



Dwumian Newtona – zadania ze złożonymi warunkami

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Dwumian Newtona – zadania ze złożonymi warunkami

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

W tym materiale pokażemy zastosowania własności współczynników dwumianowych i wzoru dwumianowego Newtona w zadaniach dowodowych. Z reguły będą to dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych.

Przed rozwiązywaniem tych zadań warto przypomnieć sobie pojęcia:

- reszty z dzielenia przez liczbę naturalną,
- rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze,
- największego wspólnego dzielnika dwóch liczby całkowitych.

Prezentowane w tej jednostce zadania wykraczają poza standardowe ujęcie Dwumianu Newtona w oparciu o podstawę programową. Jest to jednak ciekawe wprowadzenie do zadań konkursowych i olimpijskich z tej tematyki, a ich lektura nie powinna nastroczać większych trudności.

Twoje cele

- Będziesz doskonalić umiejętność posługiwania się wzorem dwumianowym.
- Dzięki analizie własności wyrazów rozwinięcia dwumianowego obliczysz resztę z dzielenia przez ustaloną liczbę całkowitą.

- Znajomość własności współczynników dwumianowych pozwoli Ci przekształcać wzory zapisane z użyciem tych współczynników.
- Nauczysz się, jak wykorzystywać współczynniki dwumianowe do rozwiązywania zadań dowodowych dotyczących podzielności liczb całkowitych.

Przeczytaj

W poniższych przykładach prezentowane są pomysły na dowodzenie podzielności liczb całkowitych za pomocą własności [współczynników dwumianowych](#), jak również z użyciem [wzoru dwumianowego](#).

Istotną część przedstawionych poniżej wniosków można zapisać używając do tego celu kongruencji liczbowych, jednak – z zasady – nie będziemy tego sposobu stosowali.

Chętnym do utrwalenia swoich umiejętności z podstaw arytmetyki modularnej polecamy zredagowanie poniższych rozwiązań metodą kongruencji, co byłoby – jak uważamy – pouczającym ćwiczeniem.

Przykład 1

Obliczmy:

- a) dwie ostatnie cyfry zapisu dziesiętnego liczby 752^{36} ,
- b) resztę z dzielenia przez 1000 liczby 7^{1122} .

Rozwiązanie

- a) Korzystając ze [wzoru dwumianowego](#) zapisujemy

$$752^{36} = (750 + 2)^{36} = 750^{36} + \binom{36}{1} \cdot 750^{35} \cdot 2 + \dots + \binom{36}{35} \cdot 750 \cdot 2^{35} + 2^{36}.$$

Zauważmy, że ponieważ $750^2 = 75^2 \cdot 10^2 = 100 \cdot 75^2$ oraz $2 \cdot 750 = 1500 = 100 \cdot 75$, więc każdy spośród 36 początkowych wyrazów powyższego rozwinięcia dzieli się przez 100. Wobec tego $752^{36} = 100n + 2^{36}$, dla pewnej liczby naturalnej n .

Zauważmy następnie, że

$$\begin{aligned} 2^{36} &= (2^{12})^3 = 4096^3 = (4100 - 4)^3 = 4100^3 - 3 \cdot 4100^2 \cdot 4 + 3 \cdot 4100 \cdot 4^2 - 4^3 = \\ &= (4100^3 - 3 \cdot 4100^2 \cdot 4 + 3 \cdot 4100 \cdot 4^2 - 100) + 36. \end{aligned}$$

Ponieważ każdy z czterech wyrazów w nawiasie dzieli się przez 100, więc liczba 2^{36} przy dzieleniu przez 100 daje resztę 36.

Wynika stąd, że dwie ostatnie cyfry zapisu dziesiętnego liczby 752^{36} to 3 (cyfra dziesiątek) oraz 6 (cyfra jedności).

- b) Zauważamy, że $7^{1122} = (7^2)^{561} = 49^{561}$.

Następnie, korzystając ze [wzoru dwumianowego](#) zapisujemy

$$\begin{aligned} (50 - 1)^{561} &= 50^{561} + \binom{561}{1} \cdot 50^{560} \cdot (-1) + \dots + \binom{561}{558} \cdot 50^3 \cdot (-1)^{558} + \\ &+ \binom{561}{559} \cdot 50^2 \cdot (-1)^{559} + \binom{561}{560} \cdot 50 \cdot (-1)^{560} + (-1)^{561}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ponieważ $50^3 = 5^3 \cdot 10^3 = 1000 \cdot 5^3$ oraz

$\binom{561}{559} \cdot 50^2 = \frac{561 \cdot 560}{2} \cdot 2500 = 1000 \cdot (561 \cdot 280 \cdot 25)$, więc każdy spośród 560

początkowych wyrazów powyższego rozwinięcia dzieli się przez 1000. Wobec tego

$7^{1122} = 1000n + \binom{561}{560} \cdot 50 \cdot (-1)^{560} + (-1)^{561}$, dla pewnej liczby naturalnej n .

