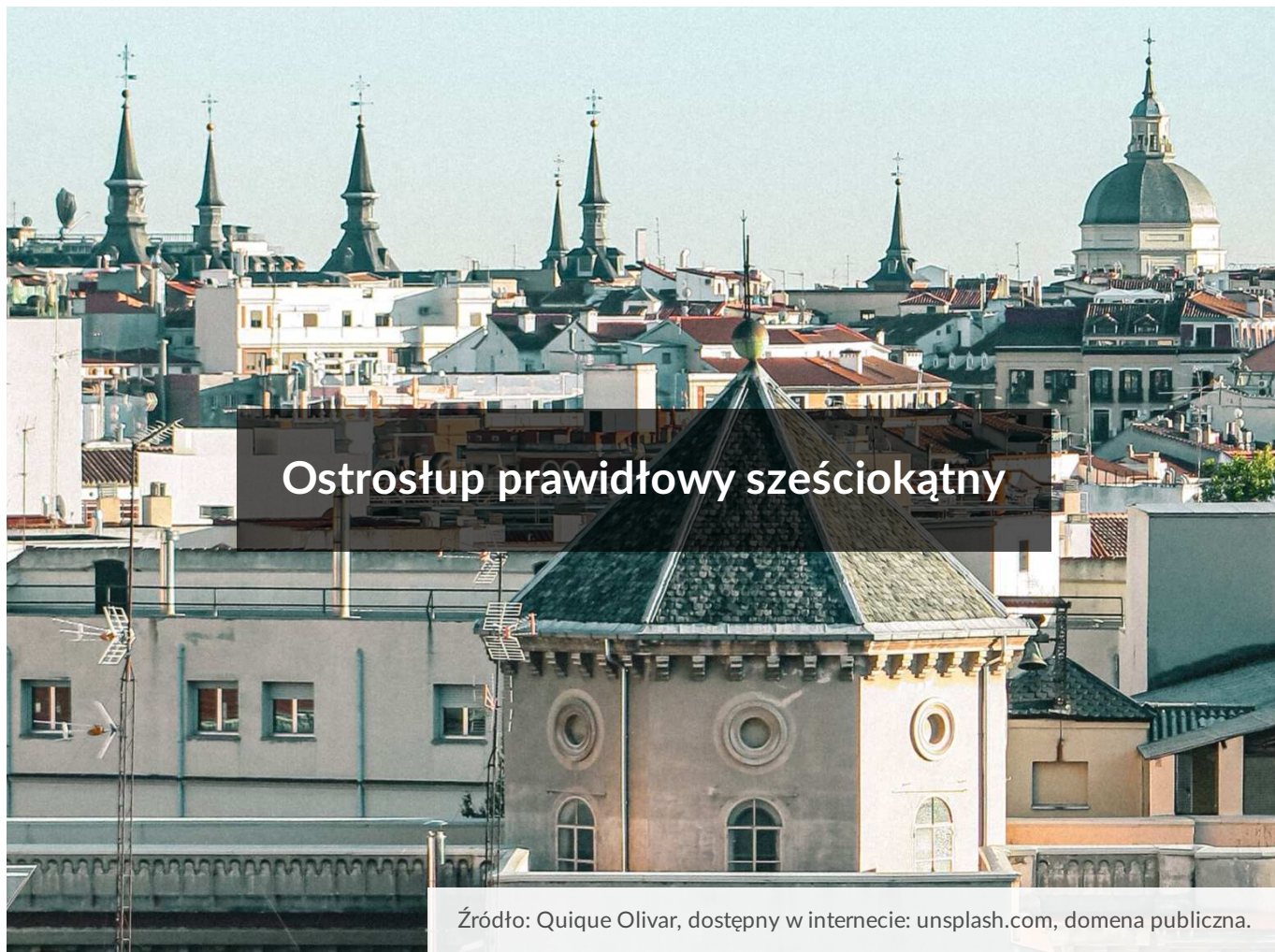


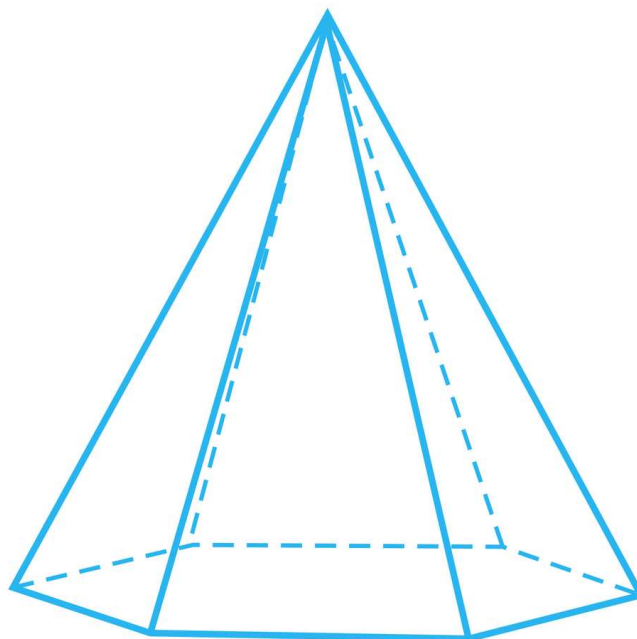


Ostrośłup prawidłowy sześciokątny

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Ostrosłup prawidłowy sześciokątny to bryła, która nie jest często spotykana w otoczeniu, jednak taki kształt może mieć np. dach altany ogrodowej, zwieńczenie wieży kościoła, indiańskie tipi czy nawet mauzoleum – wystarczy zatem dobrze się rozejrzeć.



W tym materiale poznasz podstawowe własności dotyczące ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego.

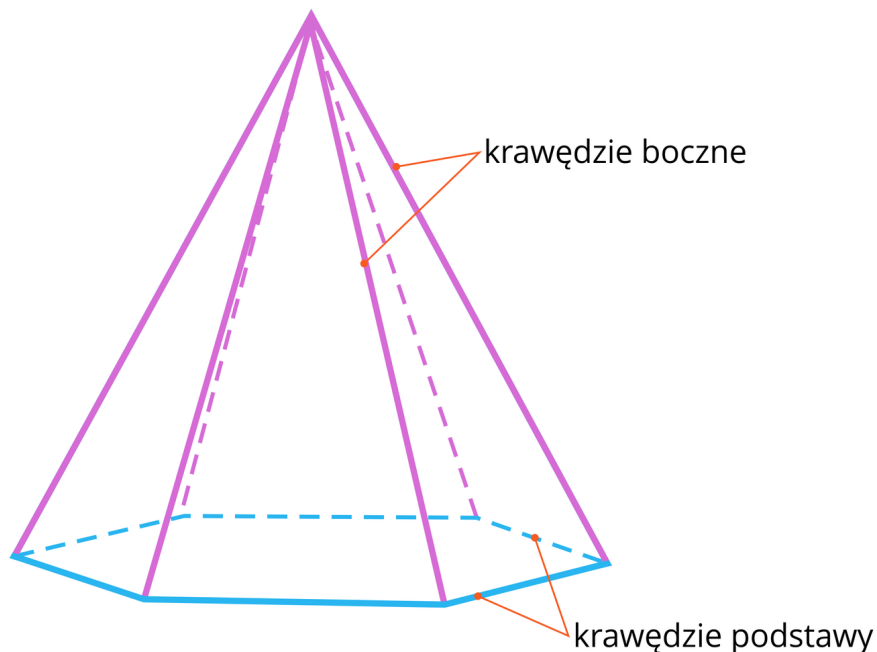
Twoje cele

- Zdefiniujesz ostrosłup prawidłowy sześciokątny.
- Wyznaczysz warunek istnienia ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ze względu na długości jego krawędzi.
- Narysujesz siatkę ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego.
- Rozwiążesz zadania dotyczące ostrosłupów prawidłowych sześciokątnych.

Przeczytaj

Ostrosłup prawidłowy sześciokątny to **ostrosłup prosty**, który ma w podstawie sześciokąt foremny, a ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi. Zauważ, że ostrosłup prawidłowy sześciokątny ma:

- 1 podstawę,
- 7 ścian, w tym 6 ścian bocznych, które są trójkątami równoramiennymi,
- 7 wierzchołków,
- 12 krawędzi (6 krawędzi bocznych i 6 krawędzi podstawy).



