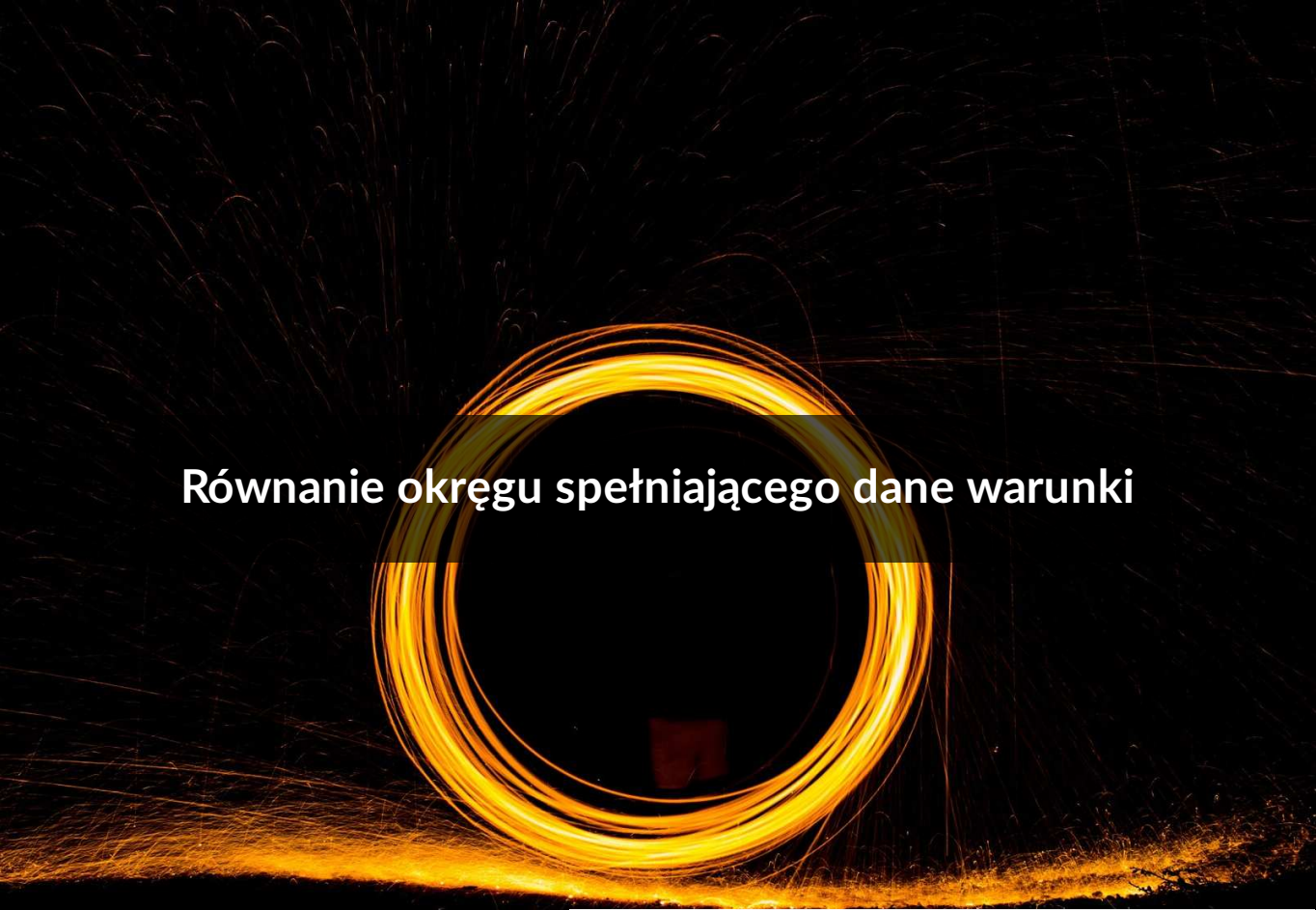




Równanie okręgu spełniającego dane warunki

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie okręgu spełniającego dane warunki

