



Kąty i ich rodzaje

Materiał składa się z sekcji: "Rodzaje kątów", "Kąty wierzchołkowe i przyległe".

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), filmy, ćwiczenia interaktywne w tym otwarte.

Film - określenie kąta, rodzaje kątów.

Przykłady - rodzaje kątów, kąty wierzchołkowe i przyległe, wyznaczanie miar kątów.

Ćwiczenia - wyznaczanie miar kątów, rozpoznawanie rodzajów kątów.

Kąty i ich rodzaje

Zapoznaj się z materiałem dotyczącym rodzajów kątów. Przeanalizuj poniższe przykłady i rozwiąż zadania.

Definicja: Kąt

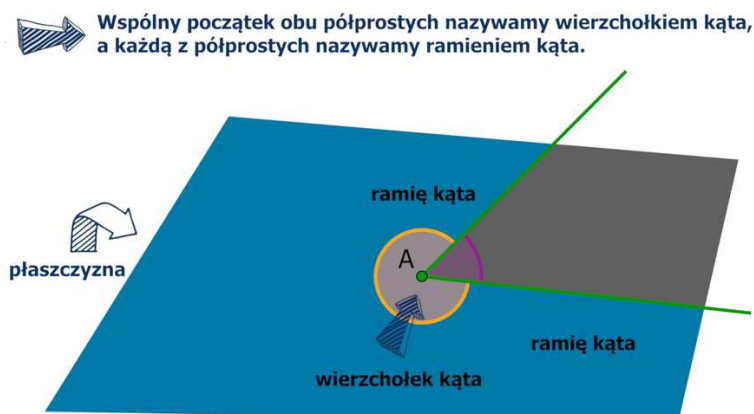
Dwie półproste o wspólnym początku rozcinają płaszczyznę na dwie części. Każdą z tych części, wraz z tymi półprostymi nazywamy **kątem**.

Wierzchołkiem kąta nazywamy wspólny początek obu półprostych, a każdą z półprostych nazywamy ramieniem kąta.

Półproste AC i AB wyznaczają dwa kąty. Każdy z nich możemy oznaczyć symbolem $\sphericalangle BAC$. Aby wskazać o który kąt chodzi, zaznaczamy go odpowiednim łukiem.

Przykład 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, która opisuje konstrukcję i budowę kąta.

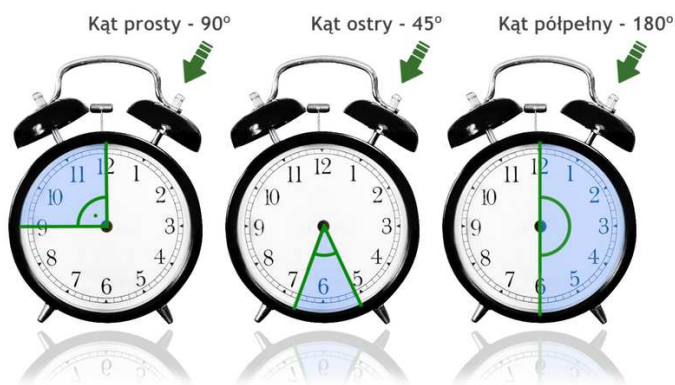


Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1eL9Qx42gfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Co to jest kąt?