Pokażemy, że dla ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego zachodzi **twierdzenie Eulera** dla wielościanów wypukłych:

$$W + S = 7 + 7 = 14$$

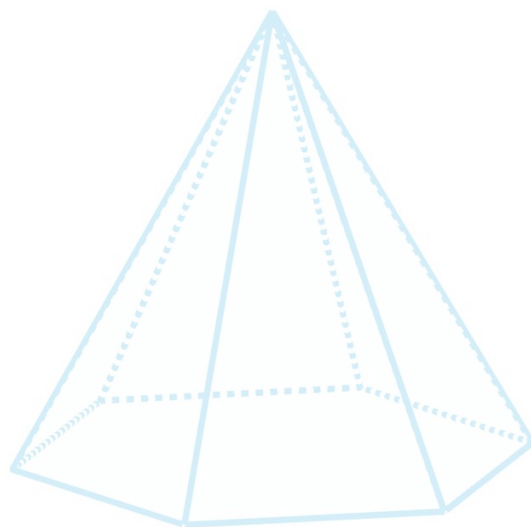
$$K + 2 = 12 + 2 = 14$$

$$\text{zatem: } W + S = K + 2$$

Spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego i wpisanego w sześciokąt foremny, leży więc na przecięciu dłuższych przekątnych sześciokąta foremnego.

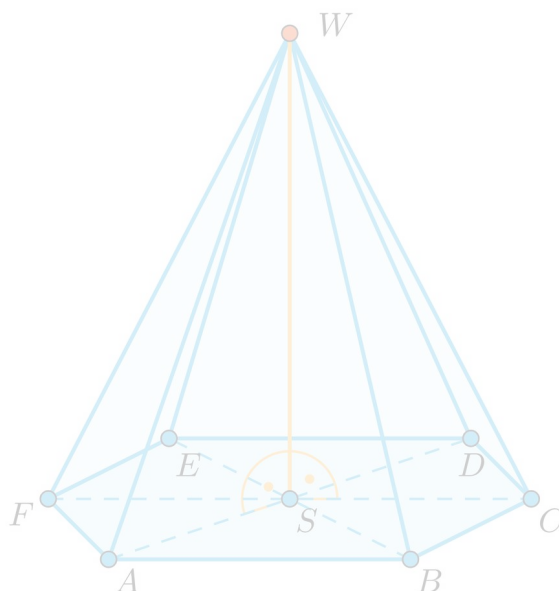
Kąty nachylenia wszystkich ścian bocznych ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego do płaszczyzny podstawy są równe.

Poniższy aplet pozwoli Ci zobaczyć, jak zachowuje się nasza bryła. Przesuń suwaki i zobacz, jak wygląda **ostrosłup prawidłowy sześciokątny**.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DjTjnefwk>

Przyjrzymy się teraz, w jaki sposób narysować ostrosłup prawidłowy sześciokątny.

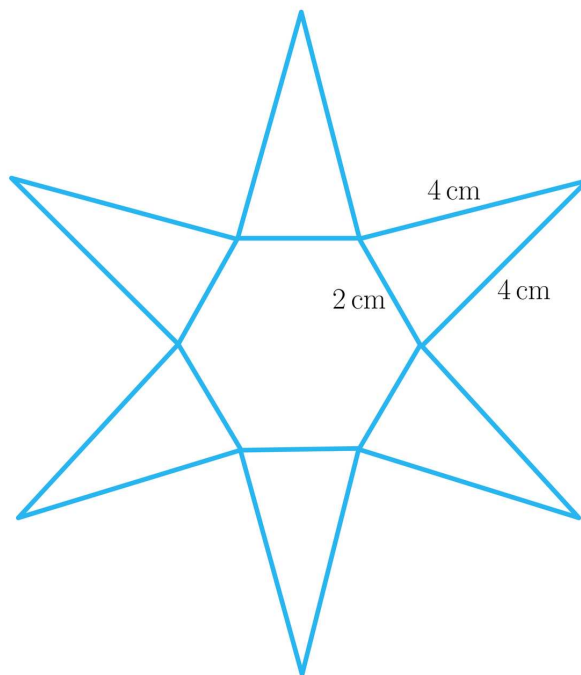


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DjTjnefwk>

Narysujemy siatkę ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 2 cm i krawędzi bocznej długości 4 cm

