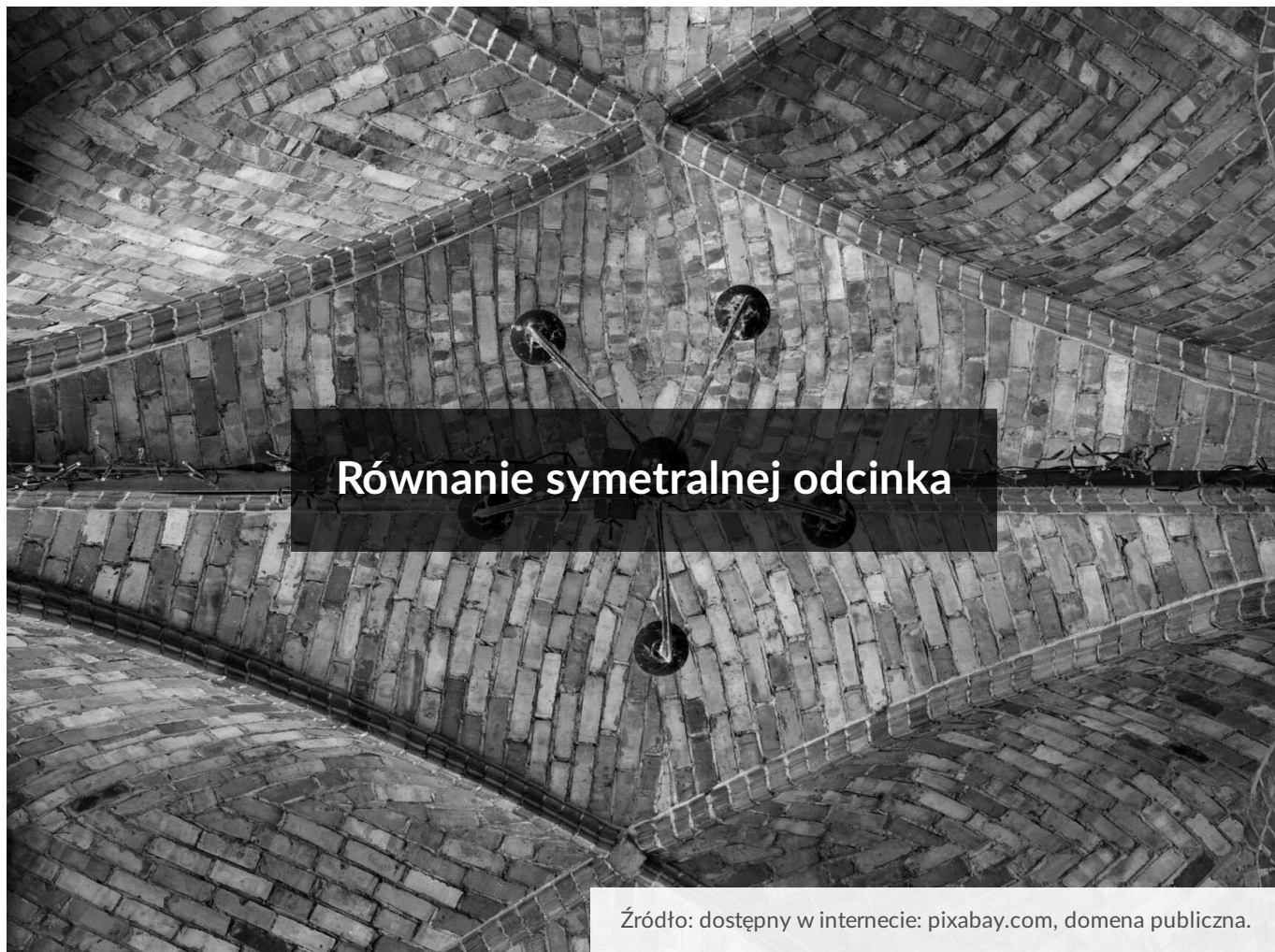




Równanie symetralnej odcinka

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie symetralnej odcinka

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

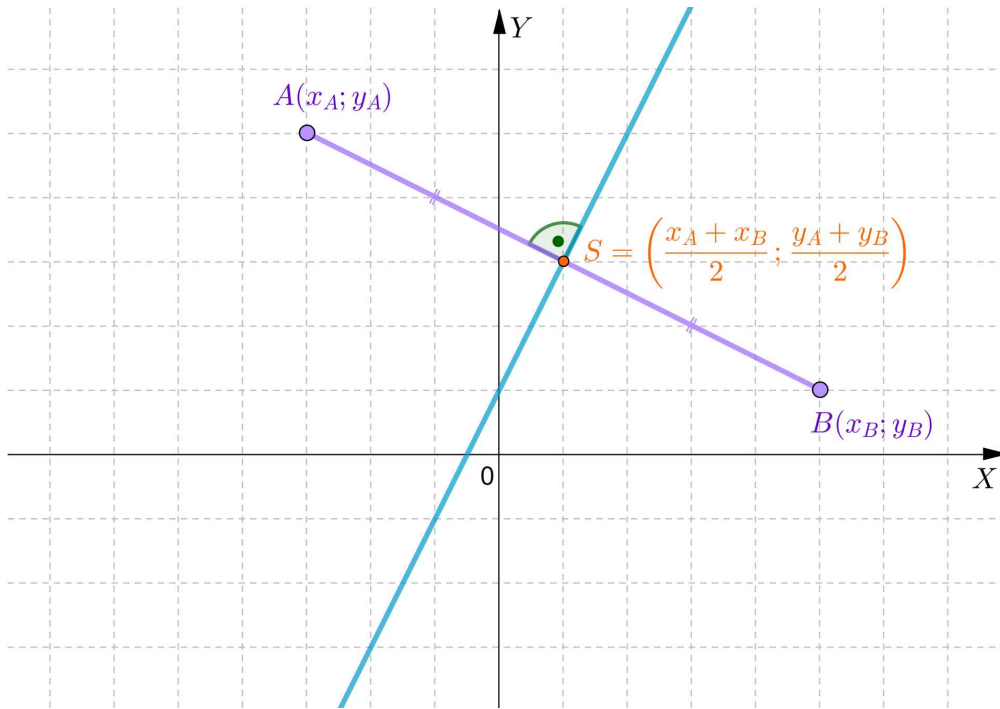
W tym temacie wyprowadzimy równanie prostej zawierającej symetralną odcinka o danych końcach oraz skupimy się na rozwiązaniu zadań mających związek z pojęciem symetralnej odcinka.

Twoje cele

- Wyznaczysz równanie symetralnej odcinka o danych końcach.
- Zastosujesz równanie symetralnej odcinka do rozwiązywania problemów geometrii analitycznej.

Przeczytaj

Rozważmy odcinek, który nie jest równoległy do osi X , o końcach $A = (x_A; y_A)$ i $B = (x_B; y_B)$. Naszym celem jest wyznaczyć równanie symetralnej tego odcinka.

