{v}$ jest również równoległy do osi y, co oznacza, że $c = 0$. Wobec tego $ad - bc = 0 \cdot d - b \cdot 0 = 0$.
2. Jeśli $b = 0$, to wektor $\overrightarrow{u}$ jest równoległy do osi x, zatem wektor $\overrightarrow{v}$ jest również równoległy do osi x, co oznacza, że $d = 0$. Wobec tego $ad - bc = a \cdot 0 - 0 \cdot c = 0$.
3. Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to wektor $\overrightarrow{u}$ nie jest równoległy do żadnej z osi układu, zatem wektor $\overrightarrow{v}$ również nie jest równoległy do żadnej z osi układu, co oznacza, że $c \neq 0$ i $d \neq 0$. Ponieważ wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są równoległe, to istnieje taka liczba rzeczywista $k \neq 0$, że jeden z nich jest iloczynem liczby k przez drugi. Przyjmijmy, że $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$, co jest równoważne równości $[a; b] = k \cdot [c; d]$. Dalej mamy $[a; b] = [kc; kd]$, czyli $a = kc$ i $b = kd$, co prowadzi do równań $k = \frac{a}{c}$ i $k = \frac{b}{d}$, z których wynika, że $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, czyli $ad - bc = 0$.

Z powyższych rozważań wynika kryterium równoległości wektorów:

Niezerowe wektory $\overrightarrow{u} = [a; b]$ i $\overrightarrow{v} = [c; d]$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy między ich współrzędnymi zachodzi związek $ad - bc = 0$.

Przykład 1

Wektory o współrzędnych $[2; -3]$ i $[-6; 9]$ są równoległe, ponieważ $[-6; 9] = -3 \cdot [2; -3]$. Można też zastosować poznane wcześniej kryterium i sprawdzić różnicę iloczynów współrzędnych obu wektorów: $2 \cdot 9 - (-3) \cdot (-6) = 18 - 18 = 0$, co również potwierdza, że są to wektory równoległe.

Przykład 2

Wektory o współrzędnych $[2; -3]$ i $[-6; 8]$ nie są równoległe. Można to stwierdzić na podstawie powyższego kryterium sprawdzając różnicę iloczynów współrzędnych obu wektorów: $2 \cdot 8 - (-3) \cdot (-6) = 16 - 18 = -2 \neq 0$.

Przykład 3

Wyznaczymy wartości parametru m, dla których wektory o współrzędnych $[m; 1]$ oraz $[9; m]$ są równoległe. Po zastosowaniu kryterium równoległości wektorów w układzie współrzędnych otrzymujemy równanie: $m^2 - 9 = 0$, którego pierwiastkami są liczby 3 i -3. Rzeczywiście w obu przypadkach otrzymujemy pary wektorów równoległych: wektor o współrzędnych $[3; 1]$ jest równoległy do wektora o współrzędnych $[9; 3]$ oraz wektor o współrzędnych $[-3; 1]$ jest równoległy do wektora o współrzędnych $[9; -3]$.

Słownik

kryterium równoległości wektorów w układzie współrzędnych

twierdzenie orzekające, że niezerowe wektory o współrzędnych $[a; b]$ i $[c; d]$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne spełniają zależność: $ad - bc = 0$

wektory równoległe

wektory, których kierunki są prostymi równoległymi

kryterium równoległości wektorów

dwa niezerowe wektory są równoległe dokładnie wtedy, gdy jeden z nich jest iloczynem drugiego przez liczbę różną od zera

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Przeanalizuj zawartość poniższej prezentacji multimedialnej oraz rozwiąż poniższe zadania.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1HVczyNd

Polecenie 2

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

W trapezie o podstawach AB i CD dane są $A = (1; 2)$, $B = (-1; -2)$, $C = (2; -6)$. Wiadomo również, że podstawa CD jest dwa razy dłuższa niż podstawa AB. Oblicz współrzędne wierzchołka D tego trapezu.

Ćwiczenie 6

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (1; 2)$, $B = (3; -4)$, $C = (-5; -2)$. Niech punkty K, L, M oznaczają odpowiednio środki boków AB, BC i AC. Znajdź współrzędne wektorów $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{MK}$.

Ćwiczenie 7

Dany jest czworokąt o wierzchołkach $A = (-6; 2)$, $B = (-4; 6)$, $C = (4; 2)$, $D = (-1; -8)$. Wiadomo, że punkty K i L są odpowiednio środkami boków AD i BC. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem, a następnie wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{KL}$.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wektory równoległe w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

- Rozpoznasz, czy wektory są równoległe po ich współrzędnych.
- Wykorzystasz warunek równoległości wektorów do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Prezentacja multimedialna” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Wektory równoległe w układzie współrzędnych” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
2. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Współrzędne wektora w układzie współrzędnych

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Wektory równoległe w układzie współrzędnych”.