Największy wspólny dzielnik

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Największy wspólny dzielnik

Źródło: James Orr, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Największy wspólny dzielnik dwóch liczb wykorzystujemy na przykład skracając ułamki zwykłe. Ale pojęcie to jest stosowane nie tylko w odniesieniu do liczb. Używa się go również w przypadku wyrażeń algebraicznych, funkcji lub innych zbiorów obiektów matematycznych, których omawianie pomija się w trakcie nauki w szkole.

W tej lekcji stosujemy rozkład liczb na czynniki pierwsze oraz tzw. algorytm Euklidesa do wyznaczania największego wspólnego dzielnika liczb naturalnych.

Twoje cele

- Wyznaczysz największy wspólny dzielnik dwóch lub więcej liczb naturalnych.
- Wykorzystasz rozkłady na czynniki pierwsze w celu wyznaczenia największego wspólnego dzielnika liczb naturalnych.
- Rozpoznasz liczby względnie pierwsze.

Przeczytaj

Największy wspólny dzielnik przynajmniej dwóch liczb naturalnych to największa liczba naturalna, która dzieli wszystkie rozważane liczby.

Największy wspólny dzielnik liczb a i b będziemy oznaczać $NWD(a,\ b)$.

> **Przykład 1**
>
> Wyznaczymy wszystkie dzielniki liczb 12 i 30.
>
> Zbiór wszystkich dzielników liczby 12: $D_{12} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, zbiór wszystkich dzielników liczby 30: $D_{30} = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$. Widzimy, że wspólnymi dzielnikami są liczby: 1, 2, 3, 6.
>
> Największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 6, co zapiszemy $NWD(12,\ 30) = 6$.

Sposób pokazany w przykładzie 1 daleki jest od optymalnego.

Okazuje się, że wcale nie potrzebujemy wyznaczać wszystkich dzielników (których może być bardzo dużo) rozważanych liczb. Przeanalizuj dokładnie poniższe przykłady.

> **Przykład 2**
>
> Największy wspólny dzielnik liczb 6 i 15 to 3. Łatwo to zauważyć, gdy rozważane liczby rozłożymy na czynniki pierwsze: $6 = 2 \cdot 3$ oraz $15 = 5 \cdot 3$. Jedynym wspólnym dzielnikiem (poza jedynką) jest liczba 3.
>
> Zatem $NWD(6,\ 15) = 3$.
>
> Największy wspólny dzielnik najłatwiej wyznacza się znając rozkład na czynniki pierwsze rozważanych liczb.

Przykład 3

Wyznaczymy NWD dla kilku zestawów liczb.

$NWD\left(2^3 \cdot 5^2,\ 5 \cdot 3^2\right) = 5$, ponieważ 5 to jedyny czynnik pierwszy, który dzieli każdą z liczb $2^3 \cdot 5^2$ i $5 \cdot 3^2$.

$NWD\left(2^3 \cdot 5^2,\ 5 \cdot 2^2\right) = 5 \cdot 2^2$, ponieważ 5 oraz 2^2 to największe potęgi liczb pierwszych, które dzielą każdą z liczb $2^3 \cdot 5^2$ i $5 \cdot 2^2$.

$NWD\left(3^2 \cdot 2^5 \cdot 7^3, 5^3 \cdot 3^4 \cdot 7^6\right) = 3^2 \cdot 7^3 = 3087$, ponieważ 3^2 oraz 7^3 to największe potęgi liczb pierwszych występujące w rozkładach każdej z liczb $3^2 \cdot 2^5 \cdot 7^3$ i $5^3 \cdot 3^4 \cdot 7^6$.

$NWD\left(2^3 \cdot 5^2,\ 5 \cdot 2^2,\ 2^2 \cdot 3^4\right) = 2^2$, ponieważ 2^2 to największa potęga liczby pierwszej, która wystepuje w rozkładzie każdej z liczb $2^3 \cdot 5^2$, $5 \cdot 2^2$ oraz $2^2 \cdot 3^4$.

$NWD\left(2^5 \cdot 7^3,\ 5^3 \cdot 3^4\right) = 1$, ponieważ liczby $2^5 \cdot 7^3$ oraz $5^3 \cdot 3^4$ nie mają żadnych wspólnych dzielników pierwszych.

Przykład 4

Wyznaczymy największy wspólny dzielnik dla liczb 2520 oraz 6750.