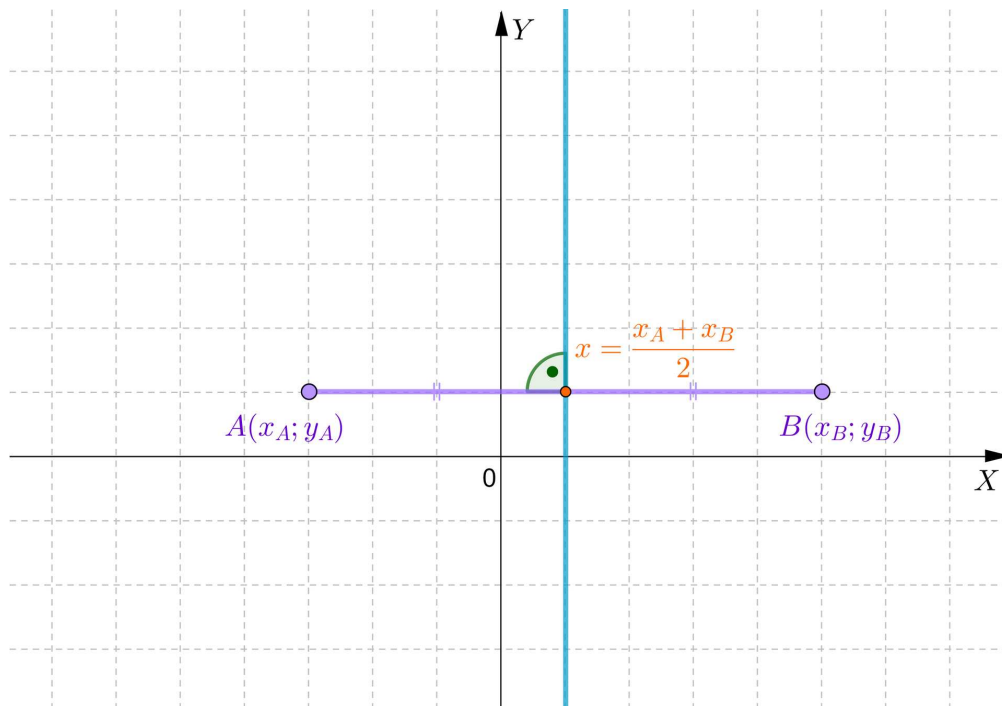


Przypomnijmy, że **symetralna odcinka** przecina go w połowie i jest do niego prostopadła. Potrzebny nam jest zatem współczynnik kierunkowy tej prostej i współrzędne środka odcinka AB . Zgodnie ze wzorami współrzędne środka S odcinka AB to $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, zaś współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$. Zatem (z warunku prostopadłości prostych) współczynnik kierunkowy symetralnej to $-\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$.

Równanie symetralnej odcinka AB ma postać $y - \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)$, co po przekształceniu daje

$$2(x_A - x_B)x + 2(y_A - y_B)y - (y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) = 0.$$

Sprawdźmy jeszcze, czy powyższy wzór jest prawdziwy dla odcinka AB , który jest równoległy do osi X . Wówczas $y_A = y_B$, więc wzór przyjmuje postać $2(x_A - x_B)x - (x_A^2 - x_B^2) = 0$. Ponieważ rozważamy odcinek, to $x_A \neq x_B$, więc obie strony otrzymanego równania możemy podzielić przez $x_A - x_B$, otrzymując równanie $x = \frac{x_A + x_B}{2}$.



Łatwo sprawdzić, że to równanie opisuje **symetralną odcinka** o końcach $A = (x_A; y)$ i $B = (x_B; y)$. Zatem wzór $2(x_A - x_B)x + 2(y_A - y_B)y - (y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) = 0$ jest prawdziwy niezależnie od położenia odcinka AB względem osi.