Źródło: Jeremy Perkins, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Złożone problemy geometryczne zostają w geometrii analitycznej sprowadzone do rozwiązania układów równań opisujących badane figury. Pierwsze takie powiązania, między współrzędnymi punktów w układzie współrzędnych, a krzywymi na płaszczyźnie, pochodzące z XVII wieku, zawdzięczamy Fermatowi, Pascalowi i Kartezjuszowi. W tej lekcji, rozwiązując układy równań, wyznaczymy równania stycznych do okręgu, a także zajmiemy się wyznaczeniem równania okręgu, do którego należą dane punkty.

Twoje cele

- Dowiesz się jak wyznaczyć równania stycznych do okręgu, wykorzystując układ równań.
- Wyznaczysz środek okręgu i jego promień.
- Zastosujesz poznane wzory do wyznaczenia współrzędnych środka okręgu i jego promienia.

Przeczytaj

Wiemy, że okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r .

Równanie

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

przedstawia okrąg o środku (a, b) i promieniu r .

W poniższych przykładach pokażemy, jak wyznaczyć współrzędne środka okręgu i jego promień r , tak aby równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ było spełnione dla każdego z narzuconych warunków.

Przykład 1

Zapiszemy równanie okręgu o środku w punkcie $(1, 3)$ i przechodzącego przez punkt $A = (4, 6)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ środek okręgu znajduje się w punkcie $(1, 3)$, to korzystając z równania $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, możemy zapisać:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2.$$

Punkt $A = (4, 6)$ należy do okręgu opisanego równaniem $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$, czyli jego współrzędne spełniają równanie tego okręgu.

Wyznaczamy promień okręgu.

$$(4 - 1)^2 + (6 - 3)^2 = r^2$$

$$r^2 = 3^2 + 3^2$$

$$r^2 = 9 + 9$$

$$r^2 = 18$$

Równanie okręgu ma zatem postać: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 18$.

Przykład 2

Napiszemy równanie okręgu o promieniu $r = \sqrt{20}$ i przechodzącego przez punkty $A = (-3, 1)$ i $B = (5, 1)$.

Rozwiązanie:

Promień okręgu wynosi $r = \sqrt{20}$, więc korzystając z równania $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, otrzymujemy

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 20.$$

Jeżeli punkty $A = (-3, 1)$ i $B = (5, 1)$ należą do okręgu o równaniu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 20$, to ich współrzędne spełniają równanie tego okręgu.

$$\begin{cases} (-3 - a)^2 + (1 - b)^2 = 20 \\ (5 - a)^2 + (1 - b)^2 = 20 \end{cases}$$

Z porównania lewych stron tych równań otrzymujemy

$$(-3 - a)^2 + (1 - b)^2 = (5 - a)^2 + (1 - b)^2,$$

co po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia prowadzi do równania

$$9 + 6a + a^2 - (25 - 10a + a^2) = 0.$$

Kontynuując przekształcenia otrzymujemy kolejno

$$9 + 6a + a^2 - 25 + 10a - a^2 = 0,$$

$$16a - 16 = 0,$$

stąd

$$a = 1.$$

Aby wyznaczyć b , podstawiamy $a = 1$ do równania $(5 - a)^2 + (1 - b)^2 = 20$.

$$(5 - 1)^2 + (1 - b)^2 = 20$$

$$4^2 + 1 - 2b + b^2 = 20$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe.

$$b^2 - 2b - 3 = 0$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego wynosi

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0,$$

więc równanie ma dwa rozwiązania:

$$b_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ oraz } b_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Istnieją dwa okręgi o promieniu $r = \sqrt{20}$, przechodzące przez punkty $A = (-3, 1)$ i $B = (5, 1)$. Ich równania są następujące:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20 \text{ oraz } (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 20.$$

