



Rozwiązywanie równań z funkcją sinus

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie równań z funkcją sinus

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Na poprzedniej lekcji dowiedziałeś się, jak rozwiązywać proste równania typu $\sin x = a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. Na tej lekcji dowiesz się, jak sprowadzić bardziej skomplikowane równania do postaci $\sin x = a$. W tym celu wykorzystamy poznane przez Ciebie tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Twoje cele

- Nauczysz się sprowadzać równania do postaci $\sin x = a$.
- Dowiesz się, jak wykorzystać podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania równań.

Przeczytaj

Nauczyliśmy się rozwiązywać równania postaci $\sin x = a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. W tej lekcji każde równanie, o ile to tylko możliwe, będziemy starali się sprowadzić do równania postaci $\sin x = a$.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $\frac{\sin x}{\sin x + 1} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Zauważmy, że musimy założyć, że $\sin x \neq -1$.

Warunek ten zachodzi, gdy $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Szukamy rozwiązań równania: $\sin x = 0$.

Są nimi następujące liczby: $x = \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem po uwzględnieniu założeń, otrzymujemy odpowiedź:

$x = \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie: $2 \sin x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Zauważmy, że możemy wykorzystać tożsamość trygonometryczną $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ do zmiany postaci równania:

$$2 \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2 = 0,$$

$$2 \sin x + 1 - 2 = 0,$$

$$2 \sin x - 1 = 0.$$

Powstaje równanie, które umiemy już rozwiązać:

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązaniami są: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Każde równanie, o ile to możliwe, staramy się sprowadzić do równania z jedną tylko funkcją trygonometryczną.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie: $4 \sin^3 x = \sin x$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Przenieśmy wszystkie wyrażenia na jedną stronę:

$$4 \sin^3 x - \sin x = 0$$

i zapiszmy wyrażenie po lewej stronie w postaci iloczynowej:

$$\sin x (4 \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x (2 \sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0.$$

Iloczyn wyrażen jest równy 0 wtedy, gdy jedno z wyrażen przyjmuje wartość 0:

$$\sin x = 0 \text{ lub } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązaniami są:

$$x = \pi k \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Powyższe rozwiązania można zapisać w skróconej wersji $x = \pi k$ lub $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Każde równanie, o ile to możliwe, próbujemy sprowadzić do postaci iloczynowej.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie: $4 \sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1) \sin x - \sqrt{3} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Zauważmy, że możemy podstawić $t = \sin x$. Wówczas równanie przyjmuje postać równania kwadratowego:

$$4t^2 + 2(\sqrt{3} - 1)t - \sqrt{3} = 0.$$

Stosujemy zatem metodę rozwiązywania równań kwadratowych:

$$\Delta = 4(\sqrt{3} - 1)^2 + 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3} = 4(\sqrt{3} + 1)^2$$

i obliczamy pierwiastki równania kwadratowego:

$$t = \frac{-2(\sqrt{3}-1)+2(\sqrt{3}+1)}{8} = \frac{1}{2}$$

lub

$$t = \frac{-2(\sqrt{3}-1)-2(\sqrt{3}+1)}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rozwiążemy ostatecznie równanie ze zmienną x :

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rozwiązaniami są:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 5

Rozwiążemy równanie: $2(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1.$$

Wykorzystujemy jedynkę trygonometryczną:

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1.$$

Sprawdzamy równanie do wartości jednej funkcji trygonometrycznej; w tym przypadku jest to funkcja $\sin x$:

$$2(1 - 2\sin^2 x) = 1$$

$$2\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

Otrzymujemy:

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Cztery zbiory rozwiązań możemy łatwo zapisać jako dwa zbiory: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

W tym równaniu pojawia się pewna trudność: występuje $\cos x$, w miejsce którego trudno wprowadzić wyrażenie $\sin x$.

Zbudujemy wobec tego układ równań:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

Obliczając $\cos x$ z pierwszego równania i podstawiając do drugiego otrzymujemy:

$$\sin^2 x + \left(\sqrt{2} - \sin x\right)^2 = 1,$$

a stąd dostajemy:

$$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0.$$

Możemy podstawić $t = \sin x$. Wówczas równania przyjmuje postać równania kwadratowego:

$$2t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0.$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\Delta = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$$

Zatem jedynym rozwiązaniem równania kwadratowego jest $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Otrzymujemy stąd: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Jednak to nie jest ostateczne rozwiązanie. Zwracamy uwagę na to, że $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, a zatem także musi zachodzić równanie $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązując równanie $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ otrzymujemy odpowiedź:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Podsumowanie

Zwróćmy uwagę na kilka charakterystycznych elementów rozwiązywania równań:

1. Sprawdzamy dziedzinę równania. Najczęściej wypisujemy założenia związane z dzieleniem i pierwiastkowaniem: mianownik ułamka musi być różny od 0

- i wyrażenie pod pierwiastkiem stopnia parzystego musi być nieujemne.
2. Sprowadzamy równanie do wartości jednej funkcji trygonometrycznej. W tej lekcji sprowadzaliśmy wszystkie równania do równań z funkcją $\sin x$.
 3. Często stosujemy podstawienie $t = \sin x$.