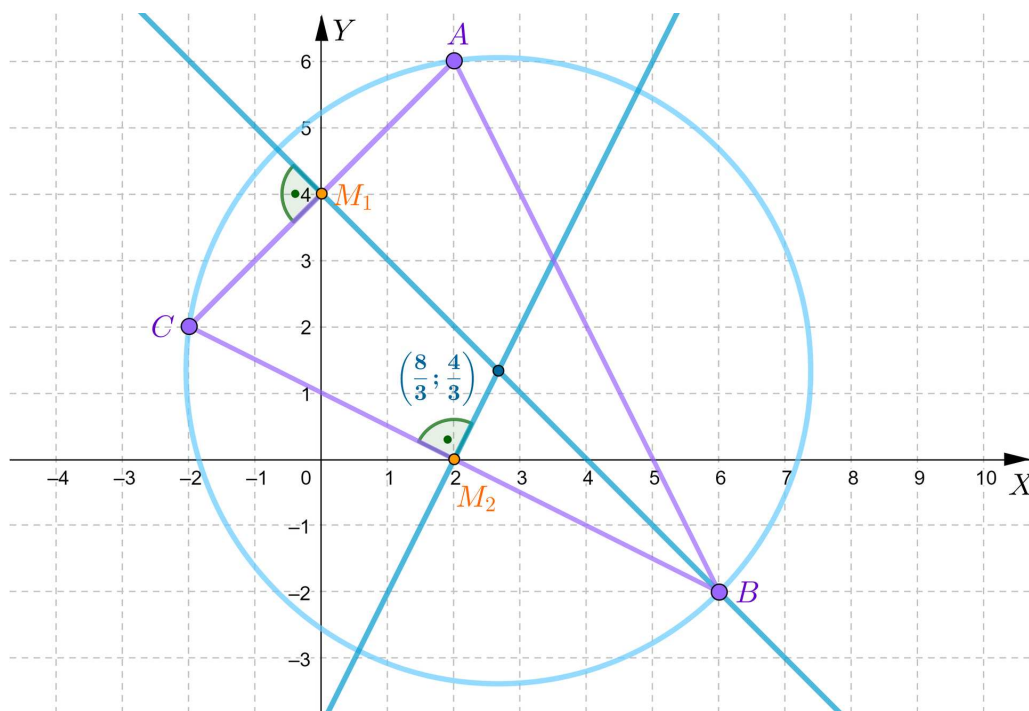
Przykład 1

Dany jest odcinek o końcach $A = (-6; 5)$ i $B = (3; -2)$. Wyznamy równanie symetralnej tego odcinka. Środek S odcinka AB ma współrzędne $(\frac{-6+3}{2}; \frac{5-2}{2}) = (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$. Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy $\frac{-2-5}{3-(-6)} = \frac{-7}{9}$, więc współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB jest równy $\frac{9}{7}$. Zatem równanie symetralnej odcinka AB to $y = \frac{9}{7}(x + \frac{3}{2}) + \frac{3}{2}$, czyli $y = \frac{9}{7}x + \frac{24}{7}$.

Przykład 2

Wiadomo, że **środek okręgu opisanego na trójkącie** znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych jego boków. Wyznamy środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (2; 6)$, $B = (6; -2)$, $C = (-2; 2)$. Zaczniemy od wyznaczenia symetralnej boku AC : jego środek M_1 ma współrzędne $(\frac{2-2}{2}; \frac{6+2}{2}) = (0; 4)$. Współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy $\frac{6-2}{2-(-2)} = 1$, zatem współczynnik kierunkowy symetralnej boku AC to (-1) . Równanie symetralnej ma postać $y = -(x - 0) + 4$, czyli $y = -x + 4$. Środek M_2 boku BC ma współrzędne $(\frac{6-2}{2}; \frac{-2+2}{2}) = (2; 0)$, zaś współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy $\frac{-2-2}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$, zatem współczynnik kierunkowy symetralnej boku BC jest równy 2 . Równanie symetralnej boku BC ma postać: $y = 2(x - 2) + 0$, czyli $y = 2x - 4$. Aby wyznaczyć punkt przecięcia tych symetralnych, wystarczy rozwiązać układ równań

$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$, z którego wynika równanie $-x + 4 = 2x - 4$ spełnione przez $x = \frac{8}{3}$. Dla $x = \frac{8}{3}$, otrzymujemy $y = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$. Zatem współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC to $(\frac{8}{3}; \frac{4}{3})$.



Słownik

symetralna odcinka

prosta prostopadła do danego odcinka przecinająca go na połowy; zbiór punktów leżących w równych odległościach od końców tego odcinka