Najpierw rozłożymy każdą z nich na czynniki pierwsze.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 5 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6750 & 5 \\ 1350 & 5 \\ 270 & 3 \\ 90 & 3 \\ 30 & 3 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Sprawdźmy, które liczby pierwsze powtarzają się w rozkładach każdej z danych liczb.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 5 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6750 & 5 \\ 1350 & 5 \\ 270 & 3 \\ 90 & 3 \\ 30 & 3 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

W obu rozkładach powtarzają się: liczba 5, druga potęga liczby 3 oraz liczba 2.

Oznacza to, że
$NWD(2520,\ 6750) = NWD\left(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7,\ 2 \cdot\ 3^3 \cdot 5^3\right) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90.$

Przykład 5

Wyznaczymy największy wspólny dzielnik dla liczb 3150, 2205 oraz 900.

Najpierw rozłożymy każdą z nich na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{r|l} 3150 & 2 \\ 1575 & 5 \\ 315 & 5 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2205 & 5 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Sprawdźmy, które liczby pierwsze powtarzają się w rozkładach każdej z danych liczb.

$$\begin{array}{r|l} 3150 & 2 \\ 1575 & 5 \\ 315 & 5 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2205 & 5 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

We wszystkich rozkładach powtarzają się: liczba 5 oraz druga potęga liczby 3.

Oznacza to, że
$NWD(3150,\ 2205,\ 900) = NWD\left(2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7,\ 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2\right) =$

$= 5 \cdot 3^2 = 45$

Mówimy, że dwie (lub więcej) liczby naturalne są to liczby względnie pierwsze, jeśli ich największy wspólny dzielnik jest równy 1.

Przykład 6

Liczby 10 i 15 nie są względnie pierwsze, ponieważ $NWD(10,\ 15) = 5\ >\ 1$.

Liczby 10 i 21 są względnie pierwsze, ponieważ $NWD(10,\ 21) = 1$

Liczby 6, 10 i 15 są względnie pierwsze, ponieważ $NWD(6,\ 10,\ 15) = 1$.

Liczby 6, 10 i 15 nie są parami względnie pierwsze, ponieważ można wybrać z nich parę liczb, które nie są względnie pierwsze, np. $NWD(6,\ 10) = 2$.

Liczby 26, 33 i 35 są względnie pierwsze, ponieważ $NWD(26,\ 33,\ 35) = 1$.

Liczby 26, 33 i 35 są parami względnie pierwsze, ponieważ każde dwie spośród nich są względnie pierwsze: $NWD(26,\ 33) = 1$, $NWD(33,\ 35) = 1$, $NWD(26,\ 35) = 1$.

Ważne!

Algorytm Euklidesa

Do wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb możemy wykorzystać algorytm, który opisał już Euklides żyjący na przełomie IV i III wieku przed nasza erą. Uogólnienia i modyfikacje tego algorytmu są stosowane również dziś, co sprawia, że algorytm Euklidesa jest jednym z najstarszych ciągle używanych algorytmów. Algorytm Euklidesa opiera się na prostej obserwacji: jeżeli liczba naturalna d dzieli liczby naturalne a i b, to dzieli również ich różnicę. Rzeczywiście jeśli $d = NWD(a,\ b)$, wówczas istnieją takie względnie pierwsze liczby naturalne k i l, dla których $a = d \cdot k$ oraz $b = d \cdot l$. Niech ponadto $a > b$. Wówczas $a - b = d \cdot k - d \cdot l = d \cdot (k - l)$, co oznacza, że liczba $(a - b)$ również dzieli się przez d. A to z kolei oznacza, że zarówno różnica liczb b i $(a-b)$, jak i różnica liczb a i $(a-b)$ dzielą się przez d. Powtarzanie odejmowania doprowadza w końcu do otrzymania d.

Przykład 7

Wyznaczymy największy wspólny dzielnik liczb 984 i 1435.

Ponieważ największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych dzieli również ich różnicę, więc $NWD(984,\ 1435) = d$ dzieli liczbę $1435 - 984 = 451$.

Ponieważ d dzieli liczby 984 i 451, to dzieli również ich różnicę $984 - 451 = 533$ $(*)$.

Zatem d dzieli liczby 533 i 451, czyli podzieli również ich różnicę $533 - 451 = 82$.

Teraz wiemy już, że d dzieli liczby 451 i 82, stąd d dzieli $451 - 82 = 369$ $(**)$.

Ponieważ d dzieli liczby 369 i 82, więc dzieli również $369 - 82 = 287$.

Wiadomo, że d dzieli liczby 287 i 82, zatem dzieli też $287 - 82 = 205$.

Skoro d dzieli liczby 205 i 82, to dzieli również $205 - 82 = 123$.