Słownik

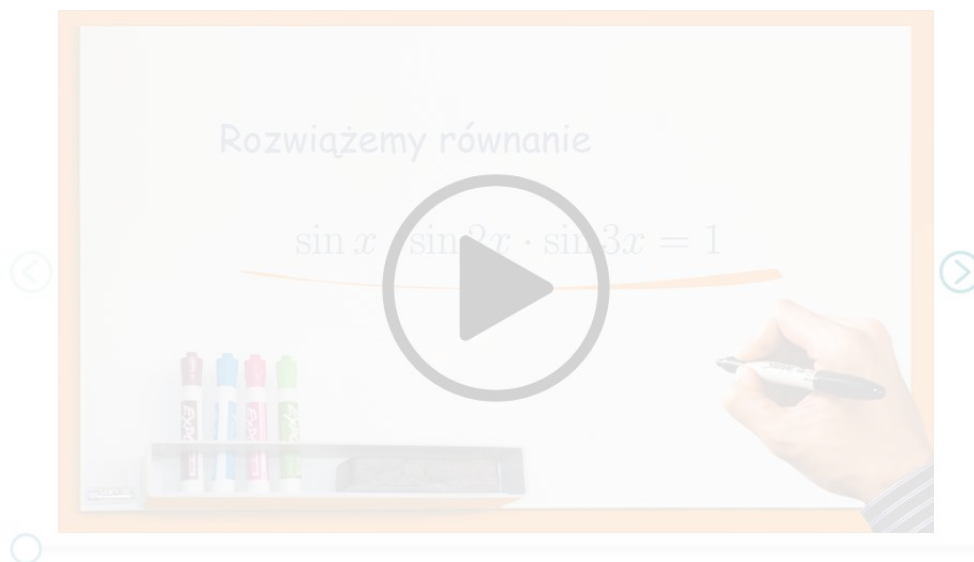
postać iloczynowa równania

to taka postać równania, gdy po jednej stronie równania występuje 0, a po drugiej iloczyn kilku czynników; dzięki takiej postaci równanie jest równoważne alternatywie kilku równań

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Uważnie zapoznaj się z prezentacją, a następnie wykonaj polecenia.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1CTgpezE>

Polecenie 2

Rozwiązaniem równania $\sin x \cdot \sin 3x = -1$ jest:

☐ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Polecenie 3

Rozwiąż równanie: $\sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \sin 8x = 1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż wszystkie rozwiązania równania: $\frac{4 \sin^2 x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1} = 0$.

☐ $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 2



Wskaż wszystkie rozwiązania równania: $4 \sin^3 2x = \sin 2x$.

☐ $x = \frac{\pi}{2}k$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{2}k$ lub $x = \frac{3\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{9\pi}{12} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{2}k$ lub $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$ lub $x = (-1)^k (-\frac{\pi}{12}) + \frac{\pi}{2}k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{2}k$ lub $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{13\pi}{12} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary równanie i jego zbiór rozwiązań.

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$$

$$x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x + \sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } x = \pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ćwiczenie 4



Rozwiązaniami równania są: $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$3 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$4 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 6 = 0$$

Ćwiczenie 5



Znajdź najmniejsze rozwiązanie każdego z równań w zbiorze $(0, 2\pi)$. Uporządkuj odpowiadające tym rozwiązaniom równania wg rosnącej kolejności znalezionych rozwiązań.

$$2 \sin^3 x - \sin x = 0$$



$$\sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0$$



$$\sin 3x = \sin 2x$$



$$\frac{4 \sin^2 x - 1}{2 \sin x - 1} = 0$$



Ćwiczenie 6



Wskaż równania, które nie mają rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych:

☐ $3 \sin x \cos x + 10 = 6 \cos x + 5 \sin x$

☐ $\sin^4 x + \frac{3}{2} = 0$

☐ $\sin^2 x - 7 \sin x + 13 = 0$

☐ $(\sin x - 3)(2 \sin x - \sqrt{7})(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0$

Ćwiczenie 7



Ile rozwiązań w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ ma równanie: $2 \sin 3x \sin 4x - 2 \sin 3x - \sin 4x + 1 = 0$?

Ćwiczenie 8



Podaj sumę wszystkich rozwiązań równania

$4 \sin 4x \sin 5x - 2\sqrt{3} \sin 4x - 2 \sin 5x + \sqrt{3} = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań z funkcją sinus

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza równania do postaci $\sin x = a$,
- wykorzystuje podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania równań,
- analizuje postać iloczynową równania trygonometrycznego, rozpatruje przypadki rozwiązań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- ekspozycja;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Uczniowie przypominają sobie jak rozwiązuje się proste równania typu $\sin x = a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą oraz tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Nauczyciel prosi wskazaną (lub wybraną) osobę o odczytanie tematu lekcji: Rozwiązywanie równań z funkcją sinus. Następnie zadaje uczniom pytanie: „Co wiesz na ten temat?” Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji. Na końcu ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Prezentacja multimedialna” – „Rozwiązaniem równania $\sin x \cdot \sin 3x = -1$ jest:” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Rozwiązywanie równań z funkcją sinus”).
- [Tożsamości trygonometryczne](#)
 - [Przykłady tożsamości trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Rozwiązywanie równań z funkcją sinus”.