Rodzaje kątów

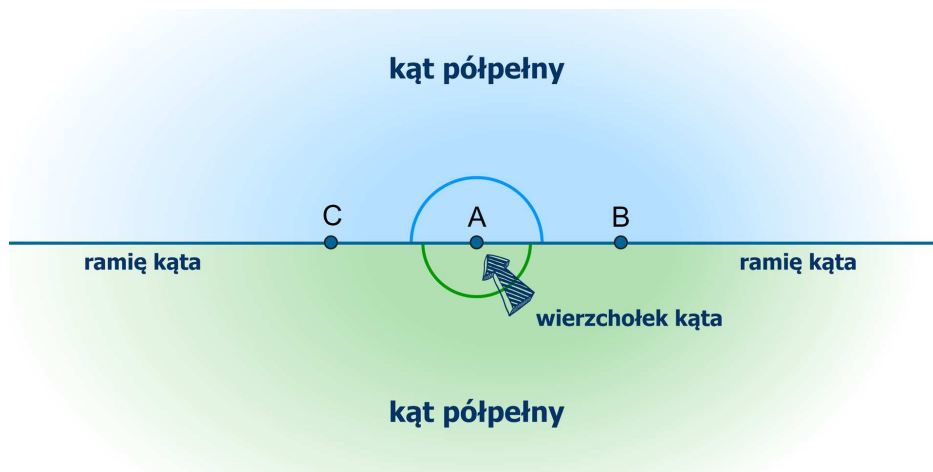


Film dostępny pod adresem </preview/resource/RPW9Gng89MtTs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

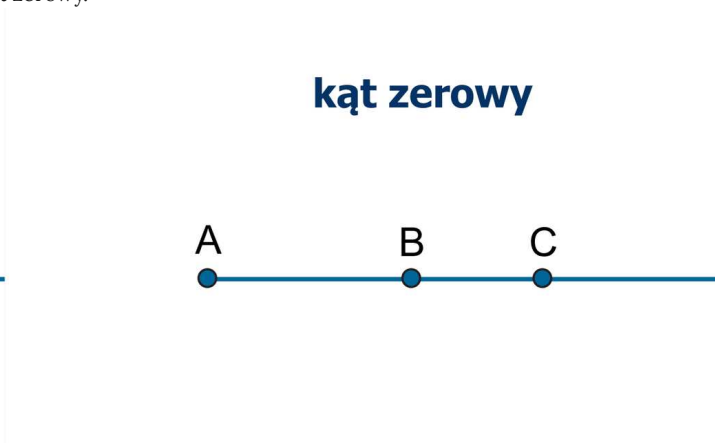
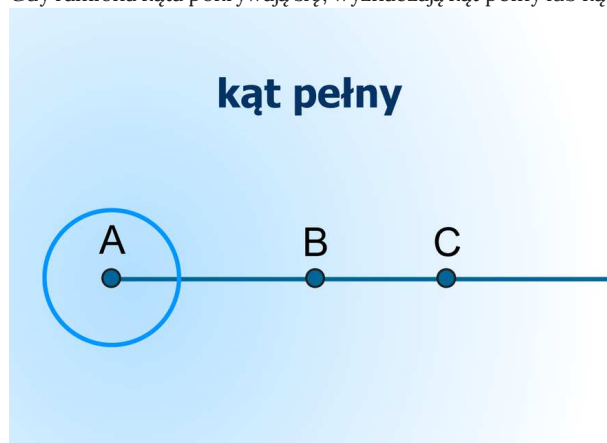
Filmik pokazujący różne kąty za pomocą zegarów.

- Jeśli ramiona kąta uzupełniają się do prostej, to taki kąt nazywamy półpełnym.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Gdy ramiona kąta pokrywają się, wyznaczają kąt pełny lub kąt zerowy.

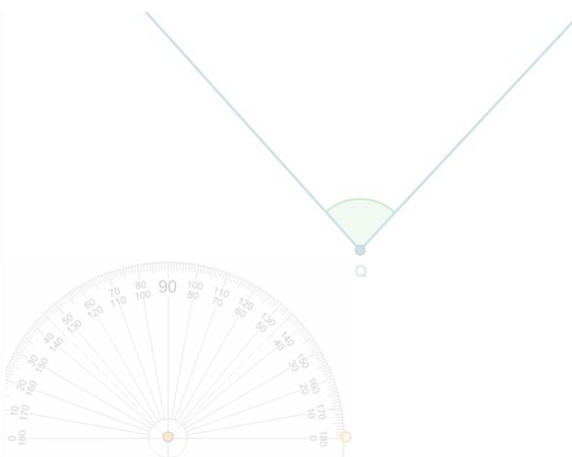


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Najczęściej używaną jednostką miary kąta jest stopień.
- Jeden stopień (1°) to 60 minut kątowych ($60'$). Jedna minuta to 60 sekund ($60''$).
- Kąty mające tę samą miarę nazywamy kątami równymi lub przystającymi.

