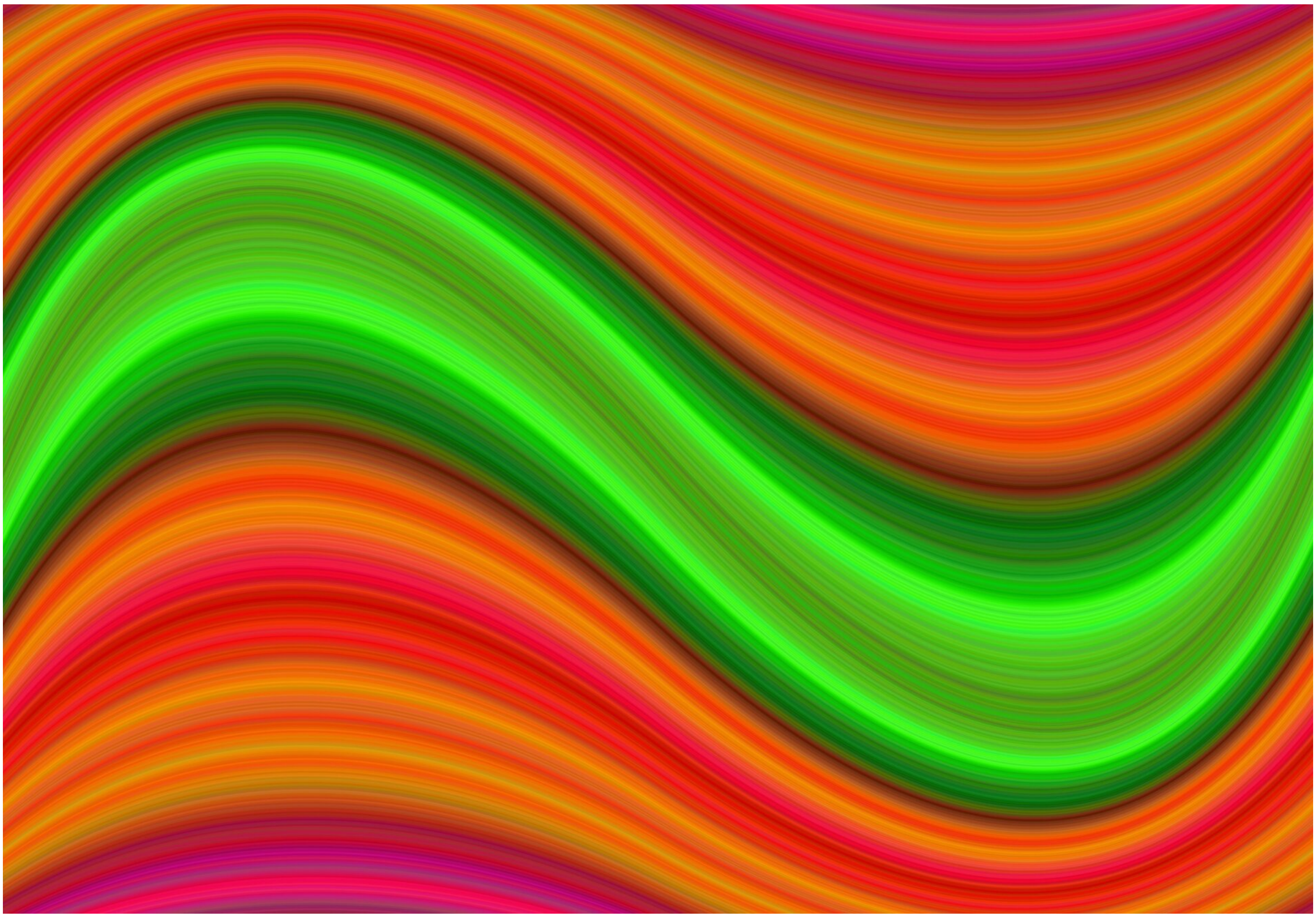


# Zastosowanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w  kontekście realistycznym

# Zastosowanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w  kontekście realistycznym

Źródło: dostępny w internecie: Obraz ememcomy z Pixabay.

Źródło: Adam Bichler, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Tales (640 – 546 p. n. e.) jeden z „siedmiu mędrców” Grecji, będąc już w podeszłym wieku, wybrał się do Egiptu, gdzie zmierzył wysokość piramid za pomocą długości cienia. Według legendy wbił w ziemię kij o znanej długości i gdy długość cienia była równa długości kija, zmierzył długość cienia rzucanego przez piramidę.