Ponieważ d dzieli liczby 123 i 82, więc dzieli też $123 - 82 = 41$.

Teraz można już zauważyć, że skoro d dzieli 82 i 41 i jest największym z możliwych wspólnych dzielników tych liczb, to $d = 41$.

Zwróć uwagę, że powyższe rozwiązanie można było skrócić. W miejscu oznaczonym $(*)$ zamiast od liczby 984 odejmować liczbę 451 można było odjąć jej dwukrotność, czyli $2 \cdot 451 = 902$. Jako argument pozwalający na odejmowanie z takim rozmachem wystarczy przywołać fakt, że jeśli d dzieli liczbę, to podzieli również jej wielokrotność. Zatem w miejscu $(*)$ wykonamy odejmowanie

$984 - 2 \cdot 451 = 984 - 902 = 82$. Zgodnie ze sposobem opisanym powyżej wykonalibyśmy odejmowanie liczb 451 i 82 tak jak w miejscu $(**)$, ale tu również możemy zaoszczędzić trochę czasu i zauważyć, że zamiast od 451 odejmować 82, rozwiązanie przyspieszy odjęcie wielokrotność liczby 82, konkretnie $5 \cdot 82 = 410$. Czyli d dzieli $451 - 5 \cdot 82 = 451 - 410 = 41$. Końcówka rozwiązania pozostaje bez zmian. Jeśli zauważymy, że d jest największym dzielnikiem liczb 41 i 82, to dojdziemy do wniosku, że $d = 41$.

Prześledźmy kolejne wykonane operacje:

Pierwszy etap działania	**Drugi etap działania**	**Komentarz**
$1435 - 984 = 451$	$1435 = 984 + 451$	Iloraz całkowity z dzielenia 1435 przez 984 to 1 zaś reszta to 451.
$984 - 2 \cdot 451 = 82$	$984 = 2 \cdot 451 + 82$	Iloraz całkowity z dzielenia 984 przez 451 to 2 zaś reszta to 82.
$451 - 5 \cdot 82 = 41$	$451 = 5 \cdot 82 + 41$	Iloraz całkowity z dzielenia 451 przez 82 to 5 zaś reszta to 41.
$82 - 2 \cdot 41 = 0$	$82 = 2 \cdot 41 + 0$	Iloraz całkowity z dzielenia 82 przez 41 to 2 zaś reszta to 0.
Ostatnia niezerowa reszta w tym ciągu dzieleń to szukany największy wspólny dzielnik liczb 1435 i 984, zatem $NWD(1435,\ 984) = 41$.		

Przykład 8

Wyznaczymy największy wspólny dzielnik liczb 830 i 1225.

Pierwszy etap działania	**Objaśnienia do części pierwszej obliczeń**	**Drugi etap działania**	**Objaśnie do częś drugie oblicze**

Pierwszy etap działania	Objaśnienia do części pierwszej obliczeń	Drugi etap działania	Objaśnie do częś drugie oblicze
$1225 - 1 \cdot 830 = 395$	Od 1125 odejmujemy 830 – różnica to 395	$1225 = 1 \cdot 830 + 395$	Iloraz całkowit z dzielen 1225 prz 830 to 1, zaś reszt to 395
$830 - 2 \cdot 395 = 40$	Od 830 odejmujemy dwukrotność $(*)$ 395 – różnica to 40	$830 = 2 \cdot 395 + 40$	Iloraz całkowit z dzielen 830 prze 395 to 2, zaś reszt to 40
$395 - 9 \cdot 40 = 35$	Od 395 odejmujemy dziewięciokrotność $(**)$ 40 – różnica to 35	$395 = 9 \cdot 40 + 35$	Iloraz całkowit z dzielen 395 prze 40 to 9, z reszta to
$40 - 1 \cdot 35 = 5$	Od 40 odejmujemy 35 – różnica to 5	$40 = 1 \cdot 35 + 5$	Iloraz całkowit z dzielen 40 przez to 1, zaś reszta to

Pierwszy etap działania	Objaśnienia do części pierwszej obliczeń	Drugi etap działania	Objaśnie do częś drugie oblicze
$35 - 7 \cdot 5 = 0$	Od 35 odejmujemy siedmiokrotność $(* * *)$ 5 – różnica to 0	$35 = 7 \cdot 5 + 0$	Iloraz całkowit z dzielen 35 przez to 7, zaś reszta to
Ostatnia niezerowa reszta w tym ciągu dzieleń to szukany największy wspólny dzielnik liczb 1225 i 830, zatem $NWD(1225,\ 830) = 5$.			

