



Zastosowanie klasycznego modelu prawdopodobieństwa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie klasycznego modelu prawdopodobieństwa

Źródło: Stefan Keller, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Jeszcze w początkach XX wieku wielu przedsiębiorców, finansistów, a nawet polityków, przed podjęciem ważnej decyzji, zasięgało rady wróżki. Teraz z pomocą przychodzi rachunek prawdopodobieństwa. Za jego pomocą można wyliczyć szansę powodzenia danego przedsięwzięcia.



Wróżka

Artysta: Georges de La Tour

Rok do. 1630

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Najprostszym narzędziem rachunku prawdopodobieństwa jest klasyczna definicja prawdopodobieństwa, która podaje gotowy wzór do wyznaczania prawdopodobieństwa.

W tym materiale podamy przykłady zastosowania tej definicji do wyznaczania prawdopodobieństwa zdarzeń w zbiorach skończonych.

Twoje cele

- Określisz liczbę zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu.
- Określisz liczbę zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego.
- Obliczysz prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Przeczytaj

Podamy teraz możliwości zastosowania klasycznej definicji prawdopodobieństwa, na przykładzie zadań „o rzutach”, „o losowaniu” i „o liczbach”. W materiale zawarte są zadania o niewielkim stopniu trudności, jako zadania wprowadzające w tematykę związaną z wykorzystaniem modelu prawdopodobieństwa klasycznego.

Na początek przypomnienie definicji, z której będziemy korzystać.

Definicja: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ważne!

W klasycznym schemacie obliczania prawdopodobieństwa zakłada się, że:

- **zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jest zbiorem skończonym,**
- **wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.**

Korzystając z tych założeń (nie powtarzając ich za każdym razem) będziemy rozwiązywać wszystkie zadania w tym materiale.

Zadania „o rzutach”

Najczęściej spotykaną klasą zadań z rachunku prawdopodobieństwa są zadania związane z rzutami kostką do gry lub monetą. Przyjmujemy przy tym, że kostka do gry jest symetrycznym sześcianem (tzn. tak zbudowanym, że szansa otrzymania każdego układu oczek jest taka sama). Podobnie, zakładamy, że moneta wykorzystywana w doświadczeniach jest symetryczna.

Przykład 1

Rzucamy dwa razy kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie mniejsza od 6.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na otrzymaniu sumy oczek mniejszej od 6.

Aby wyznaczyć moc zbioru zdarzeń elementarnych, korzystamy z reguły mnożenia.

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

Rozwiązanie zadania wymaga wypisania wszystkich zdarzeń sprzyjających.

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Stąd:

$$|A| = 10$$

Na podstawie klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek mniejszej od 6 jest równe $\frac{5}{18}$.

Przykład 2

Rzucamy trzykrotnie monetą. Obliczymy prawdopodobieństwo, że orzeł wypadł tylko raz.

Oznaczmy:

O - zdarzenie polegające na tym, że orzeł wypadł tylko raz.

Korzystamy z reguły mnożenia.

$$|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Wypisujemy zdarzenia sprzyjające:

$$O = \{(0, R, R), (R, 0, R), (R, R, 0)\}$$

Stąd:

$$|O| = 3$$

Zatem:

$$P(O) = \frac{3}{8}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dokładnie raz jest równe $\frac{3}{8}$.

Przykład 3

Rzucamy kostką i monetą. Obliczymy prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki i parzystej liczby oczek.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu reszki i parzystej liczby oczek.

Rzucamy kostką – 6 możliwości,

rzucamy monetą – 2 możliwości.

Zatem:

$$|\Omega| = 6 \cdot 2 = 12$$

W tym przypadku nie jest ważna kolejność, w jakiej rzucaliśmy kostką i monetą – możemy przyjąć, że rzucamy jednocześnie.

Zdarzenia sprzyjające

$$A = \{(2, R), (4, R), (6, R)\}, \text{ czyli } |A| = 3$$

Szukane prawdopodobieństwo jest więc równe:

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki i parzystej liczby oczek jest równe $\frac{1}{4}$.

Zadania o losowaniu

W zadaniach o losowaniu ważne jest dokładne przeanalizowanie treści, aby ustalić, czy ma być to losowanie ze zwracaniem, czy bez zwracania.

W losowaniu **ze zwracaniem (losowaniu z powtórzeniami)** wylosowany obiekt trafia z powrotem do puli przed następnym powtórzeniem losowania. Zatem dany obiekt może być wylosowany wielokrotnie. Dobre przykłady to rzut monetą lub rzut kostką.

W losowaniu **bez zwracania** wylosowany obiekt nie trafia z powrotem do puli, więc nie można go wylosować przy następnym losowaniu. Dobrym przykładem może być tworzenie z danych cyfr liczby o niepowtarzających się cyfrach.