W tym materiale zastosujemy funkcje trygonometryczne kąta ostrego w zadaniach z kontekstem realistycznym.

### Twoje cele

- Wykorzystasz definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego do rozwiązywania trójkątów.
- Obliczysz kąty trójkąta i długości jego boków.
- Zastosujesz funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich.

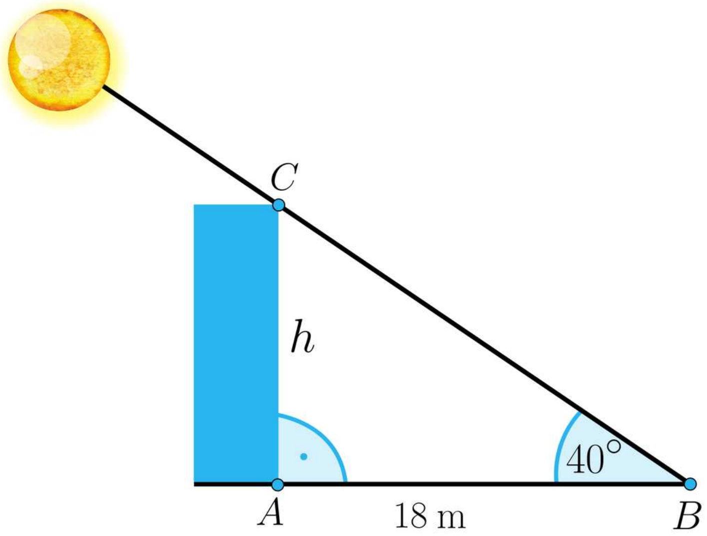
- Korzystając z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora, znajdziesz przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych lub wartości kątów.

# Przeczytaj

Są sytuacje, w których z określonych przyczyn nie można dokonać pomiaru. Zdarza się to często przy określaniu długości, szerokości i wysokości obiektów w terenie. Przedstawimy tu kilka problemów, których rozwiązanie jest możliwe dzięki zastosowaniu funkcji trygonometrycznych.

**Przykład 1**

Obliczymy wysokość budynku, którego cień ma długość 18 m wiedząc, że kąt padania promieni słonecznych wynosi $40^{\circ}$. Wynik podamy z dokładnością do 0,1 m.




Trójkąt $ABC$ jest prostokątny, więc z definicji tangensa mamy:

$\operatorname{tg} 40^{\circ} = \frac{h}{18}$,

z tablic odczytujemy $\operatorname{tg} 40^{\circ} \approx 0{,}8391$.

Po przekształceniach otrzymujemy:

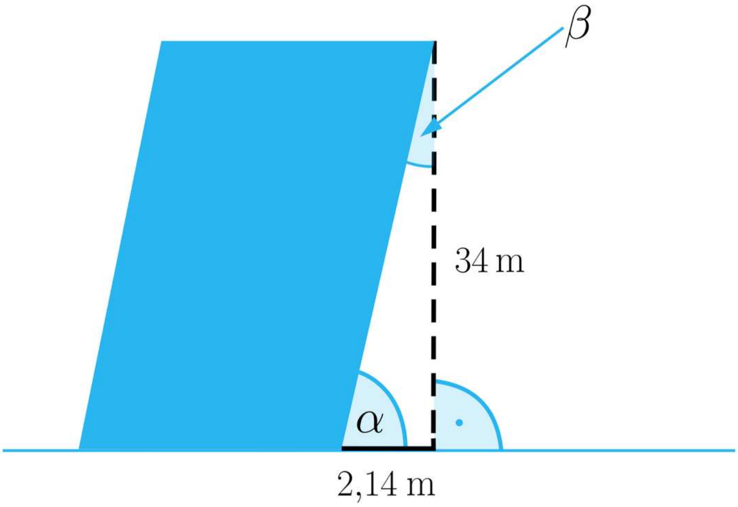
$18 \cdot 0,8391 \approx h$, czyli

$h \approx 15{,}1038 \approx 15{,}1$ m.

Odpowiedź: Budynek ma około 15,1 m wysokości.