$(*)$ równoważnie można wykonać dwa odejmowania liczby 395

$(**)$ równoważnie można wykonać dziewięć odejmowań liczby 40

$(* * *)$ równoważnie można wykonać siedem odejmowań liczby 5

Przykład 9

Wyznaczymy największy wspólny dzielnik liczb 965 i 1230.

Komentarz	Obliczenia
Iloraz całkowity z dzielenia liczby 1230 przez 965 to 1, zaś reszta to 265.	$1230 = 1 \cdot 965 + 265$
Iloraz całkowity z dzielenia liczby 965 przez 265 to 3, zaś reszta to 170.	$965 = 3 \cdot 265 + 170$
Iloraz całkowity z dzielenia liczby 265 przez 170 to 1, zaś reszta to 95.	$265 = 1 \cdot 170 + 95$
Iloraz całkowity z dzielenia liczby 170 przez 95 to 1, zaś reszta to 75.	$170 = 1 \cdot 95 + 75$

Komentarz	Obliczenia
Iloraz całkowity z dzielenia liczby 95 przez 75 to 1, zaś reszta to 20.	$95 = 1 \cdot 75 + 20$
Iloraz całkowity z dzielenia liczby 75 przez 20 to 3, zaś reszta to 15.	$75 = 3 \cdot 20 + 15$
Iloraz całkowity z dzielenia liczby 20 przez 15 to 1, zaś reszta to 5.	$20 = 1 \cdot 15 + 5$
Iloraz całkowity z dzielenia liczby 15 przez 5 to 3, zaś reszta to 0.	$15 = 3 \cdot 5 + 0$
Ostatnia niezerowa reszta w tym ciągu dzieleń to szukany największy wspólny dzielnik liczb 1230 i 965, zatem $NWD(1230,\ 965) = 5$.	

Słownik

algorytm

skończony ciąg jasno zdefiniowanych operacji (czynności), które mają doprowadzić do rozwiązania konkretnego problemu, osiągnięcia wyznaczonego celu; cechą charakterystyczną jest jego powtarzalność i niezawodność w pewnych z góry zdefiniowanych warunkach; przy pewnych założeniach prowadzi niezawodnie (choć niekoniecznie optymalnie) od stanu A do stanu B

największy wspólny dzielnik

największy wspólny dzielnik liczb naturalnych a i b to największa liczba naturalna dzieląca liczby a i b; oznaczamy go przez $NWD(a,\ b)$; pojęcie można analogicznie zdefiniować dla dowolnie wielu liczb naturalnych

liczby względnie pierwsze

mówimy, że liczby naturalne a i b są względnie pierwsze, gdy ich największy wspólny dzielnik jest równy 1; pojęcie można analogicznie zdefiniować dla dowolnie wielu liczb naturalnych

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie algorytmu Euklidesa na kilku przykładach par liczb naturalnych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DK8zCHIPB

Polecenie 2

Stosując algorytm Euklidesa, wyznacz największy wspólny dzielnik liczb:

a) 1234 i 532

b) 954 i 630

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Wyznacz największy wspólny dzielnik liczb, stosując rozkład na czynniki pierwsze.

a) 8820 i 5082

b) 1386, 4004 i 2926

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Funkcją φ Eulera nazywamy przyporządkowanie liczbie naturalnej dodatniej n liczby liczb względnie pierwszych z n i niewiększych od n. Na przykład liczby względnie pierwsze z liczbą 8 i nie większe od niej to: 1, 3, 5, 7. Jest ich cztery, co oznacza, że dla liczby 8 funkcja φ Eulera przyjmuje wartość 4, co zapisujemy $\varphi(8) = 4$.

Zastanów się, ile jest równa wartości funkcji φ dla liczby pierwszej.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Największy wspólny dzielnik

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza największy wspólny dzielnik dwu lub więcej liczb naturalnych,
- wykorzystuje rozkłady na czynniki pierwsze w celu wyznaczenia największego wspólnego dzielnika liczb naturalnych,
- rozpoznaje liczby względnie pierwsze.

Strategie nauczania:

- strategia asocjacyjna;
- strategia problemowa.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- opis ustny.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna

- Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Symulacja interaktywna” - „Przeanalizuj działanie algorytmu Euklidesa na kilku przykładach par liczb naturalnych.” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Największy wspólny dzielnik” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

- Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji (*„Największy wspólny dzielnik”*).

Materiały pomocnicze:

- **Wielokrotności i dzielniki liczb naturalnych**

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Symulacja interaktywna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Największy wspólny dzielnik”.