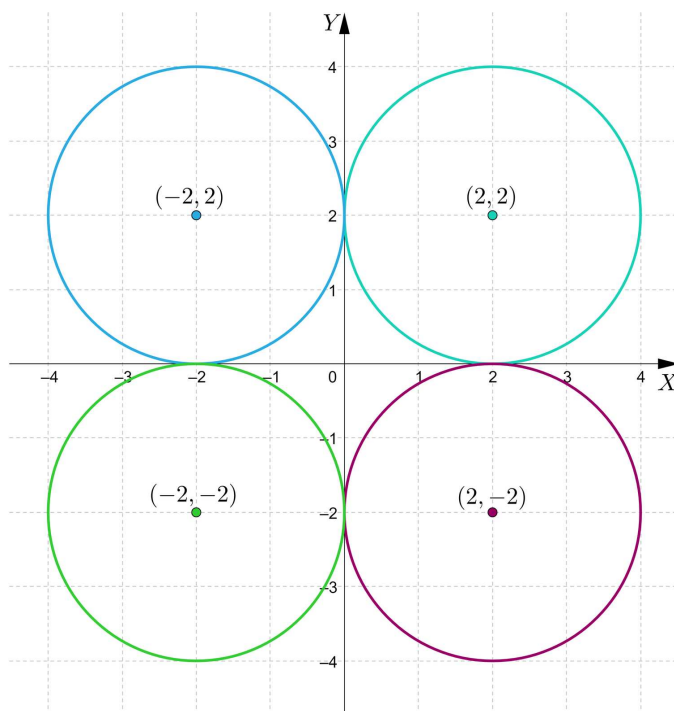
Przykład 3

Napišemy równanie okręgu o promieniu $r = 2$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Jeżeli okrąg o promieniu $r = 2$ jest styczny do obu osi układu współrzędnych, oznacza to, że odległość jego środka od każdej osi wynosi 2. Istnieją cztery takie okręgi, a ich środki położone są w punktach:

$$(2, 2), (-2, 2), (-2, -2) \text{ i } (2, -2).$$



Równania okręgów spełniających warunki zadania są postaci:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4,$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Przykład 4

Wyznamy równanie okręgu, do którego należą punkty wspólne wykresów funkcji $y = x^2 - 5x + 6$ i $y = x + 1$, wiedząc, że jego środek należy do prostej $y = -\frac{7}{3}x + 3$.

Rozwiązanie:

Aby znaleźć punkty wspólne krzywych $y = x^2 - 5x + 6$ i $y = x + 1$, rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Po przyrównaniu stronami, otrzymujemy

$$x^2 - 5x + 6 = x + 1$$

i ostatecznie równanie kwadratowe postaci

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego wynosi

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0,$$

więc równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6+4}{2} = 5 \text{ oraz } x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6-4}{2} = 1.$$

Ponieważ $y = x + 1$, to dla $x_1 = 5$ mamy $y_1 = 6$, a dla $x_2 = 1$ mamy $y_2 = 2$.

Otrzymaliśmy punkty wspólne krzywych: $A = (5, 6)$ i $B = (1, 2)$.

Punkty te należą do okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, czyli spełniają warunek: $|OA| = |OB|$.

Środek okręgu O należy do prostej $y = -\frac{7}{3}x + 3$, zatem

$$O = (a, b) = (a, -\frac{7}{3}a + 3).$$

Wyznamy teraz współrzędne środka okręgu $O = (a, b)$, wykorzystując warunek $|OA| = |OB|$.

Odległość punktów $A = (x_1, y_1)$, oraz $B = (x_2, y_2)$ wyraża się wzorem

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \text{ zapisujemy:}$$

$$|OA| = \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2}$$

$$|OA| = \sqrt{(5 - a)^2 + [6 - (-\frac{7}{3}a + 3)]^2}$$

$$|OA| = \sqrt{(5-a)^2 + \left(3 + \frac{7}{3}a\right)^2}$$

oraz

$$|OB| = \sqrt{(x_B - x_S)^2 + (y_B - y_S)^2}$$

$$|OB| = \sqrt{(1-a)^2 + \left[2 - \left(-\frac{7}{3}a + 3\right)\right]^2}$$

$$|OB| = \sqrt{(1-a)^2 + \left(\frac{7}{3}a - 1\right)^2}.$$

Z warunku $|OA| = |OB|$, otrzymujemy

$$\sqrt{(5-a)^2 + \left(3 + \frac{7}{3}a\right)^2} = \sqrt{(1-a)^2 + \left(\frac{7}{3}a - 1\right)^2}.$$