Rozwiązanie

Rysujemy najpierw sześciokąt foremny o krawędzi długości 2 cm. Na każdym jego boku budujemy trójkąt równoramienny o podstawie 2 cm oraz ramieniu długości 4 cm.

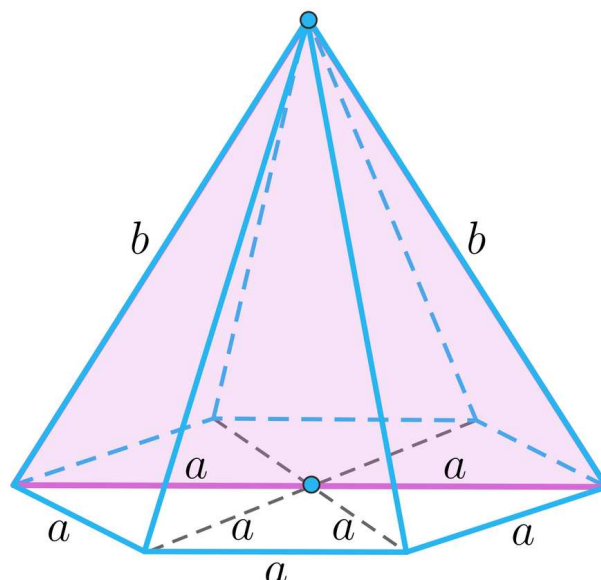


Przykład 2

Sprawdzimy, czy z odcinków długości $a = 6$ cm i $b = 5$ cm da się zbudować ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a i krawędzi bocznej b .

Rozwiązanie

Zauważmy, że dłuższa przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego i 2 przeciwległe krawędzie tworzą trójkąt, co widać na poniższym rysunku:



Z warunku trójkąta wynika, że długość każdego boku tego trójkąta musi być mniejsza niż suma długości pozostałych boków. Podstawą tego trójkąta jest przekątna sześciokąta, której długość wynosi 12 cm. Suma długości pozostałych boków jest równa 10 cm, co jest sprzeczne z warunkiem trójkąta. Zatem z odcinków długości $a = 6$ cm i $b = 5$ cm nie da się zbudować ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a i krawędzi bocznej b .

Ważne!

Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego musi być większa od długości krawędzi jego podstawy.

Przykład 3

Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi 72 cm. Obliczymy długości tych krawędzi wiedząc, że krawędzie boczne są dwa razy dłuższe od krawędzi podstawy.

Rozwiązanie

Wiemy, że omawiany ostrosłup ma 6 krawędzi podstawy (oznaczymy je jako a) i sześć krawędzi bocznych ($2a$). Powstaje równanie:

$$6a + 6 \cdot 2a = 72,$$

$$6a + 12a = 72,$$

$$18a = 72,$$

$$a = 4.$$

Zatem krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4 cm a krawędź boczna ma długość 8 cm.

Przykład 4

Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym krawędź boczna jest cztery razy dłuższa od krawędzi podstawy, wynosi S cm. Obliczmy pole podstawy tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Oznaczmy długość krawędzi podstawy jako niewiadomą a . Krawędź boczna jest cztery razy dłuższa, czyli ma długość $4a$. Możemy więc ułożyć równanie:

$$6a + 6 \cdot 4a = S,$$

$$6a + 24a = S,$$

$$30a = S,$$

$$a = \frac{S}{30}.$$

Obliczmy pole podstawy naszego ostrosłupa, czyli pole sześciokąta foremnego.

$$P_p = \frac{6 \cdot \left(\frac{S}{30}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot S^2 \sqrt{3}}{900 \cdot 4} = \frac{S^2 \sqrt{3}}{600} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Przykład 5

Drut o długości $7n$ cm wykorzystano do stworzenia modelu ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Podzielono go w stosunku 4 : 3. Dłuższą część wykorzystano na krawędzie boczne, krótszą na krawędzie podstawy. Obliczmy długość poszczególnych krawędzi ostrosłupa oraz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy.