Ćwiczenie 1

Uruchom aplet, aby wykonać polecenie w nim zawarte.



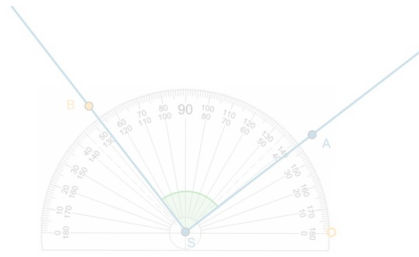
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13ZdzBVU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Uruchom aplet, aby wykonać polecenie w nim zawarte.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13ZdzBVU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Rodzaje kątów

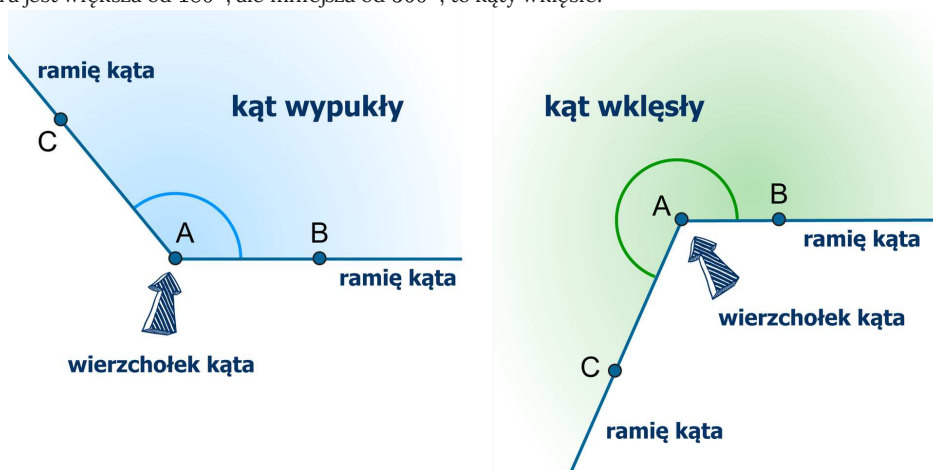
- Kąt, którego miara jest mniejsza od 90° , ale większa od 0° , nazywamy kątem ostrym.
- Kąt, którego miara jest równa 90° , nazywamy kątem prostym.
- Kąt, którego miara jest większa od 90° , ale mniejsza od 180° , nazywamy kątem rozwartym.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Kąty wypukłe, kąty wklęsłe

- Kąty, których miara jest mniejsza od 180° lub równa 180° nazywamy kątami wypukłymi.
- Kąty, których miara jest większa od 180° , ale mniejsza od 360° , to kąty wklęsłe.