Obliczamy, że $\binom{561}{560} \cdot 50 \cdot (-1)^{560} + (-1)^{561} = 561 \cdot 50 - 1 = 28049 = 28 \cdot 1000 + 49$,

skąd wynika, że szukana reszta z dzielenia przez 1000 jest równa 49.

Przykład 2

Wykażemy, że liczba $5^{121212} - 2^{151515}$ dzieli się przez 7.

Rozwiązanie

Dla dowodu wystarczy pokazać, że liczby 5^{121212} oraz 2^{151515} dają tę samą resztę z dzielenia przez 7.

Zauważmy, że:

1. $2^{151515} = (2^3)^{50505} = (7 + 1)^{50505}$.

Korzystając ze [wzoru dwumianowego](#) możemy zatem zapisać, że

$$\begin{aligned} (7 + 1)^{50505} &= 7^{50505} + \binom{50505}{1} \cdot 7^{50504} + \dots + \binom{50505}{50504} \cdot 7 + 1 = \\ &= 7 \cdot \left(7^{50504} + \binom{50505}{1} \cdot 7^{50503} + \dots + \binom{50505}{50504} \right) + 1, \end{aligned}$$

skąd wynika, że liczba 2^{151515} przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1.

2. $5^{121212} = (7 + (-2))^{121212}$.

Korzystając ze [wzoru dwumianowego](#) możemy zatem zapisać, że

$$\begin{aligned} (7 + (-2))^{121212} &= 7^{121212} + \binom{121212}{1} \cdot 7^{121211} \cdot (-2)^1 + \dots + \\ &+ \binom{121212}{121211} \cdot 7 \cdot (-2)^{121211} + (-2)^{121212} = \\ &= 7 \cdot \left(7^{121211} + \binom{121212}{1} \cdot 7^{121210} \cdot (-2)^1 + \dots + \right. \\ &\left. + \binom{121212}{121211} \cdot (-2)^{121211} \right) + 2^{121212}, \end{aligned}$$

skąd wynika, że liczba 5^{121212} przy dzieleniu przez 7 daje taką samą resztę, jak liczba 2^{121212} .

Ponieważ $2^{121212} = (2^3)^{40404} = (7 + 1)^{40404}$, więc (rozumując podobnie, jak w przypadku liczby $(7 + 1)^{50505}$) otrzymujemy, że resztą z dzielenia tej liczby przez 7 jest 1, zatem również liczba 5^{121212} przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1.

Oznacza to, że liczba $5^{121212} - 2^{151515}$ dzieli się przez 7.

Można też zauważyć, że $5^6 = 15625 = 7 \cdot 2232 + 1$, skąd

$$5^{121212} = (5^6)^{20202} = (7 \cdot 2232 + 1)^{20202}.$$

Rozwinięcie otrzymanej sumy za pomocą wzoru dwumianowego i wykazanie, że liczba 5^{121212} przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1 pozostawiamy jako nietrudne ćwiczenie.

Uwaga.

Można wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $5^{12n} - 2^{15n}$ jest podzielna przez 7.

Wystarczy w tym celu następująco przekształcić tę różnicę

$$5^{12n} - 2^{15n} = (5^6)^{2n} - (2^3)^{5n} = (7 \cdot 2232 + 1)^{2n} - (7 + 1)^{5n}$$

i wykorzystać pomysły omówione w powyższym przykładzie.

Przykład 3

Wykażemy, że **współczynnik dwumianowy** $n = \binom{1683}{1410}$ to liczba, która:

- a) dzieli się przez 5, ale nie dzieli się przez 25,
- b) dzieli się przez 9, ale nie dzieli się przez 27.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $\binom{1683}{1410} = \frac{1683!}{1410! \cdot 273!}$, zatem będziemy obliczali wykładnik, z jakim liczba ustalona w każdym z podpunktów wchodzi do rozkładu każdej z liczb: 1683!, 1410! oraz 273!.