Po podniesieniu obu stron równości do kwadratu, równanie przyjmuje postać

$$(5-a)^2 + \left(3 + \frac{7}{3}a\right)^2 = (1-a)^2 + \left(\frac{7}{3}a - 1\right)^2.$$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, doprowadzamy równość do postaci

$$25 - 10a + a^2 + 9 + 14a + \frac{49}{9}a^2 = 1 - 2a + a^2 + 1 - \frac{14}{3}a + \frac{49}{9}a^2.$$

Po redukcji wyrażień podobnych, otrzymujemy

$$\frac{32}{3}a = -32.$$

Stąd $a = -3$, a ponieważ $b = -\frac{7}{3}a + 3$, to

$$b = -\frac{7}{3} \cdot (-3) + 3 = 10.$$

Środek okręgu leży w punkcie $O = (-3, 10)$.

Otrzymaliśmy równanie okręgu postaci

$$(x+3)^2 + (y-10)^2 = r^2,$$

a ponieważ $r = |OA|$, to

$$r = |OA| = \sqrt{(5+3)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}.$$

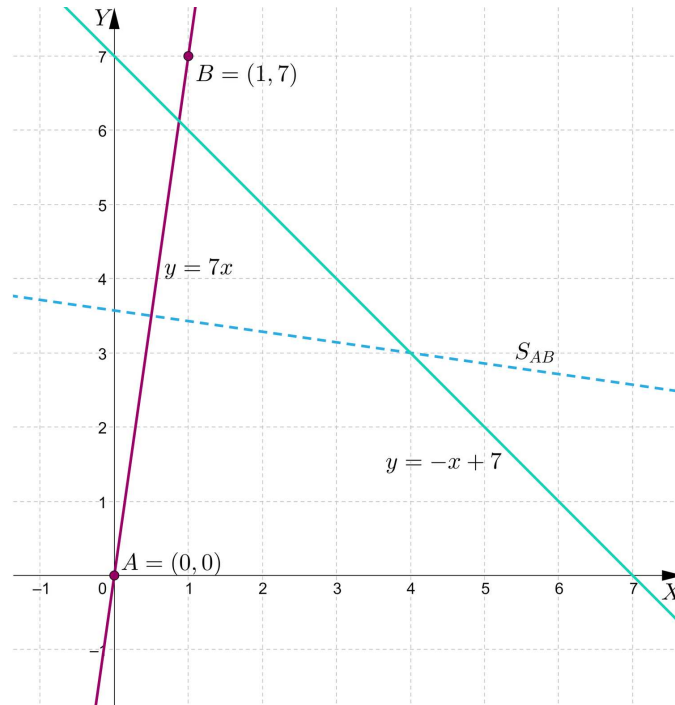
Równanie okręgu jest postaci $(x+3)^2 + (y-10)^2 = 80$.

Przykład 5

Napisz równanie okręgu zawierającego punkty $A = (0, 0)$ i $B = (1, 7)$, którego środek leży na prostej $y = -x + 7$.

Rozwiązanie:

Okrąg zawiera dwa punkty A i B , więc jego środek leży na symetralnej odcinka AB . Ponieważ leży on również na prostej $y = -x + 7$, więc środek okręgu leży w punkcie przecięcia obu tych prostych. Obrazuje to poniższy rysunek.



Rozpocznijmy od napisania równania symetralnej S_{AB} odcinka AB .

Symetralna przechodzi przez środek odcinka AB i jest do niego prostopadła.