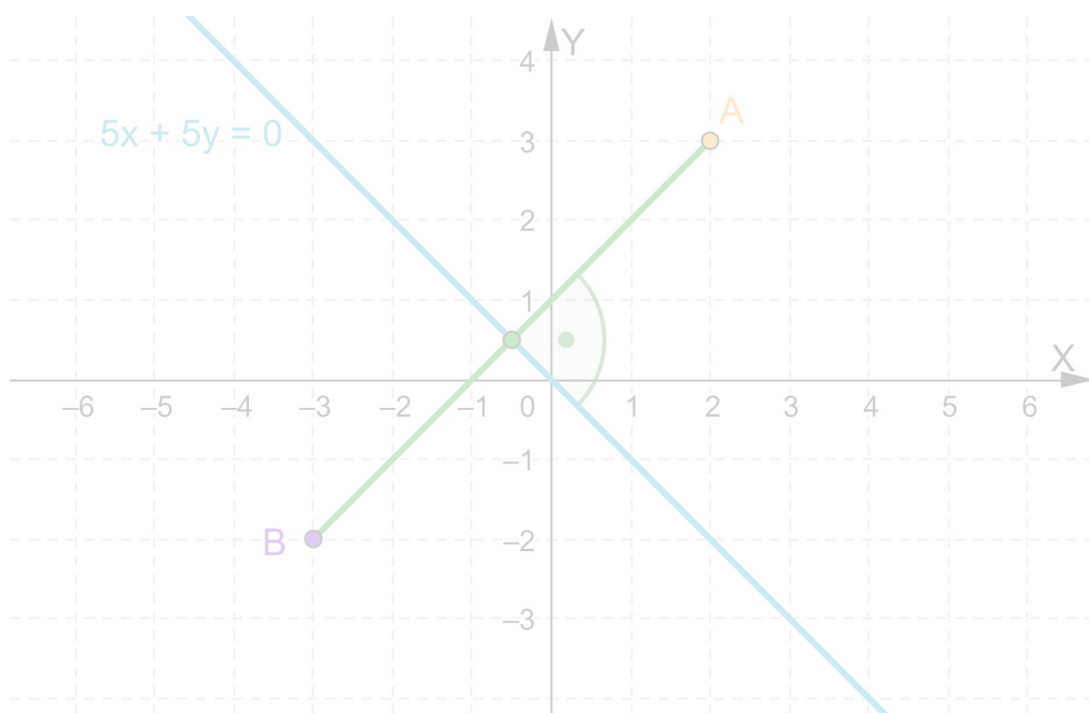
środek okręgu opisanego na trójkącie

można go wyznaczyć jako punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta

Aplet

Polecenie 1

Zmieniając położenie punktów A i B w układzie współrzędnych, obserwuj jak zmienia się równanie symetralnej odcinka AB .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D801Y8vel>

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Pytania	Odpowiedzi		
Symetralna odcinka o końcach $A = (-3; 2)$ i $B = (3; 0)$ ma równanie	$y = 6x + 2$ ☐	$-3x + y = 1$ ☐	$6x - 2y = -2$ ☐
Symetralna odcinka o końcach $A = (-2; 2)$ i $B = (2; -3)$ ma równanie	$-4x + 5y = -2,5$ ☐	$4x + 5y = 2,5$ ☐	$8x + 10y = 5$ ☐
Symetralna odcinka o końcach $A = (-5; 1)$ i $B = (2; -2)$ ma równanie	$7x + 3y = 9$ ☐	$3,5x + 1,5y = 4,5$ ☐	$14x - 6y = -18$ ☐
Symetralna odcinka o końcach $A = (4; 0)$ i $B = (-1; -3)$ ma równanie	$15x + 9y = 9$ ☐	$-10x - 6y = -6$ ☐	$5x + 3y = 3$ ☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wykaż, że dla odcinka AB , który jest równoległy do osi Y wzór

$$2(x_A - x_B)x + 2(y_A - y_B)y - (y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) = 0 \text{ redukuje się do postaci } y = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4



Wskaż równania symetralnych odcinków o podanych końcach.

☐ Symetralną odcinka o końcach $A = (1; 0)$, $B = (5; 6)$ jest prosta $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

☐ Symetralną odcinka o końcach $A = (1; 1)$, $B = (5; 7)$ jest prosta $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

☐ Symetralną odcinka o końcach $A = (1; 1)$, $B = (4; 7)$ jest prosta $y = 2x - 1$,

☐ Symetralną odcinka o końcach $A = (-2; -1)$, $B = (6; 3)$ jest prosta $y = -2x + 5$.

Ćwiczenie 5



Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (-6; 5)$, $B = (6; -1)$, $C = (2; -7)$. Uporządkuj poniższe wypowiedzi tak, aby otrzymać rozwiązanie zadania.

Zatem równanie symetralnej odcinka AC ma postać , czyli $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Prosta AB ma współczynnik kierunkowy $\frac{-1-5}{6-(-6)} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$.

Zatem równanie prostej AC ma postać: $y - 5 = -\frac{3}{2}(x - (-6))$, czyli $y = -\frac{3}{2}x - 4$.

Teraz wyznaczmy symetralne odcinków AB i AC (w tej kolejności).

Zatem równanie symetralnej odcinka AB ma postać $y - 2 = -2(x - 0)$, czyli $y = 2x + 2$.