Rozwiązanie

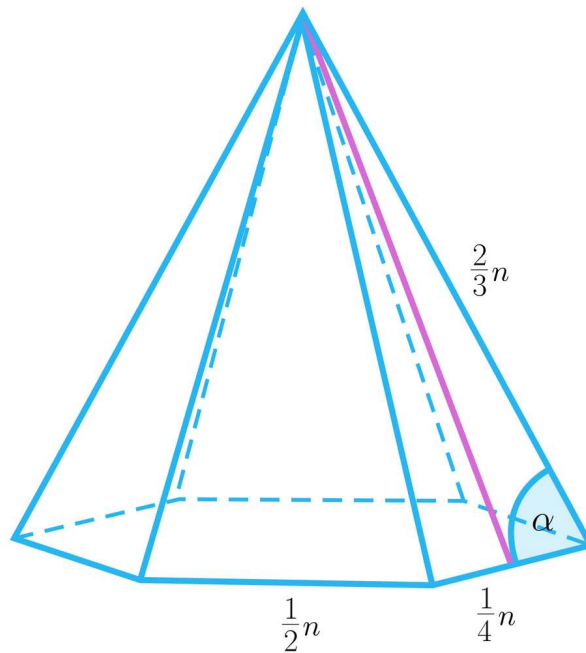
Drut podzielono na $4 + 3 = 7$ części,

$$7n : 7 = n$$

co oznacza, że suma długości krawędzi bocznych ostrosłupa wynosi $4n$ cm, zaś suma krawędzi podstawy: $3n$ cm. Policzmy więc długości poszczególnych krawędzi:

$4n : 6 = \frac{2}{3}n$ cm - długość krawędzi bocznej $3n : 6 = \frac{1}{2}n$ cm - długość krawędzi podstawy.

Wykonajmy rysunek pomocniczy, aby zobaczyć, jak policzyć cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy. Oznaczmy go α .



$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{4}n}{\frac{2}{3}n} = \frac{3}{8}$$

Przykład 6

Dłuższa przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 12 cm. Krawędź boczna jest dłuższa od krawędzi podstawy o 4 cm. Obliczmy sumę długości krawędzi tego ostrosłupa oraz miarę kąta płaskiego przy wierzchołku ostrosłupa.

Rozwiązanie

Zacznijmy od policzenia długości krawędzi podstawy naszego ostrosłupa. Skoro przekątna podstawy ma długość 12 cm, to korzystając ze wzoru na dłuższą przekątną podstawy otrzymujemy:

$$2a = 12,$$

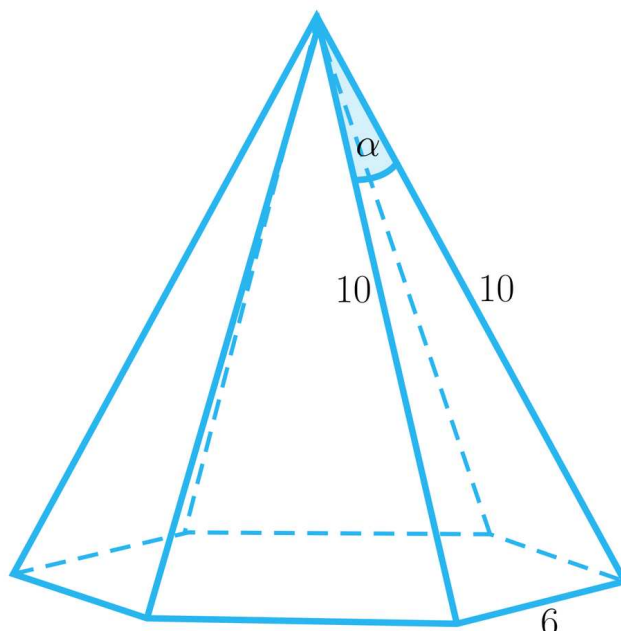
co daje nam:

$$a = 6 \text{ [cm]}.$$

Krawędź boczna jest dłuższa o 4 cm, więc ma długość 10 cm. Policzmy więc sumę krawędzi naszego ostrosłupa:

$$6 \cdot 6 + 6 \cdot 10 = 36 + 60 = 96 \text{ [cm]}.$$

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Obliczmy miarę kąta płaskiego przy wierzchołku ostrosłupa. Skorzystajmy z twierdzenia cosinusów.