Przykład 4

W urnie znajduje się 5 kul zielonych i 6 białych. Losujemy kolejno, bez zwracania, trzy kule. Obliczymy prawdopodobieństwo, że za trzecim razem wylosujemy kulę zieloną.

Skoro losujemy kule bez zwracania, to znaczy, że wylosowanych kul nie wrzucamy już z powrotem, zatem liczba kul w urnie po każdym losowaniu zmniejsza się.

W urnie początkowo było $5 + 6 = 11$ kul.

Pierwszą kulę losujemy więc spośród 11 kul, drugą spośród 10 kul, a trzecią spośród 9 kul.

Z reguły mnożenia wynika, że:

$$|\Omega| = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$$

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu za trzecim razem kuli zielonej.

Zdarzeniu A sprzyjają zdarzenia, w których na trzecim miejscu jest kula zielona, na pierwszym dowolna z $11 - 1 = 10$ kul, a na drugim dowolna z pozostałych 9 kul.

$$|A| = 10 \cdot 9 \cdot 5 = 450$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe:

$$P(A) = \frac{450}{990} = \frac{5}{11}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wylosowania za trzecim razem kuli zielonej jest równe $\frac{5}{11}$.

Przykład 5

Z urny zawierającej 3 kule białe i 7 czarnych, losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej dwóch kul czarnych.

Z treści zadania wnioskujemy, że nie ważna jest kolejność w jakiej losujemy kule, a jedynie kolor.

Losujemy trzy spośród dziesięciu kul, stąd:

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120$$

Oznaczmy:

C – wylosowanie co najmniej dwóch kul czarnych.

Zdarzeniu C sprzyjają zdarzenia: wylosowano trzy kule czarne, wylosowano dwie kule czarne i jedną białą.

W pierwszym przypadku trzy kule czarne losujemy spośród siedmiu czarnych.

W drugim przypadku losujemy dwie kule czarne spośród siedmiu czarnych i jedną białą spośród trzech białych.

Z reguły dodawania wynika, że:

$$|C| = \binom{7}{3} + \binom{7}{2} \cdot \binom{3}{1} = 35 + 63 = 98$$

Szukane prawdopodobieństwo jest więc równe

$$P(C) = \frac{98}{120} = \frac{49}{60}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej dwóch kul czarnych jest równe $\frac{49}{60}$.

Zadania o liczbach

Rozwiązanie zadania o liczbach z reguły wymaga przeprowadzenia prostych rozumowań, prowadzących do wyznaczenia liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu. Często przy tym korzysta się z teorii podzielności.

Przykład 6

Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 ustawiamy losowo jedna za drugą. Obliczymy prawdopodobieństwo, że suma każdych dwóch sąsiednich, ustawionych w ten sposób liczb, będzie liczbą nieparzystą.

Aby określić liczbę możliwych ustawień w szeregu sześciu podanych liczb, korzystamy ze wzoru na liczbę permutacji zbioru sześcioelementowego.

$$|\Omega| = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Suma dwóch liczb jest nieparzysta, jeżeli jedna z tych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta.

Zatem liczby parzyste i nieparzyste muszą stać na przemian.

Na przykład:

1, 2, 3, 4, 5, 6 lub 6, 5, 4, 3, 2, 1

Widać więc, że mamy dwie możliwości – ustawiając liczby można zacząć od liczby nieparzystej lub od liczby parzystej.

Są trzy liczby nieparzyste – można je ustawić na $3! = 6$ sposobów. Mamy też trzy liczby parzyste, zatem, zgodnie z regułą mnożenia, w pierwszym przypadku jest $6 \cdot 6 = 36$

możliwości. Podobnie w drugim przypadku.

Wynika z tego, że

$$p = \frac{36+36}{720} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb, będzie liczbą nieparzystą jest równe $\frac{1}{10}$.

Przykład 7

Na stole leżą karteczki, na których zapisane są liczby od 1 do 8 – na każdej kartce jedna liczba. Wyciągamy jednocześnie trzy karteczki. Obliczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia S – jedna z wylosowanych liczb jest równa sumie dwóch pozostałych liczb.

Z treści zadania wynika, że mamy do czynienia z losowaniem bez zwracania, w którym nie jest ważna kolejność, w jakiej losujemy karteczki z liczbami.

$$|\Omega| = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56$$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia, sprzyjające zdarzeniu S (tu również nie jest ważna kolejność wypisywania liczb).

$$S = \{(3, 1, 2), (4, 1, 3), (5, 1, 4), (5, 2, 3), (6, 1, 5), (6, 2, 4), (7, 1, 6), (7, 2, 5), (7, 3, 4), (8, 1, 7), (8, 2, 6), (8, 3, 5)\}$$

Zatem:

$$|S| = 12$$

Obliczamy prawdopodobieństwo, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne.

$$P(S) = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że jedna z wylosowanych liczb jest równa sumie dwóch pozostałych liczb jest równe $\frac{3}{14}$.