Do tego celu wykorzystamy funkcję podłoga, która zaokrągla w dół liczby rzeczywiste do liczb całkowitych ($f(x) = \lfloor x \rfloor$)

a) Ponieważ:

- $5^4 = 625 < 1683 < 5^5 = 3125$, więc liczba 5 w rozkładzie liczby 1683! pokazuje się z wykładnikiem równym
 $\left\lfloor \frac{1683}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1683}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1683}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1683}{5^4} \right\rfloor = 336 + 67 + 13 + 2 = 418,$
- $5^4 = 625 < 1410 < 5^5 = 3125$, więc liczba 5 w rozkładzie liczby 1410! pokazuje się z wykładnikiem równym
 $\left\lfloor \frac{1410}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1410}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1410}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1410}{5^4} \right\rfloor = 282 + 56 + 11 + 2 = 351,$
- $5^3 = 125 < 273 < 5^4 = 625$, więc liczba 5 w rozkładzie liczby 273! pokazuje się z wykładnikiem równym
 $\left\lfloor \frac{273}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{273}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{273}{5^3} \right\rfloor = 54 + 10 + 2 = 66.$

Oznacza to, że liczba 5 w rozkładzie liczby $\binom{1683}{1410} = \frac{1683!}{1410! \cdot 273!}$ występuje z wykładnikiem równym $418 - (351 + 66) = 1$.

Zatem liczba n dzieli się przez 5, ale nie dzieli się przez 25.

b) Ponieważ:

- $3^6 = 729 < 1683 < 3^7 = 2187$, więc liczba 3 w rozkładzie liczby $1683!$ pokazuje się z wykładnikiem równym

$$\left\lfloor \frac{1683}{3^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1683}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1683}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1683}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1683}{3^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1683}{3^6} \right\rfloor =$$

$$= 561 + 187 + 62 + 20 + 6 + 2 = 838,$$
- $3^6 = 729 < 1410 < 3^7 = 2187$, więc 3, więc liczba 3 w rozkładzie liczby $1410!$ występuje z wykładnikiem równym

$$\left\lfloor \frac{1410}{3^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1410}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1410}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1410}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1410}{3^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1410}{3^6} \right\rfloor =$$

$$= 470 + 156 + 52 + 17 + 5 + 1 = 701,$$
- $3^5 = 243 < 273 < 3^6 = 729$, więc liczba 3 w rozkładzie liczby $273!$ występuje z wykładnikiem równym

$$\left\lfloor \frac{273}{3^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{273}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{273}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{273}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{273}{3^5} \right\rfloor =$$

$$= 91 + 30 + 10 + 3 + 1 = 135.$$

Oznacza to, że liczba 3 w rozkładzie liczby $\binom{1683}{1410} = \frac{1683!}{1410! \cdot 273!}$ pokazuje się z wykładnikiem równym $838 - (701 + 135) = 2$.

Zatem liczba n dzieli się przez 9, ale nie dzieli się przez 27.

Przykład 4

Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $10^{6n-3} + 1$ dzieli się przez każdą z liczb: 7, 11, 13.

Rozwiązanie

I sposób:

Zauważmy, że $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ oraz $10^{6n-3} = (10^3)^{2n-1} = (1001 + (-1))^{2n-1}$.

Korzystając ze wzoru dwumianowego otrzymujemy:

$$(1001 + (-1))^{2n-1} = 1001^{2n-1} + \binom{2n-1}{1} \cdot 1001^{2n-2} \cdot (-1) +$$

$$+ \binom{2n-1}{2} \cdot 1001^{2n-3} \cdot (-1)^2 + \dots +$$

$$+ \binom{2n-1}{2n} \cdot 1001 \cdot (-1)^{2n-2} + (-1)^{2n-1}$$

Zatem w rozwinięciu tej sumy każdy spośród $2n - 2$ początkowych składników jest podzielny przez 1001, natomiast ostatni wyraz, $(-1)^{2n-1}$ (jedyne niepodzielny przez 1001), dla dowolnej liczby całkowitej n ma wartość (-1) .

Oznacza to, że liczba $(1001 + (-1))^{2n-1} + 1$ dzieli się przez $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. To spostrzeżenie kończy dowód.

II sposób:

Rozpatrzmy wielomian $W(x) = x^{2n-1} + 1$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Ponieważ $W(-1) = (-1)^{2n-1} + 1 = -1 + 1 = 0$, więc wielomian W dzieli się przez $x + 1$.