$$6^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \alpha$$

$$36 = 200 - 200 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 0,82$$

$$\alpha \approx 35^\circ$$

Słownik

ostrosłup prawidłowy

ostrosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym

ostrosłup prosty

ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są równe. Spodek wysokości ostrosłupa prostego jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

ostrosłup prawidłowy sześciokątny

ostrosłup prosty, którego podstawa jest sześciokątem foremny

kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa

kąt pomiędzy ramionami ściany bocznej ostrosłupa

twierdzenie Eulera dla wielościanów

opisuje zależność pomiędzy liczbą wierzchołków, ścian i krawędzi wielościanu:

$W + S = K + 2$, gdzie: W - liczba wierzchołków, S - liczba ścian, K - liczba krawędzi.

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką, która przedstawia dach domu w kształcie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Następnie wykonaj poniższe polecenia.

Polecenie 2

Jaką długość będą miały kalenice (czyli krawędzie boczne ostrosłupa) naszego dachu?

Polecenie 3

Jaką miarę powinien mieć kąt płaski przy wierzchołku naszego dachu, aby kalenica miała długość 10 m?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędziach podstawy dwa razy krótszych od krawędzi bocznych wynosi 126 cm. Jaką długość ma krawędź boczna? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 10,5 cm

☐ 14 cm

☐ 7 cm

Ćwiczenie 2



Drut o długości 378 cm podzielono w stosunku 2 : 5 i stworzono ostrosłup prawidłowy sześciokątny. Dłuższy odcinek przeznaczono na krawędzie boczne, krótszy na krawędzie podstawy. Ile wynosi długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 45 cm

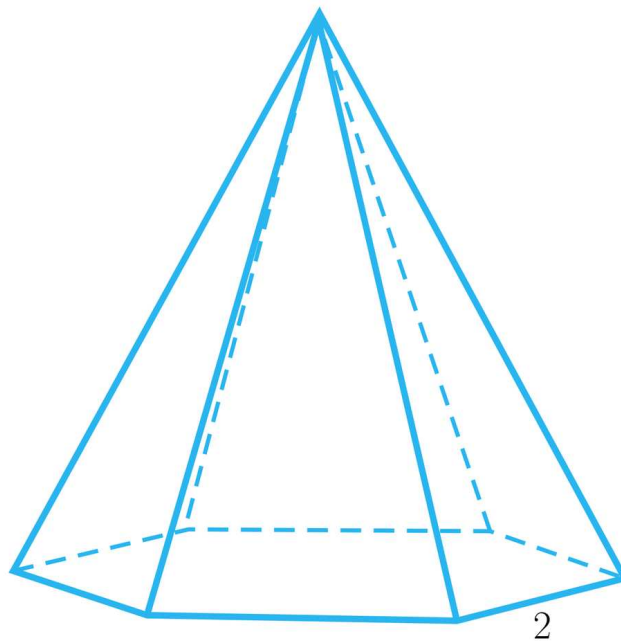
☐ 9 cm

☐ 18 cm

Ćwiczenie 3



Na poniższym rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy sześciokątny.



Uzupełnij zdania, przeciągając poprawne odpowiedzi w puste miejsca.

Różnica pomiędzy przekątnymi różnej długości w podstawie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi . Pole trójkąta, który jest ścianą boczną ostrosłupa, wynosi P . Zatem wysokość ściany bocznej ma długość . Suma długości krawędzi bocznych wynosi .