Słownik

klasyczna definicja prawdopodobieństwa

niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych; prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Animacja

Polecenie 1

Może wyda ci się to dziwne, ale teoretyczne modele rachunku prawdopodobieństwa zaczynały ugruntowywać się dopiero w XIX wieku. Zauważono wtedy wiele nieścisłości w już powstałych twierdzeniach i definicjach. Obejrzyj animację, zawierającą opis rozumowania francuskiego matematyka Josepha Bertranda, który uzasadniał, że prawdopodobieństwo nie jest wyznaczone jednoznacznie. Wywody te znane są dzisiaj pod nazwą paradoksu Bertranda.

Opierają się one o geometryczną definicję prawdopodobieństwa, w której zakłada się, że wyniki doświadczenia losowego można zinterpretować jako punkty pewnego obszaru. Jeśli każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny, to prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia można obliczyć np. jako stosunek miary pola odpowiadającej mu części obszaru do miary całego obszaru.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1FmsJKiG>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zastosowania klasycznego modelu prawdopodobieństwa.

Polecenie 2

Rozumowanie, które przeprowadził Bertrand pokazuje, że obliczając prawdopodobieństwo zajścia tego samego zdarzenia, można otrzymać trzy różne wyniki. Wyjaśnij, dlaczego.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dane są dwie dodatnie liczby naturalne n i m takie, że $n > 100$, $1 < m < n$.

Spośród zapisanych na kartce n kolejnych liczb naturalnych, wybieramy w sposób losowy najpierw jedną, a następnie drugą liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że jedna z wylosowanych liczb jest mniejsza od m , a druga większa od m .

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie klasycznego modelu prawdopodobieństwa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa III lub IV

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa liczbę zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu
- określa liczbę zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego
- oblicza prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa
- dobiera odpowiedni model matematyczny do sytuacji probabilistycznej z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- symulacja

- graffiti

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kostki do gry, monety
- kolorowe kule, pudełka, karteczki z zapisanymi liczbami
- katony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie pracują w parach. Ich zadaniem jest wymyślenie zasad dwuosobowej gry w kości, tak aby gra była sprawiedliwa (czyli aby każdy z graczy miał równe szanse wygranej). Powinni też określić prawdopodobieństwo wygrania dla każdego z graczy (przy czym prawdopodobieństwo nie może wynosić 0, 5).
2. Następnie uczniowie grają w wymyśloną przez siebie grę, notują wyniki i ustalają zwycięzcę po kilku rozegranych partiach (liczbę partii określają wcześniej).
3. Dyskusja – dlaczego w grze, która jest grą sprawiedliwą, można przegrać? W jaki sposób można obliczyć prawdopodobieństwo wygrania?
4. Uczniowie przypominają krótko znane im wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa (koniecznie powinni przypomnieć klasyczną definicję prawdopodobieństwa).
5. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach. Zapoznają się z treścią każdego z przykładów podanych w sekcji „Przeczytaj”. Przed przeczytaniem rozwiązania, sami określają prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia i metodą symulacji, wypróbują w praktyce (korzystając z przygotowanych przez nauczyciela kul, karteczek z liczbami, kostek) swoje przypuszczenia.
2. Kończącym elementem tej części zajęć jest zapisanie na tablicy wymyślonych przez grupy zadań, podobnego typu jak w sekcji „Przeczytaj”. Rozwiązanie tych zadań będzie pracą domową dla wszystkich uczniów.
3. Uczniowie wspólnie oglądają animację, która może być początkiem dyskusji na temat znanych już uczniom definicji prawdopodobieństwa.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie pracują indywidualnie, rozwiązując ćwiczenia interaktywne.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Liderzy grup opowiadają o pracy swoich grup, prezentują ciekawsze wnioski i pomysły.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.
4. Na zakończenie zajęć uczniowie wykonują wspólne graffiti, na którym umieszczają pytania, problemy, uwagi, ciekawostki, itp. na temat wykorzystania klasycznej definicji prawdopodobieństwa.
5. Graffiti może być zaczątkiem następnej lekcji lub zmieniać się na kolejnych lekcjach – uczniowie będą mogli dopisywać lub zmieniać elementy graficzne – w miarę rozwoju umiejętności związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują zadania, przygotowane przez kolegów i koleżanki (te, które zostały zapisane w czasie lekcji na tablicy).

Materiały pomocnicze:

[Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana w czasie zajęć poświęconych paradoksom matematycznym.