Wyznaczamy współrzędne środka odcinka AB . Ponieważ $A = (0, 0)$ i $B = (1, 7)$, to $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ i $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+7}{2} = \frac{7}{2}$.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ obliczymy, podstawiając współrzędne punktów A i B do równania prostej $y = ax + b$.

$$\begin{cases} y_A = a_{AB} \cdot x_A + b \\ y_B = a_{AB} \cdot x_B + b \end{cases}$$

Odejmując od dolnego równania, równanie górne

$$y_B - y_A = a_{AB} \cdot x_B + b - a_{AB} \cdot x_A + b,$$

otrzymujemy

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB z powyższego wzoru

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-0}{1-0} = 7.$$

Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy 7, więc z warunku prostopadłości prostych

$$a_{S_{AB}} = -\frac{1}{a_{AB}}$$

współczynnik kierunkowy prostej do niej prostopadłej jest równy $-\frac{1}{7}$.

Otrzymujemy $S_{AB} : y = -\frac{1}{7}x + b$.

Ponieważ prosta przechodzi przez punkt $(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$, to możemy obliczyć wyraz wolny b .

$$\frac{7}{2} = -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} + b$$

$$b = \frac{7}{2} + \frac{1}{14}$$

$$b = \frac{49}{14} + \frac{1}{14}$$

$$b = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

Równanie symetralnej odcinka AB ma postać

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{25}{7}.$$

Punkt wspólny prostych $y = -\frac{1}{7}x + \frac{25}{7}$ i $y = -x + 7$ jest środkiem okręgu.

Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \end{cases}$$

$$-x + 7 = -\frac{1}{7}x + \frac{25}{7}$$

Mnożymy strony równania przez 7 i wyznaczamy wartość x .

$$-7x + 49 = -x + 25$$

$$-6x = -24 \quad | : (-6)$$

$$x = 4$$

Ponieważ $y = -x + 7$, to podstawiając obliczony $x_S = 4$, $y_S = -4 + 7 = 3$

Zatem środek okręgu ma współrzędne $(4, 3)$. Promień okręgu jest odległością środka okręgu od punktu leżącego na okręgu.

$$r = |OA| = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$$

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Szukane równanie okręgu jest postaci $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$.

Zauważ, że można to zadanie rozwiązać metodą zaproponowaną w Przykładzie 4. Jeszcze inny sposób rozwiązania poznasz w Filmie samouczku.

Słownik

okrąg

okrąg o środku O i promieniu r to zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r

symetralna odcinka

zbiór wszystkich punktów płaszczyzny równoodległych od końców tego odcinka

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą równanie okręgu, spełniającego dane warunki, a następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DWGj0cTju>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego równania okręgu spełniającego dane warunki.

Polecenie 2

Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $(-2, 2)$ i przechodzącego przez punkt $A = (1, 1)$.

Polecenie 3

Znajdź równanie okręgu mającego środek na prostej $y = \frac{2}{3}x - 4$, zawierającego punkty $(6, 2)$ i $(8, 2)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Punkt $P = (-3, 2)$ należy do okręgu o środku w punkcie $O = (0, -2)$. Które z poniższych równań opisuje ten okrąg? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $x^2 + (y - 2)^2 = 25$

☐ $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

☐ $x^2 + (y + 2)^2 = 5$

☐ $(y + 2)^2 + x^2 = 25$

Ćwiczenie 2



Do okręgu o środku w punkcie S należy początek układu współrzędnych. Połącz w pary współrzędne środka okręgu z odpowiednim równaniem okręgu.

$S_2 = (5, -12)$

$(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 169$

$S_1 = (-5, 12)$

$(x - 5)^2 + (y + 12)^2 = 169$

$S_4 = (5, 12)$

$(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$

$S_3 = (-5, -12)$

$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$

Ćwiczenie 3



Wybierz równania okręgów o promieniu $r = 15$ stycznych do obu osi układu współrzędnych. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

☐ $(x + 15)^2 + (y - 15)^2 = 225$

☐ $(x - 15)^2 + (y - 15)^2 = 225$

☐ $(x + 15)^2 + (y + 15)^2 = 15$

☐ $(x - 15)^2 + (y + 15)^2 = 15$

Ćwiczenie 4



Średnicą pewnego okręgu jest odcinek AB o końcach $A = (-2, 1)$ i $B = (4, -7)$. Przeciągnij w puste pola odpowiednie liczby.