Przyjmując $x = 10^3$ otrzymujemy, że liczba $W(10^3) = (10^3)^{2n-1} + 1$ dzieli się przez $10^3 + 1 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, co oznacza, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $(10^3)^{2n-1} + 1$ dzieli się przez każdą z liczb 7, 11, 13. W ten sposób dowód został zakończony.

Przykład 5

a) Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ dzieli się przez 6.

Rozwiązanie

Założmy, że liczba n jest dodatnia.

Ponieważ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba $\binom{n+2}{3}$ określa liczbę trzelementowych podzbiorów zbioru $(n+2)$ -elementowego, więc jest to liczba całkowita. Wynika stąd, że liczba $6 \cdot \binom{n+2}{3}$ jest podzielna przez 6.

Zatem podzielna przez 6 jest liczba

$$6 \cdot \binom{n+2}{3} = \frac{6(n+2)!}{3! \cdot (n-1)!} = \frac{6(n-1)! \cdot n(n+1)(n+2)}{6(n-1)!} = n(n+1)(n+2),$$

co dowodzi tezy w przypadku, gdy n jest liczbą dodatnią.

Jeżeli iloczyn $n(n+1)(n+2)$ jest równy zero (co zachodzi dla $n = 0$ lub $n = -1$ lub $n = -2$), to jest, oczywiście, liczbą podzielną przez 6.

Pozostaje więc rozpatrzyć przypadek, gdy liczba $n(n+1)(n+2)$ jest ujemna.

Zauważmy, że wtedy każdy z jej czynników jest ujemny. Rozpatrzmy więc dodatnią liczbę $t = -n - 2$. Wówczas liczba $t \cdot (t+1) \cdot (t+2)$ jest podzielna przez 6 (co stwierdzamy na podstawie wniosku sformułowanego powyżej), a więc przez 6 dzieli się również liczba do

niej przeciwna, czyli liczba

$$-t(t+1)(t+2) = -(-n-2)(-n-1)(-n) = (n+2)(n+1)n.$$

Oznacza to, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n+1)(n+2)$ dzieli się przez 6.

Uwaga. Z powyższego spostrzeżenia wynika np., że:

- dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ dzieli się przez 6,
- dla każdej liczby całkowitej n i każdej liczby całkowitej k liczba $kn^3 - nk^3 = kn^3 - kn + kn - nk^3 = k(n^3 - n) - n(k^3 - k)$ jest podzielna przez 6.

b) Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ dzieli się przez 30.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1) = \\ &= (n-1)n(n+1)(n^2 - 4 + 5) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + \\ &+ 5(n-1)n(n+1). \end{aligned}$$

Ponieważ:

- $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = 30 \cdot \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5!} = 30 \cdot \binom{n+2}{5}$, więc rozumując podobnie jak w poprzednim podpunkcie stwierdzamy, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ dzieli się przez 30,
- dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $(n-1)n(n+1)$ dzieli się przez 6, co oznacza, że liczba $5 \cdot (n-1)n(n+1)$ dzieli się przez 30.

Wobec tego suma $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)$ również dzieli się przez 30, a to właśnie należało udowodnić.

Uwaga. Z powyższego spostrzeżenia wynika np., że dla każdej liczby całkowitej n i każdej liczby całkowitej k liczba $kn^5 - nk^5 = kn^5 - kn + kn - nk^5 = k(n^5 - n) - n(k^5 - k)$ jest podzielna przez 30.

Słownik

współczynnik dwumianowy

w rozwinięciu dwumianu współczynnik liczbowy zapisany przy wyrazie tego rozwinięcia; w szczególności k -tym współczynnikiem dwumianowym w rozwinięciu $(a + b)^n$ jest liczba:

$$\binom{n}{k}$$

wzór dwumianowy

dla dowolnych liczb a, b oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwy jest wzór:

$$\begin{aligned}(a + b)^n = & \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \\ & + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n\end{aligned}$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej prezentacją multimedialną. Przeanalizuj zawarte w niej rozwiązania zadań, w których prezentowana jest pewna zależność zachodząca między współczynnikami dwumianowymi oraz jej zastosowania dotyczące liczb Catalana.

Wykażemy, że dla dowolnych liczb całkowitych k, n spełniających warunek $1 \leq k \leq n$ prawdziwa jest równość

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Rozpatrzmy w tym celu następującą sytuację: z grupy n uczniów należy wybrać k – osobową delegację, w której jedna z osób będzie pełniła funkcję przewodniczącego. Wyboru takiej delegacji możemy dokonać na dwa sposoby.