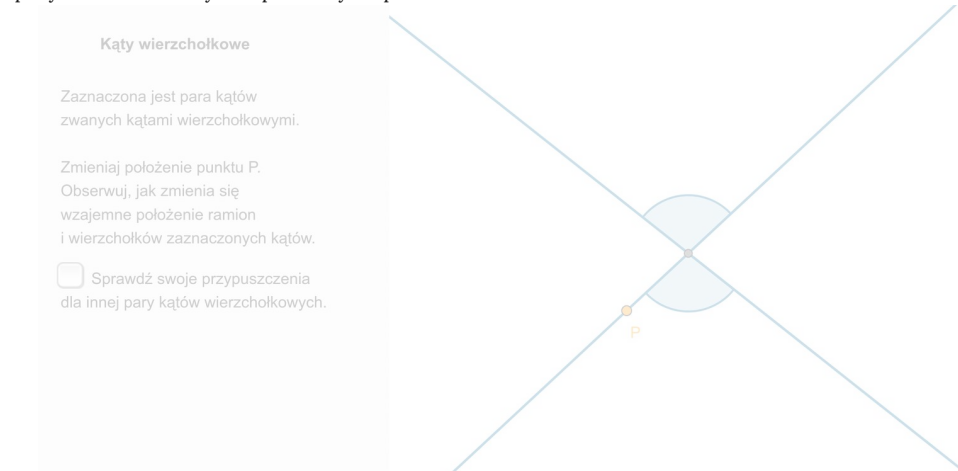
Ciekawostka

W naukach przyrodniczych najczęściej wykorzystywaną miarą kąta jest miara łukowa. Jednostką jest radian. Miary kątów pojawiają się w wielu wzorach fizycznych. Kąty wyrażone w radianach dają prostsze wyniki niż miary wyrażone w stopniach. Jednakże mierzenie kątów w stopniach w życiu codziennym jest tak popularne, że matematycy i przyrodnicy nie rezygnują całkowicie ze stosowania miary stopniowej.

Kąty wierzchołkowe i przyległe

Przykład 2

Zapoznaj się z przykładem zawartym w poniższym aplecie.

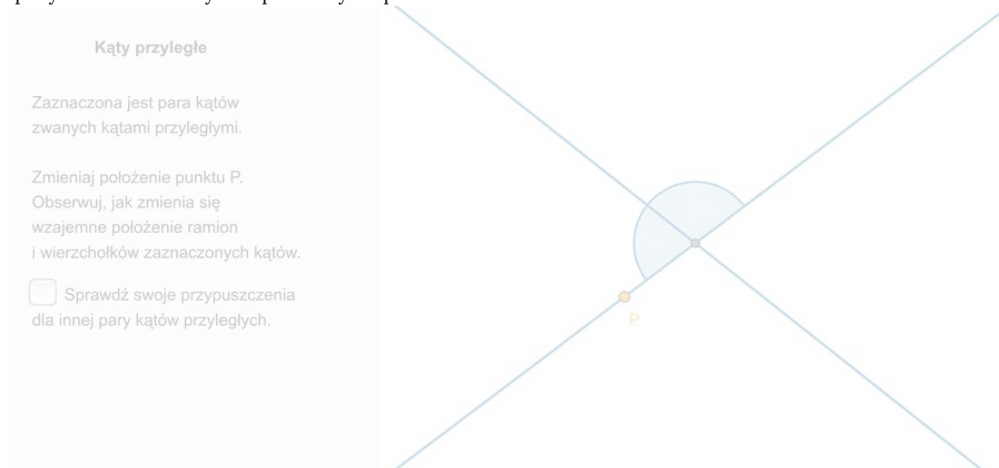


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13ZdzBVU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Zapoznaj się z przykładem zawartym w poniższym aplecie.

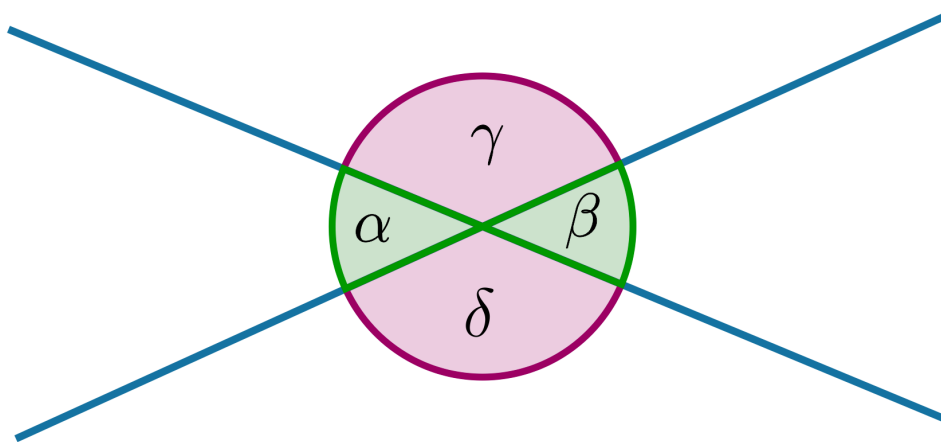


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13ZdzBVU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Kąty przyległe i wierzchołkowe