1. Środkiem tego okręgu jest punkt $S = (\text{puste pole}, \text{puste pole})$.

2. Promień tego okręgu ma długość $r = \text{puste pole}$.

3. Okrąg ten można opisać równaniem $(x \text{ puste pole})^2 + (y \text{ puste pole})^2 = \text{puste pole}$.

-5

+3

-1

+1

+25

+36

+5

-3

Ćwiczenie 5



Dany jest okrąg o promieniu $r = \sqrt{26}$, który przechodzi przez punkty $A = (-3, -7)$ i $B = (-3, 3)$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Okrąg ten można opisać równaniem $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 26$.

☐ Środkiem tego okręgu może być punkt $S = (-2, -2)$.

☐ Okrąg ten można opisać równaniem $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 26$.

☐ Środkiem tego okręgu może być punkt $S = (-4, -2)$.

Ćwiczenie 6



Punkty $A = (-1, -4)$ i $B = (-1, 2)$ leżą na pewnym okręgu. Środek tego okręgu leży na prostej $y = -\frac{2}{5}x + 1$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Okrąg ten można opisać równaniem $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 45$.

☐ Środkiem tego okręgu jest punkt $S = (5, -1)$.

☐ Promień tego okręgu ma długość $r = 45$.

Ćwiczenie 7



Dany jest okrąg opisany równaniem $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Na okręgu tym leżą punkty $A = (-6, -11)$ i $B = (12, 1)$. Środek tego okręgu leży na prostej o równaniu $y = -x$. Oceń, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie stwierdzenia prawdziwe.

☐ Okrąg ten można opisać równaniem $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 169$.

☐ $a = 1$

☐ $b = 1$

☐ Promień tego okręgu ma długość $r = 13$.

Ćwiczenie 8



Dany jest okrąg, który przechodzi przez punkty wspólne wykresów dwóch funkcji: $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 5$ oraz $y = -3x$. Środek tego okręgu leży na prostej o równaniu $y = 2x + 5$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz zdanie prawdziwe.

☐ Okrąg ten można opisać równaniem $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 2\sqrt{5}$.

☐ Okrąg ten można opisać równaniem $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 20$.

☐ Okrąg ten można opisać równaniem $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

☐ Okrąg ten można opisać równaniem $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie okręgu spełniającego dane warunki

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy.

VIII. Planimetria. Uczeń:

1. wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

1. rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
2. posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty), znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu;
3. oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
4. posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- znajduje współrzędne środka okręgu i jego promień;
- oblicza odległość między punktami o danych współrzędnych;
- rysuje prostą i okrąg o danym równaniu;
- wyznacza równanie prostej spełniającej dane warunki;
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia środka okręgu i jego promienia;
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej;
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji i ćwiczeń interaktywnych;
- pokaz multimedialny;
- burza mózgów;
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- projektor multimedialny;
- e-podręcznik;
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- uczniowie przypominają równanie okręgu;
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- nauczyciel prosi uczniów, aby w parach zapoznali się z przykładami w sekcji Przeczytaj;
- na forum całej klasy omawiają metody rozwiązania przykładu 4 i 5;
- nauczyciel prezentuje animację;
- uczniowie określają, która metoda rozwiązania jest dla nich najprostsza;
- uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela;
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udziela im wskazówek, wyjaśnia wątpliwości.

Faza podsumowująca:

- chętni uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych;
- uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień;
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Okrąg i koło](#);
- [Okrąg](#);
- [Środek odcinka](#).

Wskazówki metodyczne:

uczniowie mogą przeanalizować treść animacji jako pracę własną przed lekcją. Nauczyciel może zaproponować rozwiązanie zadania z animacji innymi metodami.