Rozwiązaniem powyższego układu jest para liczb $x = -\frac{5}{4}$, $y = -\frac{1}{2}$.

Zatem równanie prostej AB ma postać: $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - (-6))$, czyli $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia symetralnych boków AB i AC , wystarczy rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AC to $\frac{2}{3}$, zaś środek boku AC ma współrzędne $(\frac{-6+2}{2}; \frac{5-7}{2}) = (-2; -1)$.

Współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB to 2, zaś środek boku AB ma współrzędne $(\frac{-6+6}{2}; \frac{5-1}{2}) = (0; 2)$.

Prosta AC ma współczynnik kierunkowy $\frac{-7-5}{2-(-6)} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$.

Zacniemy od wyznaczenia równań prostych AB i AC (w tej kolejności).

Ćwiczenie 6



Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC , znając współrzędne jego wierzchołków. Połącz w pary.

$$A = (-2; 3), B = (3; 0), C = (-5; 0)$$

$$S = (0, 5; 3, 5)$$

$$A = (4; -2), B = (0; -3), \\ C = (-5; 0)$$

$$S = (-1; -1)$$

$$A = (1; 3), B = (1; -2), C = (-5; 1)$$

$$S = (-0, 5; 1, 5)$$

$$A = (-4; 2), B = (3; 1), \\ C = (-1; -2)$$

$$S = (-1, 5; 0, 5)$$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż test.

Pytania	Odpowiedzi	
Symetralna odcinka o końcach $A = (-4; -1)$ i $B = (4; 3)$ ma równanie:	$y = \frac{1}{2}x + 1$ ☐	$y = -2x + 1$ ☐
Oś symetrii odcinka o końcach $A = (-2; 1)$ i $B = (2; -5)$ ma równanie:	$y = -1, 5x - 2$ ☐	$y = \frac{2}{3}x - 2$ ☐
Środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (4; 10), B = (2; -6), C = (-4; -2)$ ma współrzędne:	$(3; 2)$ ☐	$(2; 3)$ ☐
Środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (3; 3), B = (1; -3), C = (-3; 1)$ ma współrzędne:	$(0; 0)$ ☐	$(0, 5; 0, 5)$ ☐

Ćwiczenie 8



Rozwiąż test.

Pytania	Odpowiedzi		
Symetralne odcinków AB i CD o końcach $A = (-4; 1)$ i $B = (1; 3)$ oraz $C = (-5; -5)$ i $D = (5; -1)$ są:	równoległe ☐	prostopadłe ☐	przecinają się, ale nie są prostopadłe ☐
Symetralne odcinków AB i CD o końcach $A = (-3; 1)$ i $B = (3; 3)$ oraz $C = (-5; -5)$ i $D = (5; -2)$ są:	równoległe ☐	prostopadłe ☐	przecinają się, ale nie są prostopadłe ☐
Symetralne odcinków AB i CD o końcach $A = (-1; 2)$ i $B = (2; 0)$ oraz $C = (-4; 7)$ i $D = (-1; -3)$ są:	równoległe ☐	prostopadłe ☐	przecinają się, ale nie są prostopadłe ☐
Czy odcinki AB i CD o końcach $A = (1; 3)$ i $B = (4; 2)$ oraz $C = (3; -6)$ i $D = (-3; -4)$ mają wspólną symetralną?	tak ☐	nie ☐	
Czy odcinki AB i CD o końcach $A = (-3; 2)$ i $B = (2; 4)$ oraz $C = (6; 0)$ i $D = (-4; -4)$ mają wspólną symetralną?	tak ☐	nie ☐	

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie symetralnej odcinka

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza równanie symetralnej odcinka o danych końcach,
- stosuje równanie symetralnej odcinka do rozwiązywania problemów geometrii analitycznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda tekstu przewodniego;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Aplet”.

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Równanie symetralnej odcinka” i celów lekcji.
2. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego zapoznają się w parach z materiałem w sekcji „Przeczytaj”.
 2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”.
Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
 3. W kolejnym kroku uczniowie rozwiązują ćwiczenia numer 3-5, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
 4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 6, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką
1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
 2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Symetralna odcinka](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Równanie symetralnej odcinka”.