- **Kąty przyległe** to dwa kąty wypukłe, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.
- **Kąty wierzchołkowe** to dwa kąty wypukłe, które mają wspólny wierzchołek i przedłużeniem ramion jednego kąta są odpowiednie ramiona drugiego kąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na przykład α i γ na rysunku są kątami przyległymi. Pary kątów wierzchołkowych to α i β oraz γ i δ .

Przykład 4

Zapoznaj się z przykładem zawartym w poniższym aplecie.

Kąty przyległe

Zaznaczona jest para kątów zwanych kątami przyległymi.

Zmieniaj położenie punktu P. Obserwuj, jak zmienia się suma miar zaznaczonych kątów.

☐ Sprawdź swoje przypuszczenia dla innej pary kątów przyległych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13ZdzBVU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Suma miar kątów przyległych

Suma miar kątów przyległych jest równa 180° .

Przykład 5

Zapoznaj się z przykładem zawartym w poniższym aplecie.

Kąty wierzchołkowe

Zaznaczona jest para kątów zwanych kątami wierzchołkowymi.

Zmieniaj położenie punktu P. Obserwuj, jak zmieniają się miary zaznaczonych kątów.

☐ Sprawdź swoje przypuszczenia dla innej pary kątów wierzchołkowych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13ZdzBVU>

Twierdzenie: Kąty wierzchołkowe

Kąty wierzchołkowe mają równe miary.

Dowód:

Wprost z twierdzenia o sumie miar kątów przyległych wynika, że

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

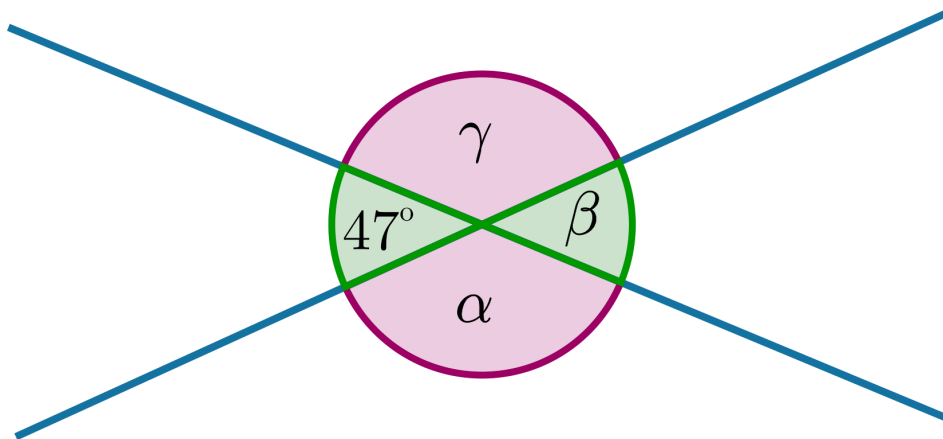
oraz

$$\beta + \gamma = 180^\circ.$$

Stąd $\alpha = \beta$. Wynika stąd, że kąty wierzchołkowe są równe.

Przykład 6

Obliczmy miary kątów α , β i γ zaznaczonych na rysunku.