**Przykład 2**

Krzywa wieża w Ząbkowicach Śląskich ma wysokość $34$ m i jej odchylenie od pionu wynosi $2{,}14$ m. Wyznaczmy kąt, jaki tworzy z powierzchnią ziemi ściana wieży. O ile stopni odchylona jest wieża od pionu? Podamy wynik z dokładnością do $0,1^\circ$.




Powstały trójkąt jest prostokątny.

$\alpha$ – kąt, jaki tworzy ściana wieży z powierzchnią ziemi.

Z definicji tangensa mamy:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{34}{2{,}14} \approx 15,8879.$

Za pomocą kalkulatora znajdujemy przybliżoną wartość kąta $\alpha$:

$\alpha \approx 86,398498$, a zatem

$\alpha \approx 86,4^\circ$.

$\beta$ - kąt odchylenia wieży od pionu.

$\beta = 90^\circ - \alpha$, a zatem

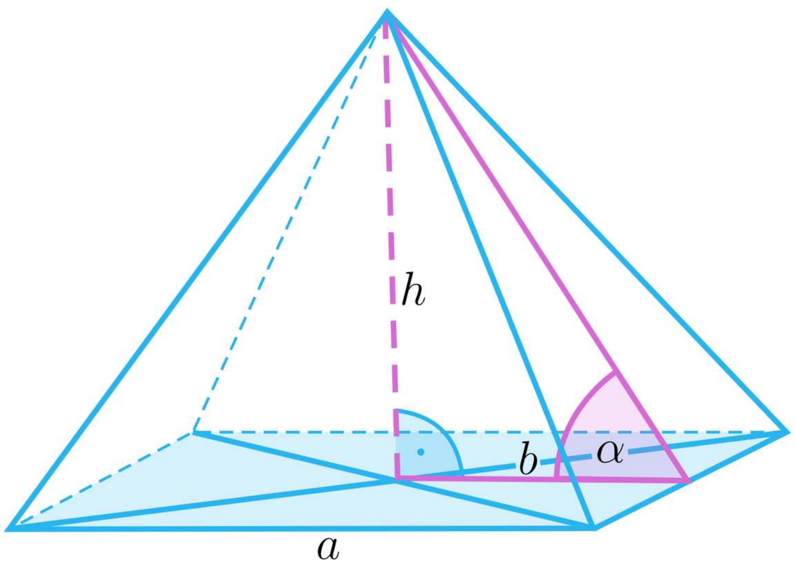
$\beta \approx 90^\circ - 86,4^\circ \approx 3,6^\circ$.

Odpowiedź: Z powierzchnią ziemi ściana wieży tworzy kąt około $86,4^\circ$. Wieża jest odchylona od pionu o około $3,6^\circ$.

**Przykład 3**

Jedną z trzech największych piramid egipskich w Gizie jest piramida Chefrena. Długość boku u podstawy tej piramidy wynosi $214,5$ m, a ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem $53^{\circ}7'48''\approx 53^{\circ}$ (kąt zaznaczono na rysunku). Obliczymy wysokość tej piramidy. Wynik podamy z dokładnością do 1 m.

Piramida ma kształt ostrosłupa o podstawie kwadratu. Na rysunku przedstawiamy sytuację z zadania:




gdzie

$h$ – wysokość piramidy,
$\alpha$ – kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy piramidy,
$\alpha \approx 53^{\circ}$.

Rozważany trójkąt jest prostokątny – długości jego przyprostokątnych to: $h$ i $b$. Z rysunku wynika, że $b = \frac{a}{2}$.

Z definicji tangensa mamy:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{b} = \frac{h}{\frac{1}{2}a} = \frac{2h}{a}$.

Podstawiamy dane z zadania:

$\operatorname{tg}53^{\circ} = \frac{2h}{214{,}5}$,

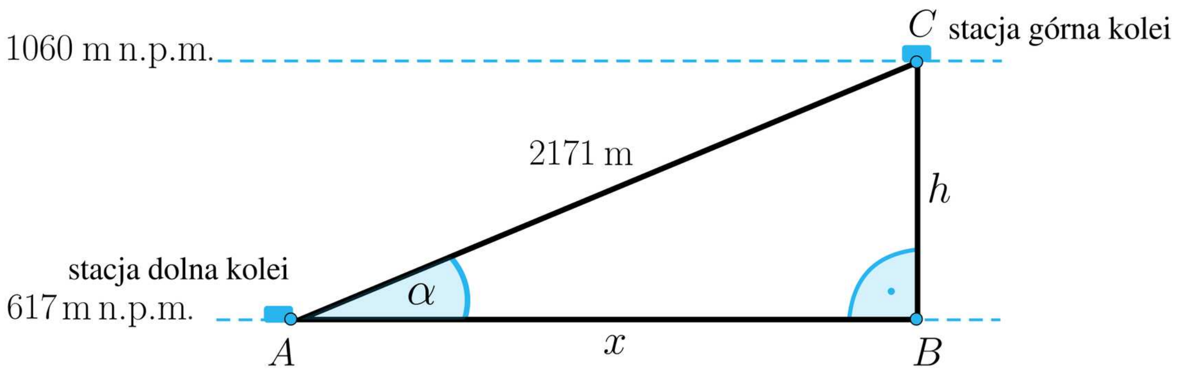
$2 \cdot h = \operatorname{tg}53^{\circ} \cdot 214,5 \approx 1,3270 \cdot 214,5 \approx 284,6415 \approx 284,6$,

$h \approx \frac{284{,}6}{2} \approx 142,3 \approx 142$ m.

Odpowiedź: Wysokość piramidy Chefrena wynosi około 142 m.

**Przykład 4**

Kolej gondolowa na Stok Izerski ma długość trasy $2171 \text{ m}$. Stacja dolna tej kolei znajduje się na wysokości $617 \text{ m n. p. m.}$, a górna na wysokości $1060 \text{ m n. p. m.}$ Obliczymy średnie nachylenie stoku. Podamy wynik z dokładnością do $0,1^{\circ}$.
Zakładając, że wjazd gondoli odbywa się po linii prostej, obliczymy, jaka jest odległość stacji dolnej od punktu, który leży na tej samej wysokości, ale pod stacją górną.




Różnica wysokości między stacją górną a dolną jest długością boku $BC$ trójkąta $ABC$. Oznaczmy:

$|BC| = h$

$h = 1060 - 617 = 443 \text{ m}.$

Trójkąt $ABC$ jest prostokątny, więc z definicji sinusa mamy:

$\sin\alpha = \frac{h}{|AC|}$, gdzie

$h = 443 \text{ m}$ oraz $|AC| = 2171 \text{ m}$,

$\sin \alpha = \frac{443}{2171} \approx 0,2040.$

Za pomocą kalkulatora obliczamy  przybliżoną wartość kąta $\alpha$:

$\alpha = 11,77^{\circ} \approx 12^{\circ}.$

Odległość stacji dolnej od punktu, który leży na tej samej wysokości, ale pod stacją górną, policzymy z definicji funkcji cosinus.

Podstawiając $\cos 12^{\circ} \approx 0,9781$, otrzymujemy

$0,9781 \approx \frac{x}{2171}.$

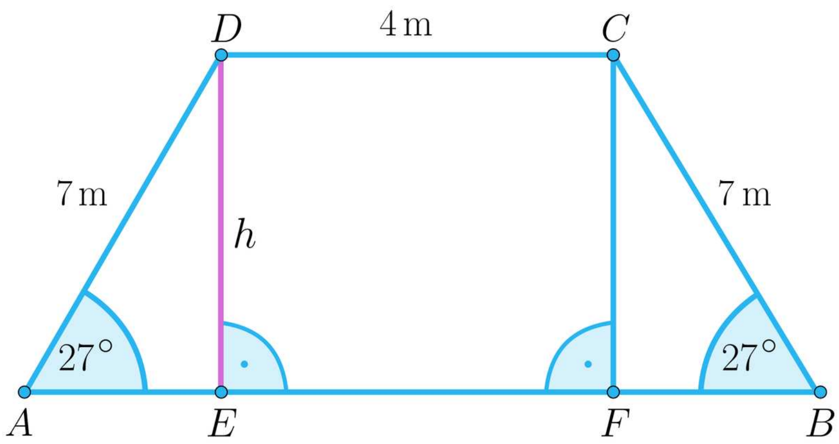
Zatem

$x \approx 0,9781 \cdot 2171 \approx 2123,4 \approx 2123 \text{ m}$.

Odpowiedź: Średnie nachylenie stoku wynosi około $12^{\circ}$, a punkt, który leży na tej samej wysokości, ale pod stacją górną jest odległy o około $2123 \text{ m}$ od stacji dolnej.