Ćwiczenie 4



Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $\frac{81\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$. Krawędź boczna jest o 2 cm dłuższa od krótszej przekątnej podstawy ostrosłupa. Połącz w pary opisy z odpowiednimi liczbami.

długość krótszej przekątnej podstawy

9

suma długości krawędzi ostrosłupa

$3\sqrt{3}$

długość krawędzi bocznej

$18\sqrt{3} + 66$

długość krawędzi podstawy

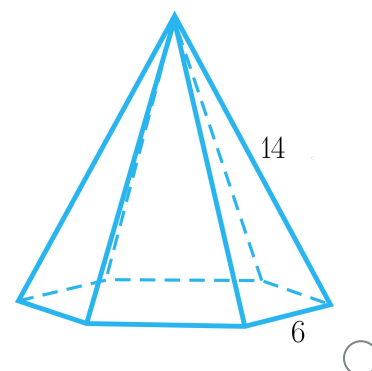
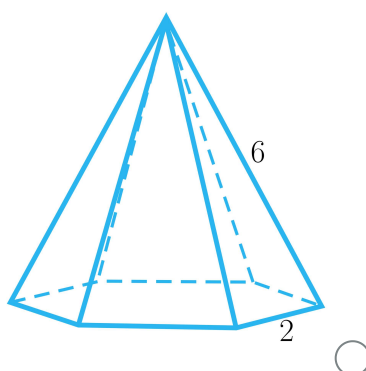
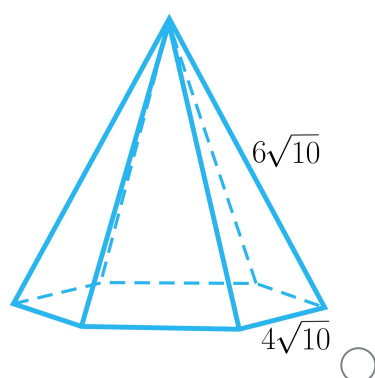
11

Ćwiczenie 5



Wybierz rysunek, który odpowiada poniższemu opisowi:

Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $\frac{1}{3}$.



Ćwiczenie 6



W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym dana jest wysokość h ściany bocznej i kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa 2α . Jaką długość ma wysokość tego ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{h}{\cos \alpha} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}$

☐ $\frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}$

☐ $\frac{h}{\cos \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

Ćwiczenie 7



Uzupełnij zdania, przeciągając w puste miejsca odpowiednie liczby.

Krótsza przekątna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $s\sqrt{3}$. Wysokość ostrosłupa jest równa krawędzi podstawy. Krawędź boczna ma więc długość .
Stosunek długości krawędzi bocznej do długości krawędzi podstawy wynosi . Sinus kąta płaskiego przy wierzchołku ostrosłupa wynosi .

Ćwiczenie 8



Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a . Kąt pomiędzy przeciwległymi krawędziami bocznymi połączonymi krótszą przekątną podstawy wynosi α . Uzasadnij, że suma krawędzi bocznych ostrosłupa wynosi $\frac{6a\sqrt{3}}{\sqrt{2(1-\cos \alpha)}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kielczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ostrosłup prawidłowy sześciokątny

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje ostrosłup prawidłowy sześciokątny,
- oblicza długość krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, pole podstawy i pole ścian bocznych,
- oblicza miarę kąta płaskiego przy wierzchołku ostrosłupa.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- analiza pomysłów.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- przykłady brył w kształcie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego,
- komputery z dostępem do Internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel pyta uczniów, gdzie spotkali się z ostrosłupami prawidłowymi sześciokątnymi, czy widzieli bryły o takim kształcie w życiu codziennym.
- Nauczyciel pokazuje przykładowe bryły. Wybrany uczeń podaje liczby wierzchołków, krawędzi i ścian ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji Przeczytaj. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
- Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Infografika”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
- Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia 1-5 z sekcji Sprawdź się a następnie porównują swoje wyniki z koleżanką/kolegą,
- Wybrani uczniowie rozwiązują ćwiczenia nr 6, 7 i 8.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie podają wymiary dachu w kształcie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym kąt płaski będzie miał miarę 54° .

Materiały pomocnicze:

[Ostrosłup i jego własności](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać infografikę np. przy omawianiu brył w kontekście realistycznym.
- Uczeń może wykorzystać infografikę jako pracę domową.