Sposób pierwszy: najpierw wybieramy k osób spośród n , a następnie jednej z tych osób nadajemy tytuł przewodniczącego.

Tym sposobem otrzymujemy więc, że jest $k \cdot \binom{n}{k}$ możliwości wyboru delegacji, która spełnia warunki zadania.

Wykażemy, że dla dowolnych liczb całkowitych k, n spełniających warunek $1 \leq k \leq n$ prawdziwa jest równość

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Rozpatrzmy w tym celu następującą sytuację: z grupy n uczniów należy wybrać k – osobową delegację, w której jedna z osób będzie pełniła funkcję przewodniczącego. Wyboru takiej delegacji możemy dokonać na dwa sposoby.

Sposób pierwszy: najpierw wybieramy k osób spośród n , a następnie jednej z tych osób nadajemy tytuł przewodniczącego.

Tym sposobem otrzymujemy więc, że jest $k \cdot \binom{n}{k}$ możliwości wyboru delegacji, która spełnia warunki zadania. **1**

1. {audio}Zauważmy, że k osób spośród n możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, a w drugim etapie jednej z tych osób nadajemy tytuł przewodniczącego, co można zrobić na k sposobów. Zatem jest $k \cdot \binom{n}{k}$ możliwości wyboru delegacji spełniającej warunki zadania.

Polecenie 2

Korzystając z przykładu omówionego w powyższej prezentacji multimedialnej rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Wykaż, że

$$\frac{\binom{21}{0}}{1} + \frac{\binom{21}{1}}{2} + \frac{\binom{21}{2}}{3} + \dots + \frac{\binom{21}{21}}{22} = \frac{2^{22}-1}{22}.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Spośród poniższych wybierz wszystkie zadania prawdziwe.

☐ Liczba 2021^{2021} przy dzieleniu przez 2020 daje resztę 1.

☐ Liczba 2020^{2020} przy dzieleniu przez 2019 daje resztę 1.

☐ Liczba 2021^{2021} przy dzieleniu przez 2022 daje resztę 1.

☐ Liczba 2020^{2020} przy dzieleniu przez 2021 daje resztę 1.

Ćwiczenie 2



Rozpatrzmy liczbę $n = 993^{964}$. Zakoduj poniżej kolejno trzy ostatnie cyfry zapisu dziesiętnego liczby n .

$n =$

Ćwiczenie 3



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi (zauważ, że $10001 = 73 \cdot 137$). Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$10^{8n-4} + 1$$

dzieli się przez:

☐ 37

☐ 73

☐ 143

☐ 137

Ćwiczenie 4



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozpatrzmy rozwinięcie wyrażenia

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2222}.$$

Wówczas współczynnik zapisany przy wyrazie, który nie zawiera x jest liczbą podzielną przez:

☐ 37

☐ 243

☐ 1000

☐ 19

Ćwiczenie 5



Do każdej z podanych niżej liczb a , b , c , d dobierz właściwą resztę z dzielenia tej liczby przez 100.

$$c = 2183^{125}$$

25

$$b = 2019^{2019}$$

79

$$d = 1995^{2000}$$

24

$$a = 2018^{2018}$$

43

Ćwiczenie 6



Wpisz poprawną liczbę. Rozpatrujemy wszystkie liczby postaci

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6),$$

gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.

Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik tych liczb. Wówczas:

$$d = \text{[input box]}$$

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}\right)^{995}.$$

332

○ 165

○ 331

○ 166

$$s = \sum_{k=1}^{506} (4k-3) \cdot \binom{2023}{4k-3} = \binom{2023}{1} + 5 \cdot \binom{2023}{5} + \dots + 2021 \cdot \binom{2023}{2021}.$$
$$\frac{s}{2^{2020}} =$$

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dwumian Newtona – zadania ze złożonymi warunkami

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza resztę z dzielenia przez ustaloną liczbę całkowitą wykorzystując analizę własności wyrazów rozwinięcia dwumianowego;
- przekształca wzory zapisane z użyciem tych współczynników wykorzystując znajomość własności współczynników dwumianowych;
- wykorzystuje współczynniki dwumianowe do rozwiązywania zadań dowodowych dotyczących podzielności liczb całkowitych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Dwumian Newtona – zadania ze złożonymi warunkami” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach analizują treści z sekcji „Przeczytaj” metodą tekstu przewodniego. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-7 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Symbol Newtona](#)
- [Własności symbolu Newtona](#)
- [Przydatny symbol Newtona](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Dwumian Newtona – zadania ze złożonymi warunkami”.