**Przykład 5**

Wał ochronny ma przekrój trapezu równoramiennego, przy czym górna szerokość wału wynosi $4 \text{ m}$, natomiast boczne nasypy o długości $7 \text{ m}$ są nachylone do poziomu pod kątem $27^{\circ}$. Oblicz dolną szerokość wału oraz jego wysokość.




$|EF| = |DC| = 4 \text{ m}$

Trapez $ABCD$ jest równoramienny, więc $|AE| = |FB|$.

Szerokość dolnej części wału wynosi: $|AB| = |AE| + |EF| + |FB|$, a ponieważ $|AE| = |FB|$, to:

$|AB| = 2|AE| + |DC|$

$|DC| \ = 4 \text{ m}$, więc

$|AB| = 2|AE| + 4$.

Aby wyznaczyć dolną część wału, należy obliczyć długość odcinka $AE$.

Trójkąt $AED$ jest prostokątny, zatem z definicji funkcji cosinus mamy:

$\cos \alpha = \frac{|AE|}{|AD|}$.

Podstawiając: $\alpha = 27^{\circ}$, $|AD| = 7$, otrzymujemy

$\cos 27^\circ = \frac{|AE|}{7}$.

Z tablic odczytujemy wartość $\cos 27^\circ \approx 0,8910$,

$0,8910 \approx \frac{|AE|}{7}$.

Stąd

$|AE| \approx 7 \cdot 0,8910 \approx 6,237 \approx 6,2$.

Wynik podamy z przybliżeniem do $0,1$ m: $|AE| \approx 6,2$ m.

Szerokość dolnej części wału, czyli długość podstawy trapezu, wynosi:

$|AB| \approx 2|AE| + 4 \approx 12,4 + 4 \approx 16,4$ m.

Wysokość wału obliczymy z definicji funkcji sinus.

$\sin 27^\circ = \frac{|ED|}{|AD|}$

$|ED| = h, \ |AD| = 7$ m

$\sin 27^\circ = \frac{h}{7}$

$h \cdot 7 = \sin 27^\circ$

Ponieważ $\sin 27^\circ \approx 0,4550$ (odczytujemy z tablic trygonometrycznych), to

$h \approx 7 \cdot 0,4540 \approx 3,178 \approx 3,2$.

Wynik podamy z przybliżeniem do $0,1$ m:

$h \approx 3,2$ m.

Odpowiedź: Dolna część wału ma szerokość około $16,4$ m. Wysokość wału wynosi około $3,2$ m.

## Słownik

**sinus kąta ostrego $\alpha$ w trójkącie prostokątnym**

nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej kątowi $\alpha$ do długości przeciwprostokątnej.

**cosinus kąta ostrego $\alpha$ w trójkącie prostokątnym**

stosunek długości przyprostokątnej przylegɫej do kąta $\alpha$ do długości przeciwprostokątnej

**tangens kąta ostrego $\alpha$ w trójkącie prostokątnym**

stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej kątowi $\alpha$ do długości przyprostokątnej przyległej do kąta $\alpha$

# Animacja

**Polecenie 1**

Zapoznaj się z animacją dotyczącą zastosowania wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D14GQJKac

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w  kontekście realistycznym.

---

**Polecenie 2**

Lina długości $12 \mathrm{~m}$ podtrzymuje maszt. Kąt nachylenia liny do ziemi wynosi $50^{\circ}$. Na jakiej wysokości zamocowana jest lina? Wynik podaj z dokładnością do $0,1 \mathrm{~m}$.

**Polecenie 3**

Według wytycznych BHP kąt nachylenia drabiny przystawnej powinien wynosić od $65^{\circ}$ do $75^{\circ}$. Czy drabina o długości $3 \mathrm{~m}$, której dolny koniec jest oddalony od ściany o $1,2 \mathrm{~m}$ jest prawidłowo ustawiona? Na jaką wysokość sięga ta drabina?