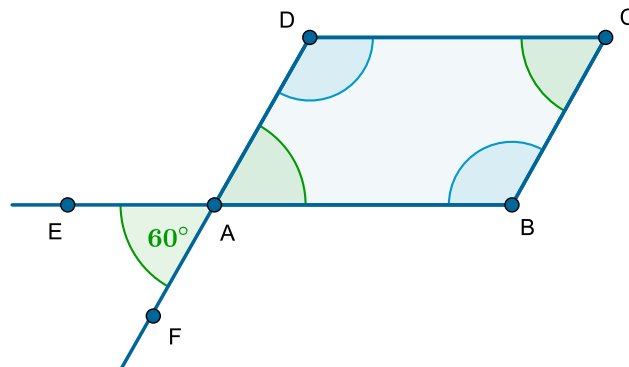
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąty o miarach 47° i β to kąty wierzchołkowe, więc $\beta = 47^\circ$. Każdy z kątów α i γ jest przyległy do kąta o mierze 47° . Zatem

$$\alpha = \gamma = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ.$$

Przykład 7

Wyznamy miary kątów równoległoboku $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozwiązanie:

Kąty EAF i DAB to kąty wierzchołkowe, mają więc równe miary.

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle EAF| = 60^\circ.$$

Suma kątów równoległoboku leżących przy jednym boku jest równa 180° .
Kąty DAB i ABC leżą przy jednym boku.

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$$

$$60^\circ + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 60^\circ$$

$$|\sphericalangle ABC| = 120^\circ.$$

W równoległoboku kąty leżące naprzeciw siebie mają równe miary.
Kąt BCD leży naprzeciw kąta DAB , kąty te mają więc równe miary.

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DAB| = 60^\circ$$

Podobnie kąt ADC leży naprzeciw kąta ABC , kąty te mają równe miary.

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC| = 120^\circ$$

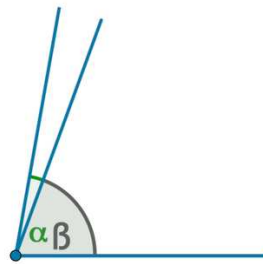
Odpowiedź: Miary kątów równoległoboku są równe: 60° , 60° , 120° , 120° .

Przykład 8

Zapoznaj się z animacją, pokazującą porównywanie kątów.



Kąt β jest mniejszy od kąta α .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R9ncwkBcQcxZS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja o porównywaniu kątów.

Ćwiczenie 3



Uruchom aplet, aby wykonać polecenie w nim zawarte.

Rodzaje kątów

Jaki jest kąt PQR?
Zaznacz właściwą odpowiedź.

- ☐ prosty
- ☐ rozwarty
- ☐ ostry
- ☐ pełny
- ☐ zerowy
- ☐ półpełny
- ☐ kąt w zakresie $(180^\circ, 360^\circ)$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13ZdzBVU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

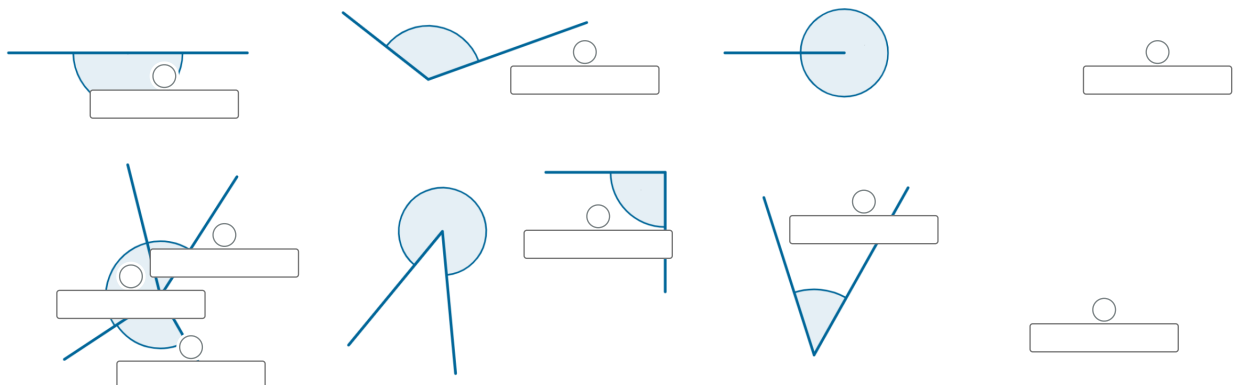
- ☐ Kąt prosty jest kątem wypukłym.
- ☐ Kąty wierzchołkowe mają równe miary.
- ☐ Kąt półpełny jest kątem ostrym.
- ☐ Kąty przyległe mają równe miary.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Określi rodzaj poniższych kątów, a następnie przeciągnij i upuść odpowiednie nazwy kątów na grafikę.



