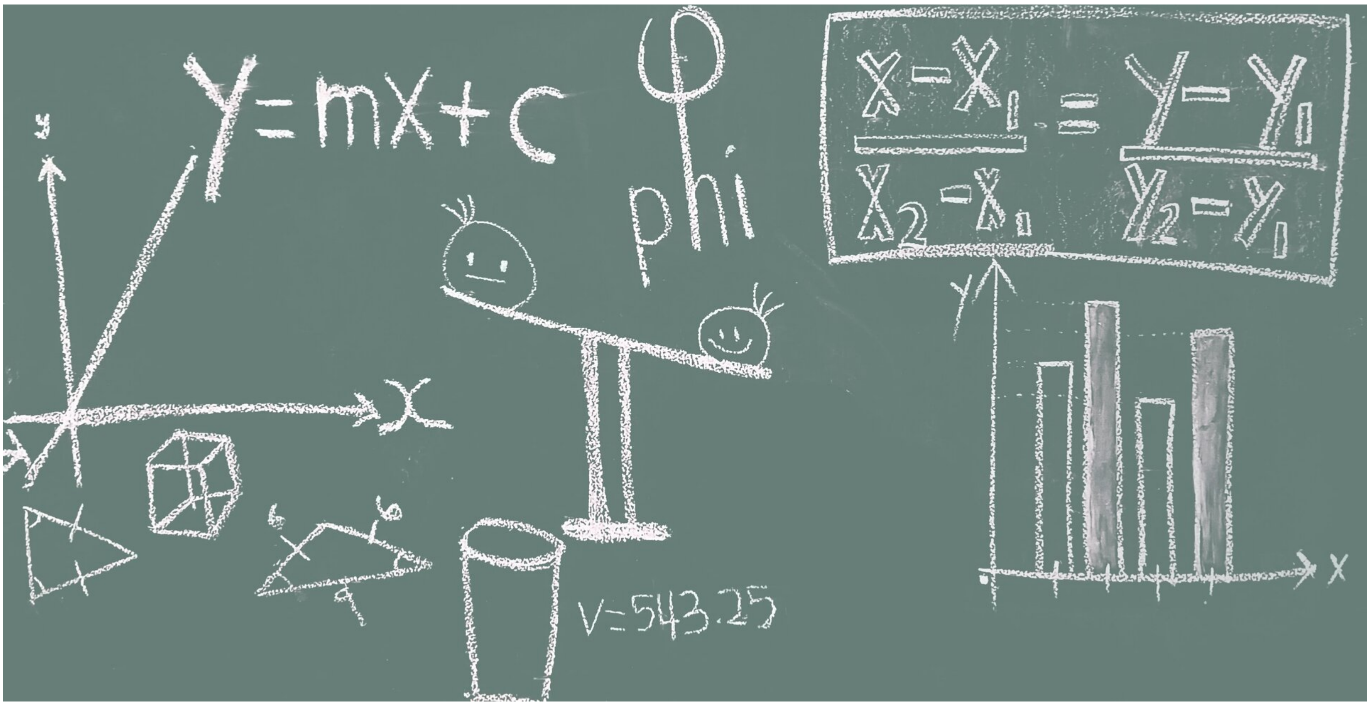

Wzory skróconego mnożenia na różnicę oraz na sumę sześcianów – zastosowania

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Wzory skróconego mnożenia na różnicę oraz na sumę sześcianów – zastosowania

Źródło: Crissy Jarvis, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Portret Kartezjusza autorstwa Fransa Halsa (1648)

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Na pewno znasz słynne twierdzenie cogito ergo sum (myślę, więc jestem) wybitnego siedemnastowiecznego francuskiego filozofa Rene Descartesa, zwanego Kartezjuszem.

Ale czy wiesz, że to Kartezjusz wprowadził konsekwentnie małe litery z początku alfabetu: a, b, c, ... na oznaczenie stałych?

Zatem to jemu zawdzięczamy w dużej mierze ujednolicenie symboliki algebraicznej, a w konsekwencji jednoznaczne rozumienie przez różnojęzycznych matematyków zapisów typu $(a+b)^3$ czy $(a-b)^3$.

W tym materiale będziesz mieć okazję zapoznania się z praktycznym wykorzystaniem symboliki matematycznej, proponowanej przez Kartezjusza. Bowiem zbierzemy teraz wiadomości dotyczące wzorów skróconego mnożenia na sumę oraz różnicę sześcianów i pokażemy ich zastosowanie w obliczeniach arytmetycznych i algebraicznych.