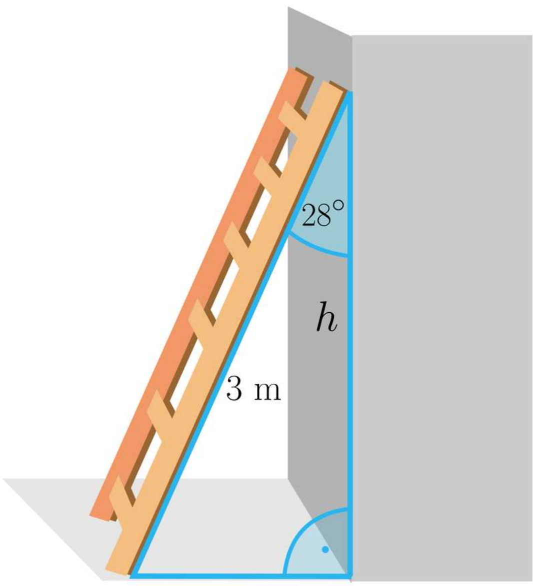
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

## Ćwiczenie 1

## Ćwiczenie 2

Drabinę o długości $3 \text{ m}$ oparto o ścianę budynku pod kątem $28^\circ$ jak na poniższym rysunku.




## Ćwiczenie 3

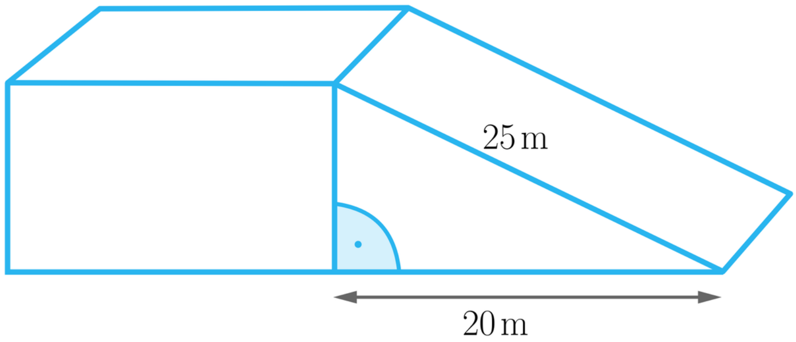
## Ćwiczenie 4

## Ćwiczenie 5

## Ćwiczenie 6

### Ćwiczenie 7

Podjazd dla wózków na platformę widokową ma długość $25\ \mathrm{m}$ i rozpoczyna się $20\ \mathrm{m}$ od podstawy platformy (jak na rysunku poniżej).




### Ćwiczenie 8

# Dla nauczyciela

**Autor:** Katarzyna Podfigurna

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Zastosowanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w zastosowaniach z kontekstem realistycznym**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum

**Podstawa programowa:**
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$ , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $30°$, $45°$, $60°$;
2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- poznaje różne zastosowania funkcji trygonometrycznych kąta ostrego;
- wykorzystuje definicje funkcji trygonometrycznych w zadaniach z kontekstem realistycznym;

- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm
- konektywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

**Formy pracy:**

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

**Przebieg lekcji**

**Przed lekcją:**

Nauczyciel na poprzednich zajęciach poprosił uczniów o przyniesienie arkuszy papieru kolorowego i pisaków.

**Faza wstępna:**

- uczniowie podają definicje funkcji trygonometrycznych (zapisują je na tablicy);
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

**Faza realizacyjna:**

- nauczyciel dzieli uczniów na grupy 3-osobowe i określa zadanie do wykonania;
- nauczyciel prezentuje animację;
- nauczyciel poleca przeanalizowanie przykładów w sekcji Przeczytaj;
- uczniowie (w grupach) na podstawie przykładów z sekcji Przeczytaj i animacji proponują własne zadania, opisujące realną sytuację. Potrzebne informacje wyszukują w internecie;

- każda grupa swój przykład umieszcza na arkuszach papieru w formie afiszu;
- przedstawiciel każdej grupy umieszcza opracowany afisz na tablicy i omawia sytuację na nim przedstawioną;
- uczniowie przedyskutowują na forum całej klasy zaproponowane sytuacje i ich rozwiązania;
- nauczyciel zwraca uwagę na estetykę prac i poprawność zapisów.

**Faza podsumowująca:**

- uczniowie wskazują najciekawsze wg nich sytuacje, w których można zastosować funkcje trygonometryczne
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów

**Praca domowa:**

- zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych
- nauczyciel może zaproponować, chętnym uczniom, przygotowanie prezentacji o „siedmiu mędrcach” Starożytnej Grecji.

**Materiały pomocnicze:**

Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

**Wskazówki metodyczne:**

Animacja może posłużyć uczniom do samodzielnego przygotowania się do zajęć prowadzonych metodą odwróconej klasy.