kąt rozwarty kąt półpełny kąt wklęsły kąt prosty kąt ostry kąt pełny kąt prosty kąt ostry kąt rozwarty

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



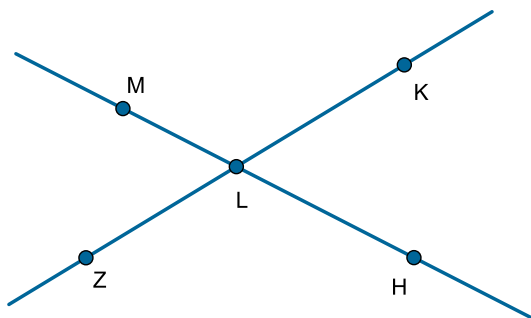
Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie miary kątów i słowa lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Jeśli dwa kąty przyległe są równe, to miara każdego z nich jest równa .
- Suma kątów jest równa kątowi półpełnemu.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Zapoznaj się z poniższym rysunkiem.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie kąty lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Kąt KLH jest kątem przyległym do kąta .
- Kąt i kąt MLK to kąty wierzchołkowe.
- Suma miary kąta ZLM i miary kąta jest równa 180° .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Z dwóch kątów przyległych jeden jest o 40° większy od drugiego. Jakie miary mają te kąty? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 120° i 60°

☐ 110° i 70°

☐ 120° i 80°

☐ 95° i 55°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Jeden z kątów przyległych ma miarę osiem razy większą od drugiego. Oblicz miary tych kątów. Uzupełnij odpowiedź, wpisując w luki odpowiednie liczby.

Odpowiedź: Miary tych kątów wynoszą $^\circ$ oraz $^\circ$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

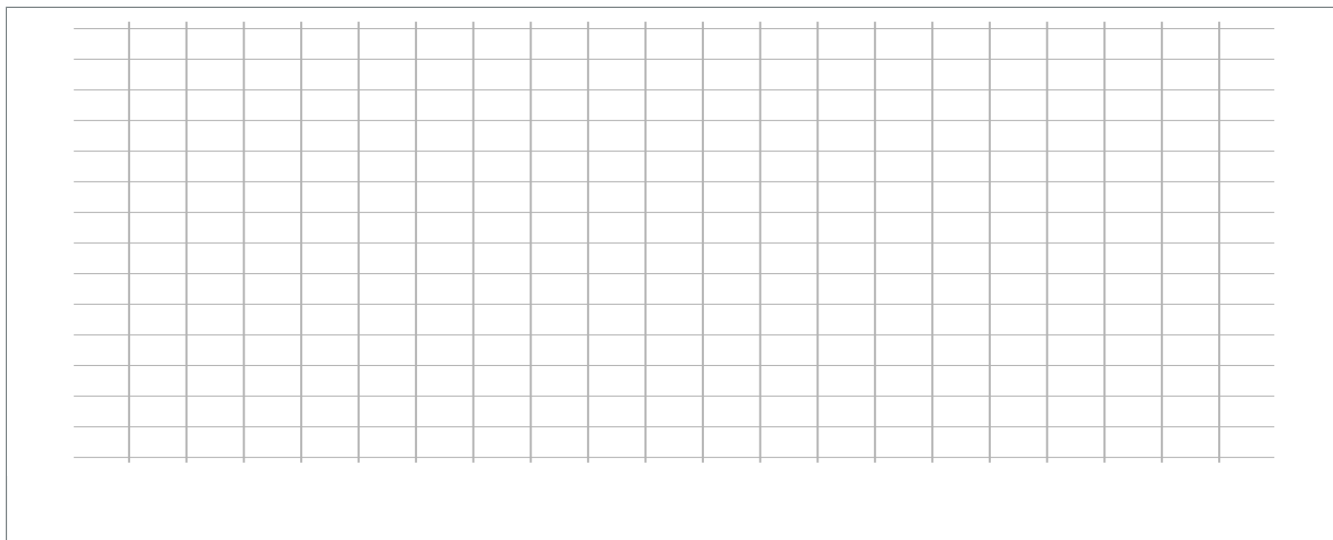
Dany jest dowolny kąt x . Ile kątów przyległych do kąta x możesz dorysować? Uzupełnij odpowiedź, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Odpowiedź: Liczba kątów przyległych, które można narysować do kąta x to .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