> **Twoje cele**
>
> - Zastosujesz wzory skróconego mnożenia na sumę oraz na różnicę sześcianów w obliczeniach arytmetycznych.
> - Zastosujesz wzory skróconego mnożenia na sumę oraz różnicę sześcianów w przekształceniach algebraicznych.

Przeczytaj

Pokażemy teraz kilka zastosowań wzorów skróconego mnożenia na sumę sześcianów dwóch wyrażeń oraz na różnicę sześcianów dwóch wyrażeń. Przypomnijmy najpierw te wzory.

Wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów dwóch wyrażeń

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

Suma sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez sumę kwadratów tych wyrażeń pomniejszoną o iloczyn tych wyrażeń.

Wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów dwóch wyrażeń

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Różnica sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez sumę kwadratów tych wyrażeń powiększoną o iloczyn tych wyrażeń.

Obliczenia arytmetyczne

Nie dysponując kalkulatorem czy innym urządzeniem, który pomoże nam w podniesieniu do potęgi 3 dodawanych bądź odejmowanych liczb, można zamienić sumy (różnice) na iloczyny, zawierające co najwyżej kwadraty danych liczb, których wartości często znamy na pamięć.

> **Przykład 1**
>
> Aby obliczyć $13^3 + 7^3$ wykorzystamy wzór na sumę sześcianów.
>
> $$13^3 + 7^3 = (13+7)\left(13^2 - 13 \cdot 7 + 7^2\right) =$$
>
> $$= 20 \cdot (169 - 91 + 49) = 20 \cdot 127 = 2540$$

> **Przykład 2**
>
> W podobny sposób jak w przykładzie 1, ale wykorzystując wzór na różnicę sześcianów, obliczymy $15^3 - 5^3$.
>
> $$15^3 - 5^3 = (15-5)\left(15^2 + 15 \cdot 5 + 5^2\right) =$$
>
> $$= 10 \cdot (225 + 75 + 25) = 10 \cdot 325 = 3250$$

> **Przykład 3**

Obliczymy wartość wyrażenia $W = 14^4 + 12^3 + 6^3 - 2^3$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że dodając 14 i 6 otrzymamy „pełną” dziesiątkę: $14 + 6 = 20$.

Podobnie, odejmując 12 i 2 otrzymamy „pełną” dziesiątkę: $12 - 2 = 10$.

Zatem wykonując obliczenia, wygodnie będzie pogrupować odpowiednio składniki i dopiero zastosować odpowiednie wzory skróconego mnożenia.

$$W = 14^4 + 12^3 + 6^3 - 2^3$$

$$W = \left(14^3 + 6^3\right) + \left(12^3 - 2^3\right)$$

Obliczymy wartość wyrażenia z pierwszego nawiasu, stosując wzór na sumę sześcianów.

$$14^3 + 6^3 = (14 + 6)\left(14^2 - 14 \cdot 6 + 6^2\right) = 20 \cdot 148 = 2960$$

Obliczamy wartość wyrażenia z drugiego nawiasu, stosując wzór na różnicę sześcianów.

$$12^3 - 2^3 = (12 - 2)\left(12^2 + 12 \cdot 2 + 2^2\right) = 10 \cdot 172 = 1720$$

Stąd:

$$W = 2960 + 1720 = 4680$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia jest równa 4680.

Przykład 4

Stosując poznany wzór skróconego mnożenia, usuniemy niewymierność z mianownika ułamka $A = \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Rozszerzamy ułamek przez $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$, aby zastosować wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów.

$$A = \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

Wykonujemy wskazane działania.

$$A = \frac{2 \cdot \left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 1^3} = \frac{2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+2}{2-1}$$

$$A = 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 2$$

Przykład 5

Wykażemy, że liczba $M=\frac{2-\sqrt[3]{3}}{4-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}+\frac{\sqrt[3]{9}}{11}$ jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że w mianowniku pierwszego ułamka znajduje się niepełny kwadrat wyrażenia $2-\sqrt[3]{3}$.

Zatem chcąc usunąć niewymierność z mianownika tego ułamka, należy pomnożyć licznik i mianownik przez $2+\sqrt[3]{3}$ i zastosować w mianowniku wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów, a w liczniku wzór na różnicę kwadratów.

$$\frac{2-\sqrt[3]{3}}{4-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\frac{2-\sqrt[3]{3}}{4-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{2+\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}}=\frac{2^2-\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{2^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=\frac{4-\sqrt[3]{9}}{11}$$

Stąd:

$$M=\frac{4-\sqrt[3]{9}}{11}+\frac{\sqrt[3]{9}}{11}=\frac{4}{11}$$

Liczba M jest wymierna, gdyż można ją zapisać w postaci ilorazu liczb całkowitych 4 i 11.