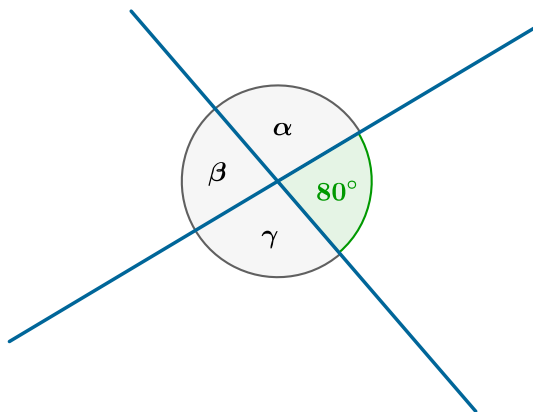
Narysuj romb. Podaj miary kątów wierzchołkowych oraz przyległych, jakie tworzą przekątne w tym rombie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Zapoznaj się z poniższym rysunkiem. Oblicz miary kątów α , β , γ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

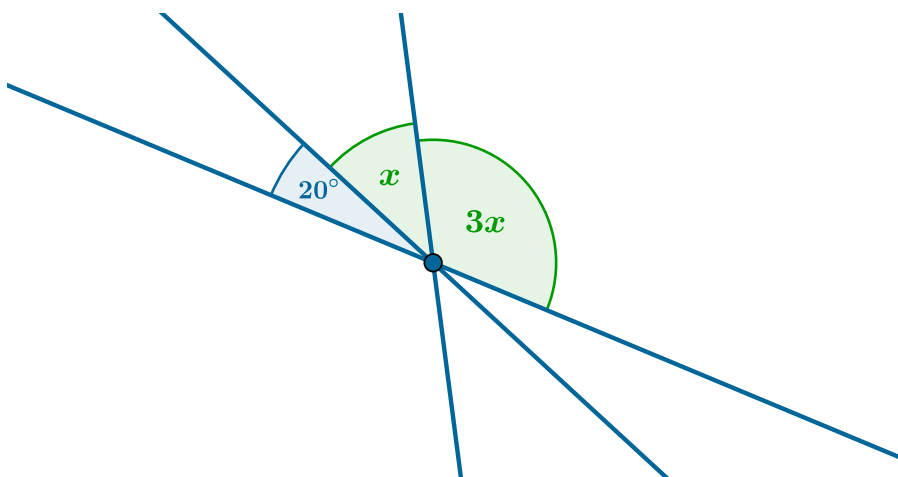
Uzupełnij poniższe zdania, wpisując w luki odpowiednie liczby.

- Kąt α ma miarę °.
- Kąt β ma miarę °.
- Kąt γ ma miarę °.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

Zapoznaj się z poniższym rysunkiem. Oblicz miarę kąta x .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Miara kąta x wynosi °.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.