Przekształcenia algebraiczne

Wzory na sumę sześcianów oraz różnicę sześcianów zastosujemy teraz do zapisu sum algebraicznych w postaci iloczynów, czyli do rozkładu sum na czynniki.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie $\frac{x^3-64}{x-4}=13$ dla $x\neq 4$.

Rozwiązanie:

$$\frac{x^3-64}{x-4}=13$$

Rozkładamy na czynniki licznik ułamka znajdującego się po lewej stronie zapisanej równości i skracamy ułamek.

$$\frac{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)}{x-4}=13$$

$$x^2+4x+16=13$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$x^2+4x+16-13=0$$

$$x^2+4x+3=0$$

$$\Delta=16-12=4>0$$

$$x_1=\frac{-4-2}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-4+2}{2}=-1$$

Oba uzyskane pierwiastki są różne od 4, zatem równanie ma dwa rozwiązania: (-3) i (-1).

Przykład 7

Wykażemy, że suma sześcianów 3 kolejnych liczb naturalnych dodatnich, jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$n-1, n, n+1$ – kolejne liczby naturalne, gdy $n\geq 2$.

Wtedy:

$S=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ – suma sześcianów kolejnych liczb naturalnych.

Przekształcamy otrzymaną sumę, korzystając ze wzoru na sumę sześcianów.

$$S=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=\left[(n-1)^3+(n+1)^3\right]+n^3$$

$$S=\left[(n-1+n+1)\left(n^2-2n+1+n^2+2n+1-n^2+1\right)\right]+n^3$$

$$S=2n\cdot\left(n^2+3\right)+n^3$$

Wykonujemy mnożenie i wyłączamy wspólny czynnik poza nawias.

$$S=2n^3+6n+n^3$$

$$S=3\cdot\left(n^3+2n\right)$$

Otrzymane wyrażenie jest iloczynem liczby 3 i sumy liczb naturalnych, zatem liczba S jest podzielna przez 3, co należało wykazać.

Słownik

wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów

suma sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez sumę kwadratów tych wyrażeń pomniejszoną o iloczyn tych wyrażeń

wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów

różnica sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez sumę kwadratów tych wyrażeń powiększoną o iloczyn tych wyrażeń

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady podane w galerii zdjęć interaktywnych i spróbuj rozwiązać je innymi sposobami niż proponowane.

Polecenie 2

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Uprość wyrażenie $x^3 - (x-1)^3$.

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory skróconego mnożenia na różnicę oraz na sumę sześcianów – zastosowania

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele:

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia na sumę oraz na różnicę sześcianów w obliczeniach arytmetycznych
- stosuje wzory skróconego mnożenia na sumę oraz różnicę sześcianów w przekształceniach algebraicznych
- analizuje nietypowe zadania algebraiczne i ustala strategię rozwiązywania tych zadań
- prowadzi proste rozumowania w dowodzeniu twierdzeń

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów

- stacje zadaniowe
- gra dydaktyczna

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa miała do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie sobie w domu poznanych wzorów skróconego mnożenia.

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają najważniejsze wiadomości dotyczące wzorów skróconego mnożenia stopnia trzeciego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą stacji zadaniowych. Na stacjach znajdują się przykłady rozwiązanych zadań pokazujących zastosowania wzoru skróconego mnożenia na sumę i różnicę sześcianów.
   Na pierwszym stoliku zastosowanie wzoru w obliczeniach arytmetycznych, na drugim do przekształcania wyrażeń algebraicznych – takie, jak w „Przeczytaj".
2. Trzecia stacja to stacja komputerowa – uczniowie zapoznają się z galerią zdjęć interaktywnych.
3. Czwarty stolik – stacja komputerowa – uczniowie w grupach rozwiązują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, zwracają uwagą na zadania, które sprawiały problem. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości, dzieli się swoimi obserwacjami.
2. Grupy oceniają swoją pracę, wskazując swoje mocne i słabe strony.

Praca domowa:

Uczniowie w domu mają za zadanie poszukania jeszcze innych przykładów zastosowania wzorów skróconego mnożenia stopnia trzeciego.

Materiały pomocnicze:

Działania na wyrażeniach algebraicznych - przykłady

Działania na wyrażeniach algebraicznych - zadania

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą w domu zapoznać się z galerią zdjęć interaktywnych.